

Contrôle en ligne des échangeurs
par excitation/réponse transitoires en température

Denis Maillet, Benjamin Rémy, Benoît Pfortner, Vincent Schick

Université de Lorraine & CNRS, Nancy
Laboratoire **E**nergies et **M**écanique **T**héorique et **A**ppliquée (LEMETA)

Journée SFT
Echangeurs thermiques et multifonctionnels:
récents développements et perspectives

Paris, 26 janvier 2023

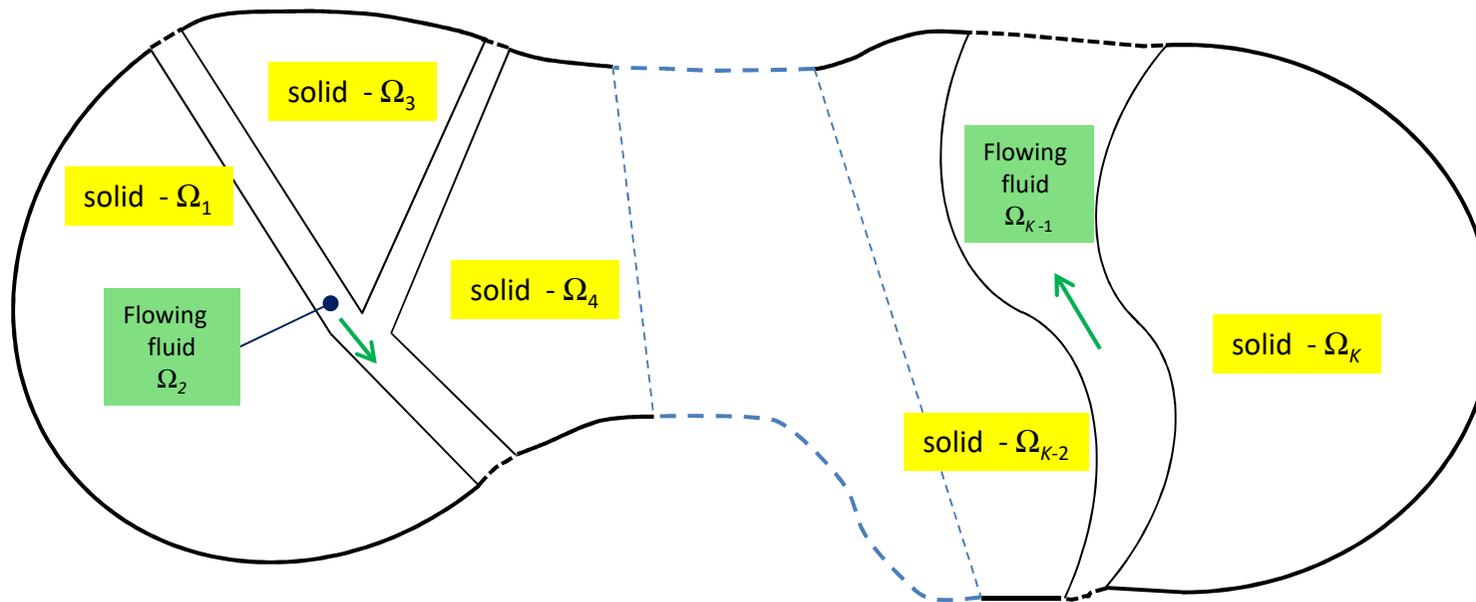


Plan de l'exposé

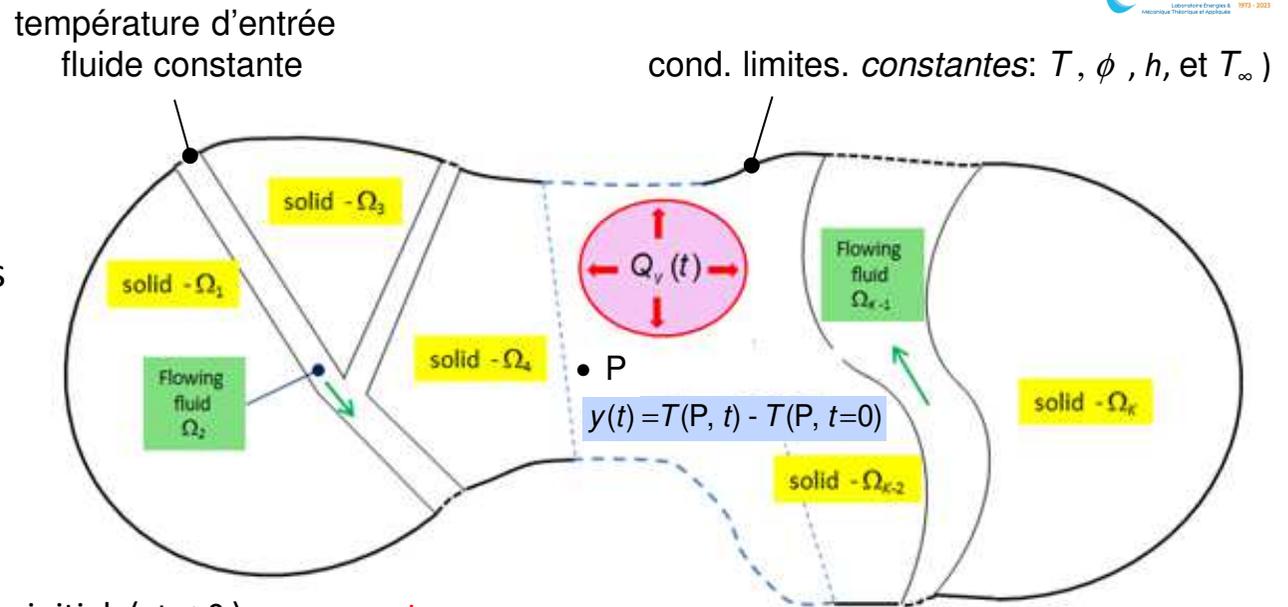
1. Introduction: modèles convolutifs en transfert thermique transitoire
2. Identification des réponses impulsionnelles d'un échangeur à plaque et efficacités thermiques en permanent pour un fonctionnement co-courant
3. Application expérimentale à la quantification de l'encrassement
4. Autre approche explorée : le modèle ARX : applications contrôle de la maldistribution ou d'une variation de débit en contre-courant
3. Conclusion et perspectives

1.1. Modèles convolutifs en transfert thermique transitoire

Système physique **multicomposant** = K domaines **solides** ou **fluides**



Ensemble de solides **et** fluide(s):
 conduction et convection forcée
 interne 3D avec vitesses constantes
 (en temps mais pas en espace)
 P = point **quelconque** du système



Hypothèses :

- champ de température initial ($t \leq 0$) **permanent**
- à $t = 0^+$, une **seule** excitation thermique définie par son support géométrique, **separable en temps/espace**
- aucun changement des cond. limites, ni de température fluides externe, ni de temp. fluide entrée
- les paramètres thermophysiques ainsi que le champ des vitesses restent invariable en temps
- système mathématique (équ. chaleur + cond. limites) **Linéaire à coefficients Indépendants du Temps (LIT)**

Cas particulier d'une **excitation volumique** à l'instant $t = 0$

- Equation de la chaleur en transitoire: $T(P, t) \rightarrow \theta(P, t) = T(P, t) - T(P, t=0)$

$$\boxed{\rho c(P) \frac{\partial \theta}{\partial t}(P, t)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} \theta(P, t)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} \theta(P, t))} + \boxed{\frac{f(P)}{V_{\text{source}}} Q_v(t)}$$

Transitoire
Advection
Conduction
Source interne

support
(espace)

$$\boxed{\rho c(P) \frac{\partial \theta}{\partial t}(P, t)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} \theta(P, t)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} \theta(P, t))} + \boxed{\frac{f(P)}{V_{\text{source}}} Q_v(t)}$$

Transitoire
Advection
Conduction
Source interne

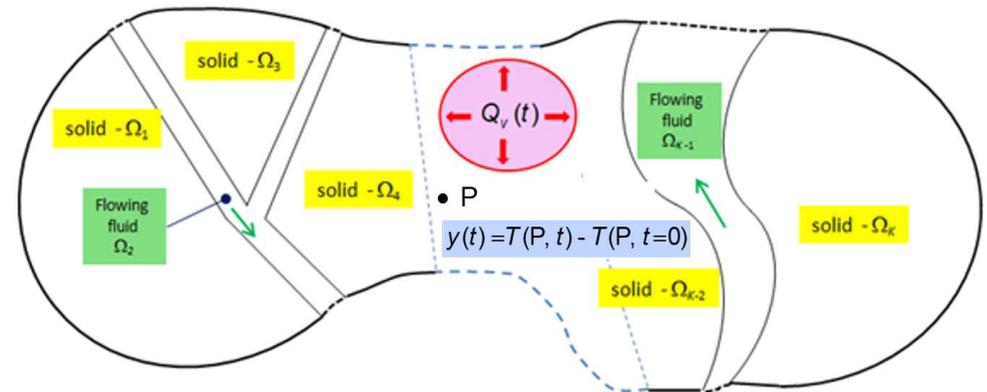
Élévation température en point P **quelconque** :

$$\theta(P, t) = T(P, t) - T_{\text{init}}(P)$$

Sa transformée de Laplace :

$$\bar{\theta}(P, p) = \int_0^\infty \exp(-pt) \theta(P, t) dt$$

 paramètre de Laplace



Conséquence : Equation de la chaleur dans le domaine de Laplace¹ (**disparition de la dérivée temporelle**)

$$\boxed{\rho c(P) p \bar{\theta}(P, p)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} \bar{\theta}(P, p)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} \bar{\theta}(P, p))} + \boxed{\frac{f(P)}{V_{\text{source}}} \bar{Q}_v(p)}$$

Transitoire
Advection
Conduction
Source interne

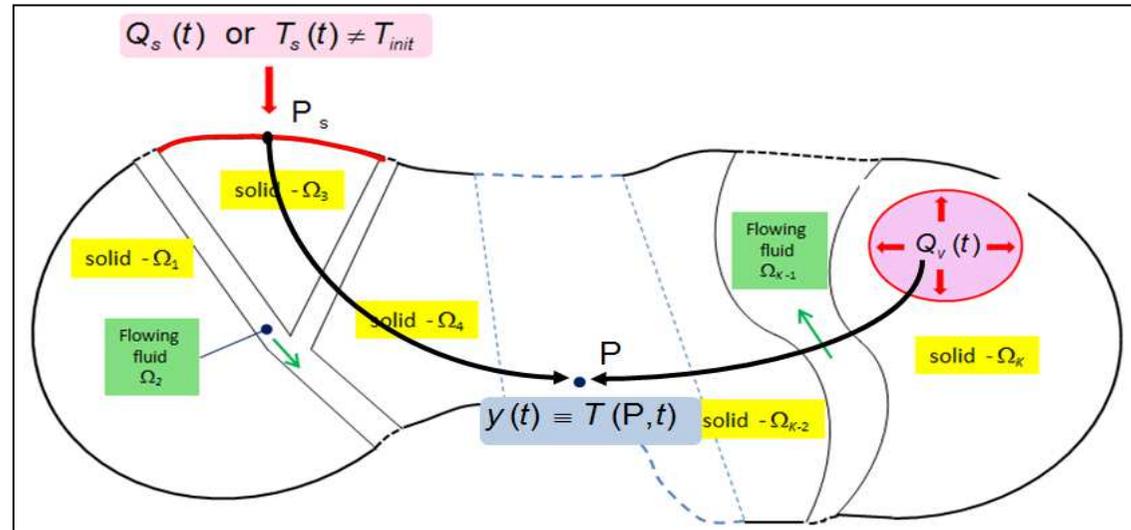
[1] W. Al Hadad, D. Maillet, Y. Jannot, Modeling unsteady diffusive and advective heat transfer for linear dynamical systems: A transfer function approach, International Journal of Heat and Mass Transfer 115 (2017) 304–313. 5

Linear PDE system
with a single excitation $\bar{Q}(p)$

\Rightarrow input : $\bar{u}(p) \equiv \bar{Q}(p)$

Temperature or flux response
at any point P in system

$$\bar{y}(P, p) = \bar{h}(P, p) \bar{u}(p)$$



or convolution product (time domain)

Forced response \leftarrow

$$y(P, t) = h(P, t) * u(t) = \int_0^t h(P, t-t') u(t') dt'$$

excitation \rightarrow

Transient variation of excitation :

$$u(t) = Q_v(t) - Q_v^{init} \text{ or } Q_s(t) - Q_s^{init}$$

$$\text{or } T_s(t) - T_{init}(P_s) \text{ or } T_\infty(t) - T_\infty^{init}$$

$$\text{or } T_b^{in}(t) - T_b^{in,init}$$

Impulse response

$$h(P, t)$$

« init » = initial steady state

Transient variation of temperature at point P

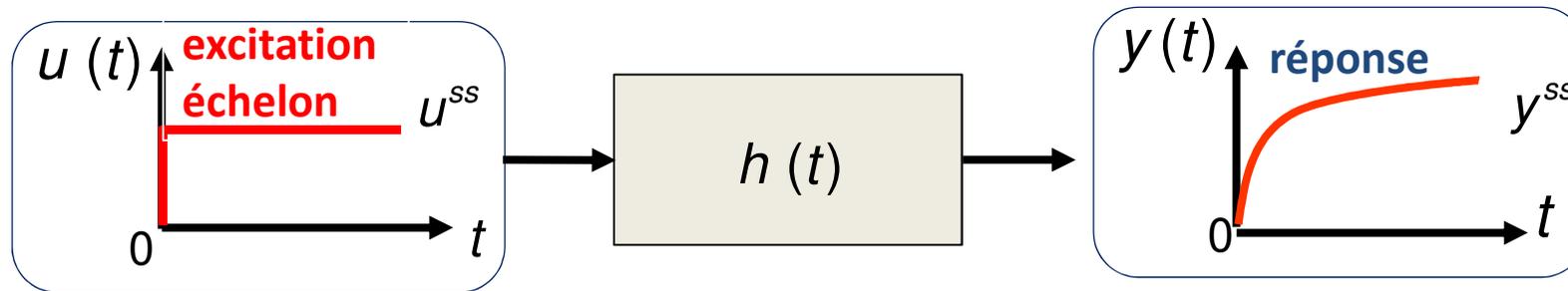
$$y(t) = T(P, t) - T_{init}(P)$$

or variation of local heat flux $\phi_x(P, t)$
in any direction x

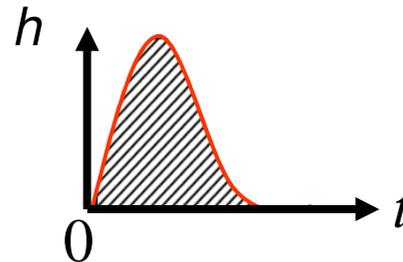
Excitation u	Response y	Transfer function H
Power source Q (watts)	Temperature difference θ (kelvins)	Impedance Z ($K.J^{-1}$)
Temperature difference θ (kelvins)	Temperature difference θ (kelvins)	Transmittance W (s^{-1})
Power source Q (watts)	Rate of heat flow Φ (watts)	Transmittance W (s^{-1})
Temperature difference θ (kelvins)	Rate of heat flow Φ (watts)	Admittance Y ($W.K^{-1}.s^{-1}$)

1.2. Fonctions de transfert en permanent et résistances généralisées

$$y(P, t) = h(P, t) * u(t) = \int_0^t h(P, t-t') u(t') dt'$$



Version permanente (ss)
d'une fonction de transfert



$$h^{ss} = \int_0^{\infty} h(t) dt$$

dispersion
transitoire

$$y^{ss} = h^{ss} u^{ss}$$

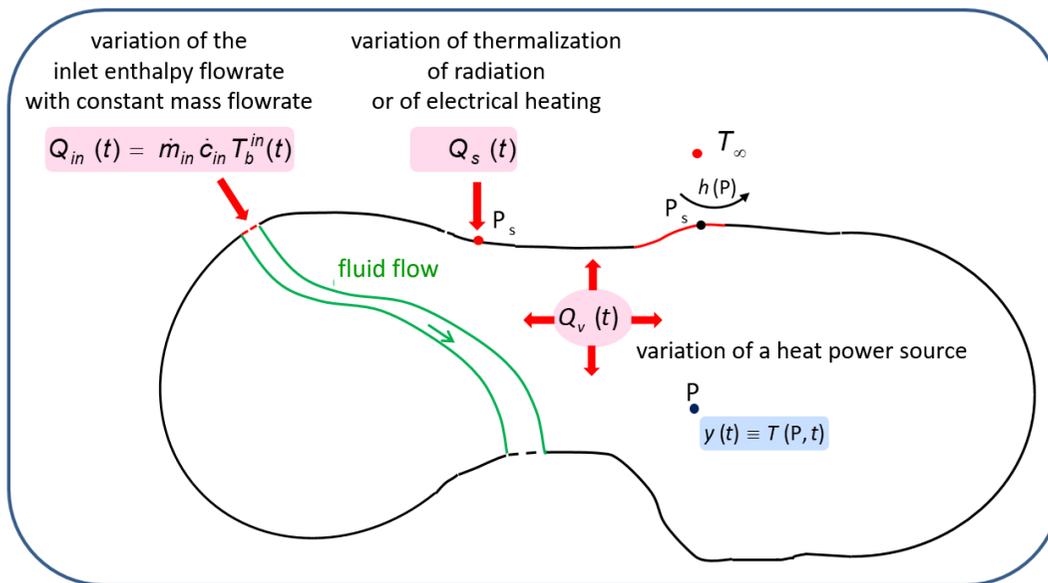
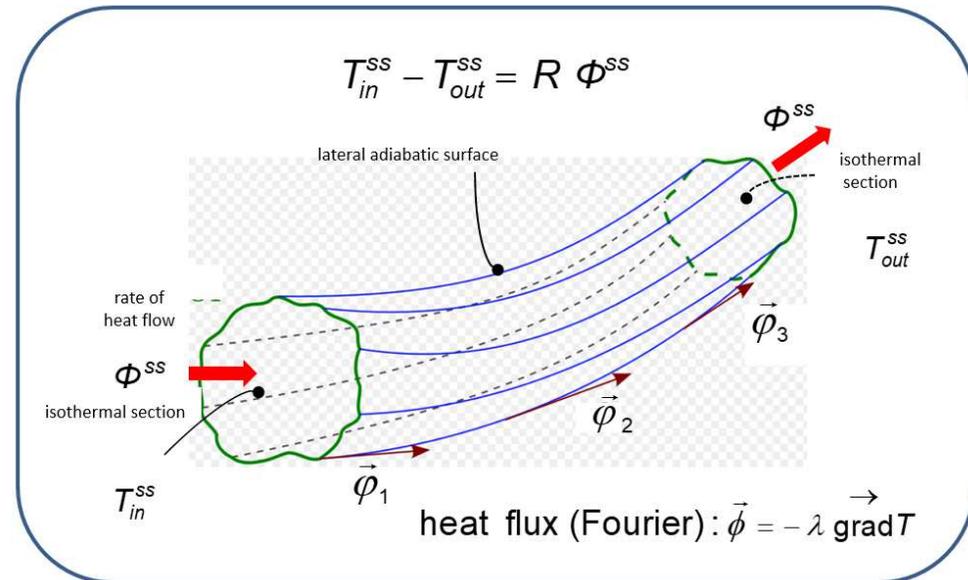
valeurs
asymptotiques

Définition traditionnelle d'une résistance thermique en régime permanent

Hypothèses :

un tube de flux existe entre 2 surface isothermes

Φ^{SS} : flux de chaleur en permanent



Résistance généralisée entre 2 régimes permanents: pas de tube de flux, pas de surface isotherme

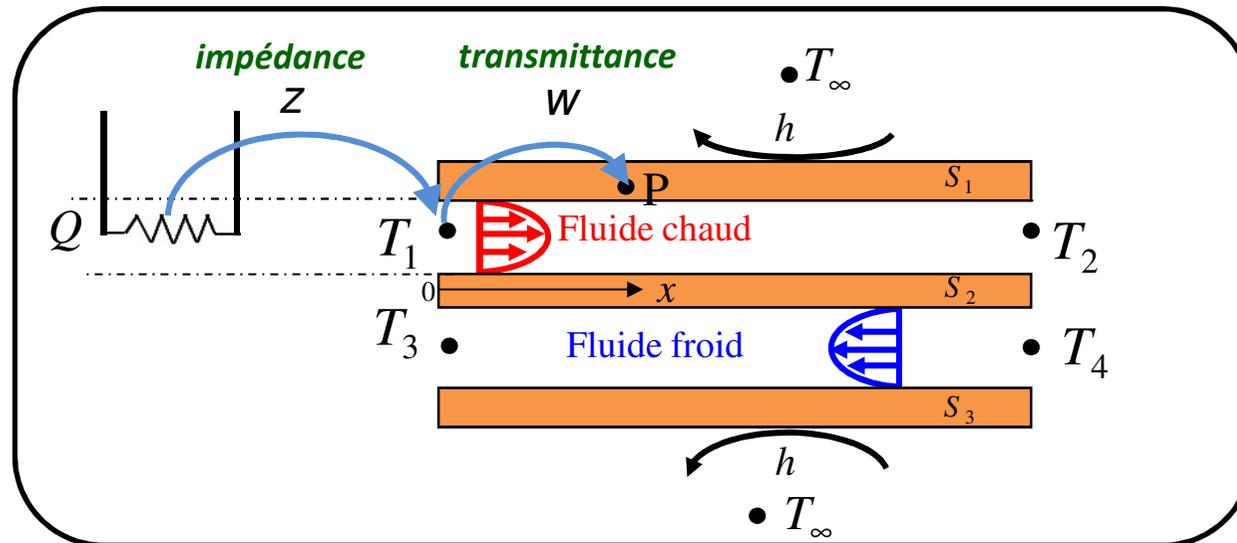
Q^{SS} : source en permanent (= cause)

$$T_2^{SS} - T_1^{SS} = Z^{SS} (Q_2^{SS} - Q_1^{SS})$$

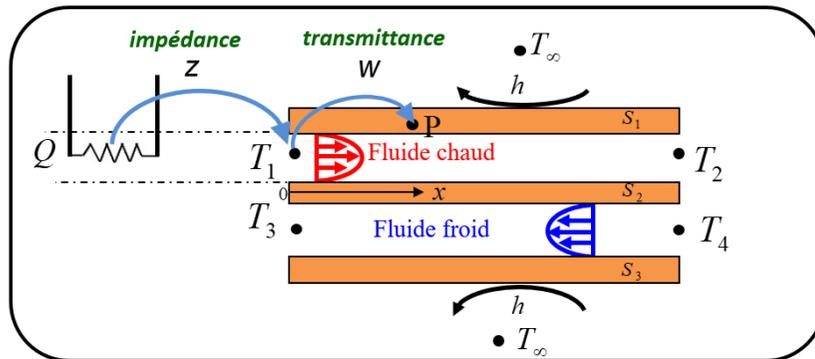
variation d'une puissance thermique (watts) (conversion **thermodynamique en chaleur sensible** à partir d'une **énergie différente**) pour passer d'une **température initiale locale** à sa **valeur finale**, ces 2 températures correspondant à des régimes permanents

2 - Identification des réponses impulsionnelles d'un échangeur à plaque propre et de son efficacité en régime permanent

Principe de la méthode: Perturbation de la température en entrée d'un fluide à débits fixés



- Echangeur de chaleur à 2 fluides (débits constants, laminaire ou turbulent) en régime thermique permanent)
- Pertes thermiques vers l'extérieur
- Perturbation thermique : source instationnaire de puissance $Q(t)$ en amont (watts), activée à $t = 0$



Propriété générale des systèmes linéaires invariants en temps:

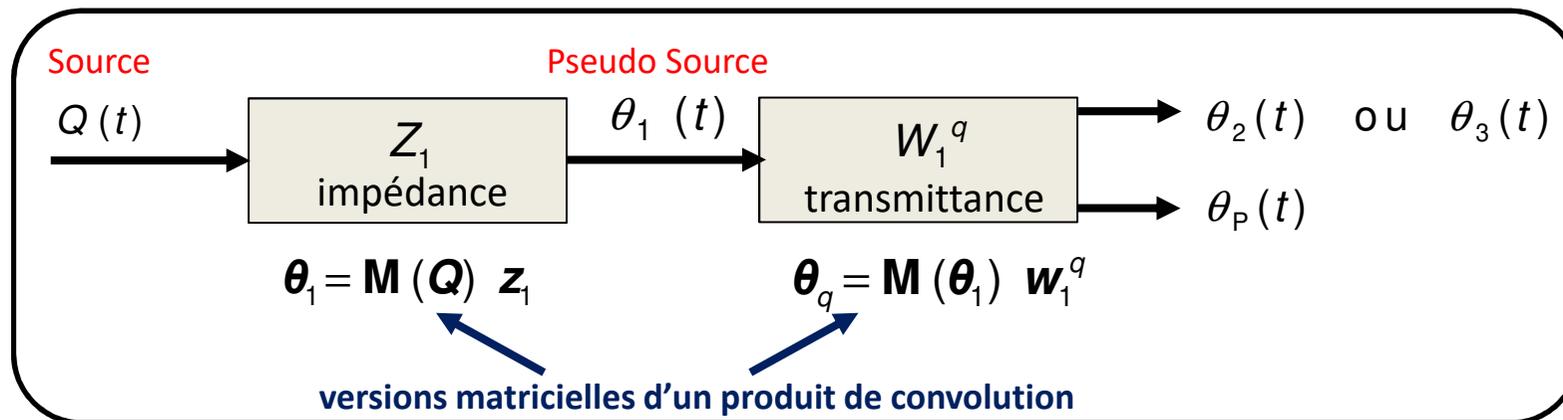
Réponse en température en tout point \$q\$ de l'échangeur à une perturbation (/régime permanent)

$$\theta_q(t) = T_q(t) - T_q(t=0)$$

= **produit de convolution** entre:

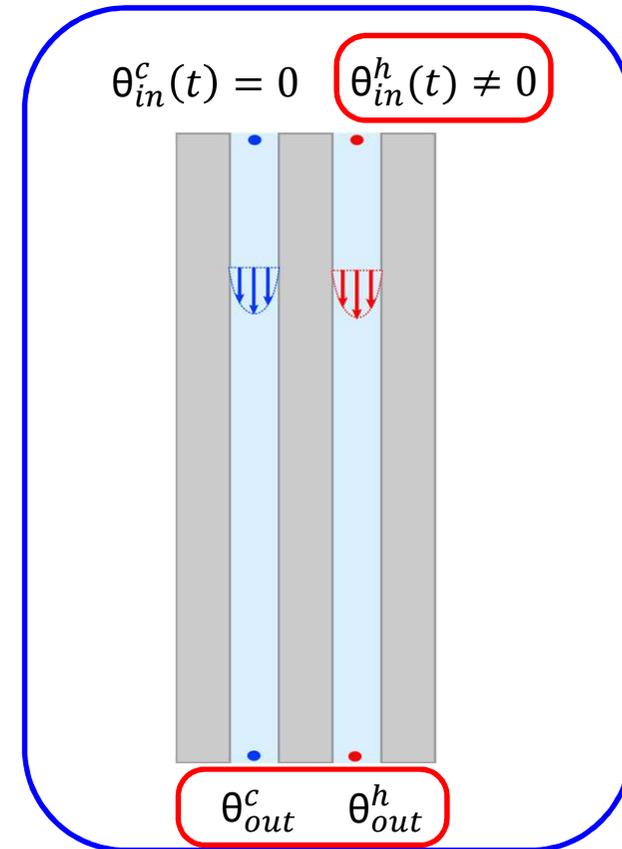
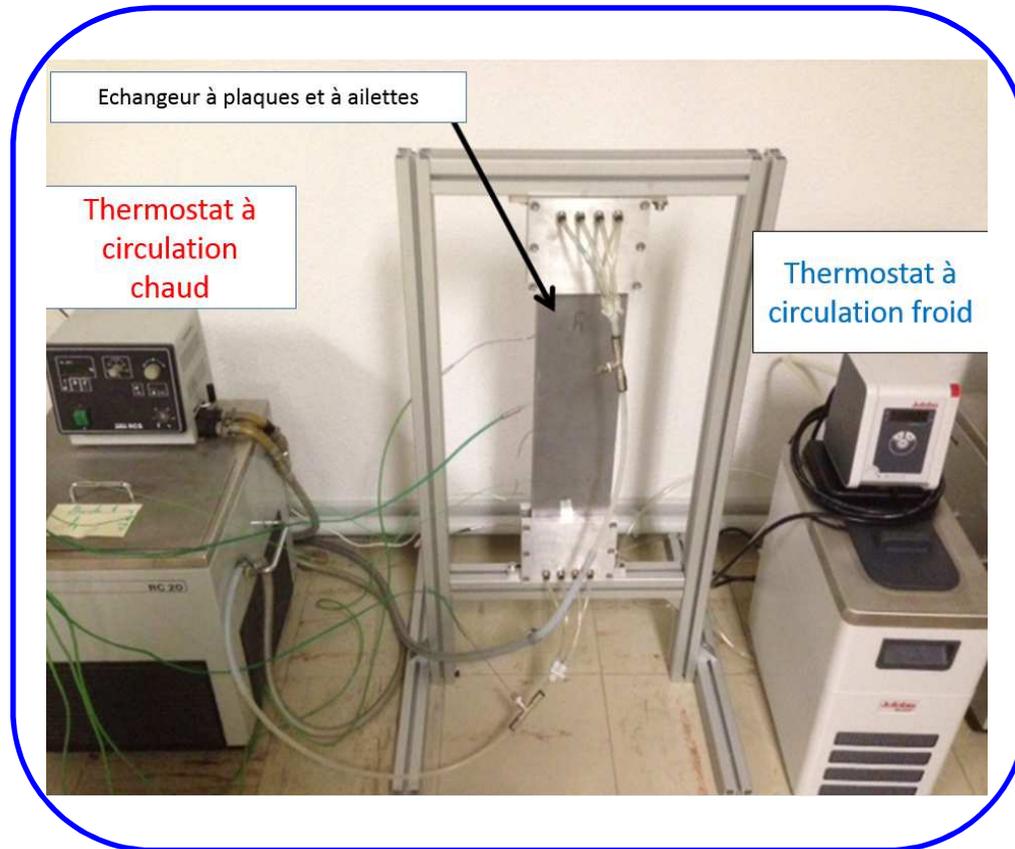
- la perturbation \$Q(t)\$ (en **watts**) et une réponse impulsionnelle (**impédance \$Z\$**)

- la perturbation \$\theta_1(t)\$ (en **kelvins**) et une réponse impulsionnelle (**transmittance \$W\$**)

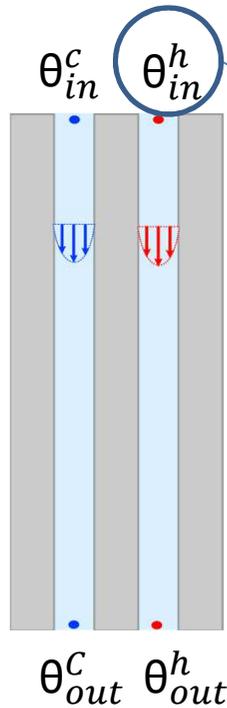


$$\mathbf{M}(z) \equiv \Delta t (\mathbf{N}(f))^2 \mathbf{N}(z) \quad \text{with } f = \frac{1}{2} [1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Montage expérimental (identification de système pour échangeur propre, en co-courant)



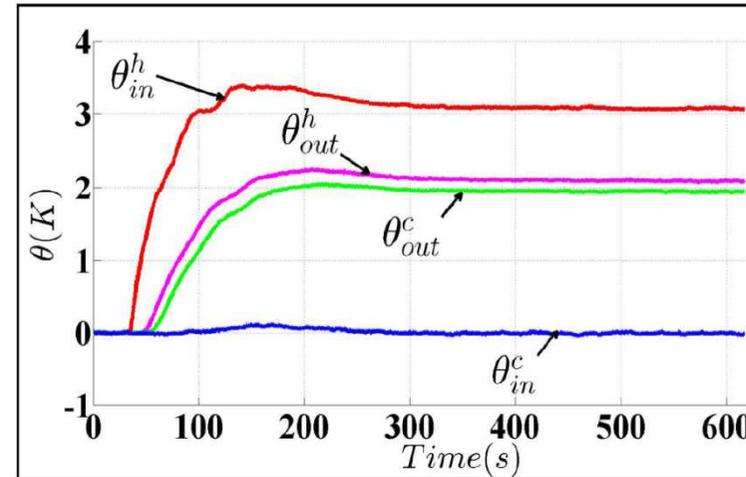
Fluides = eau



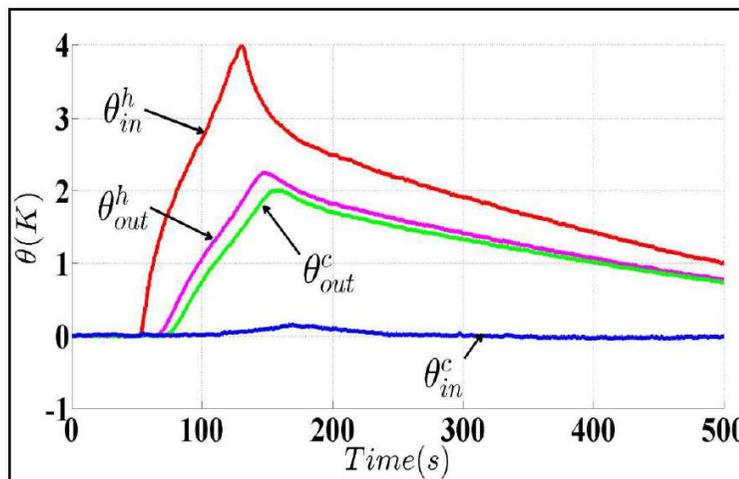
Commande manuelle
via changement
température consigne
thermostat
à circulation
(débits inchangés)

$$\dot{m}_h = 1,73 \text{ kg}\cdot\text{min}^{-1}$$

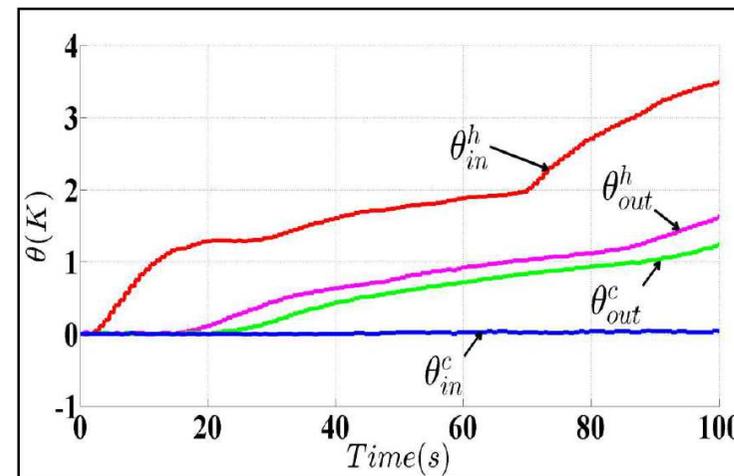
$$\dot{m}_c = 0,95 \text{ kg}\cdot\text{min}^{-1}$$



Thermogrammes entrées et sorties : *Expérience 1*

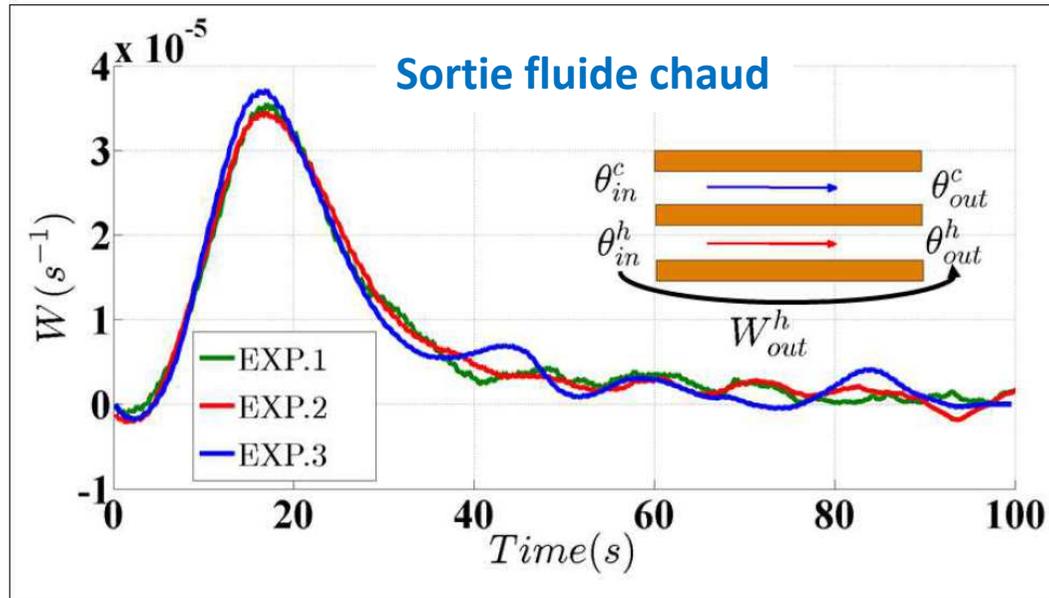


Thermogrammes entrées et sorties : *Expérience 2*



Thermogrammes entrées et sorties : *Expérience 3*

Réponses impulsionnelles (transmittances) identifiées²



$$\theta_{out}^h = \mathbf{M}(\theta_{out}^h) w_{out}^h$$

Transmittance sortie chaude

Inversion régularisée de la matrice $\mathbf{M}(\cdot)$:

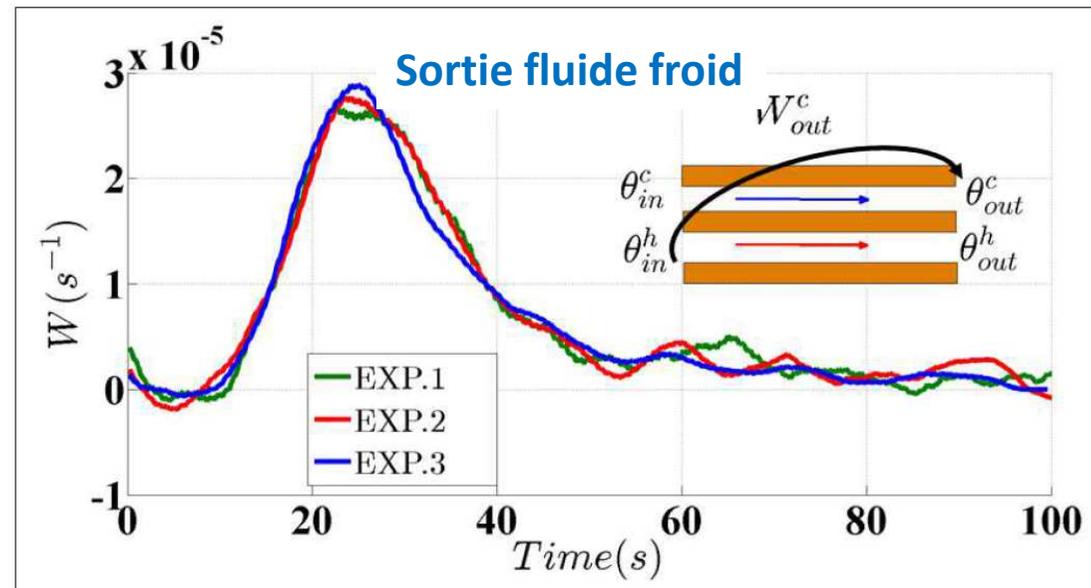
$$w_{out,identifiée}^h = \left(\mathbf{M}(\theta_{in,mesurée}^h) \right)^{-1} \theta_{out,mesurée}^h$$

$$\theta_{out}^c = \mathbf{M}(\theta_{out}^c) w_{out}^c$$

Transmittance sortie froide

Conclusion (validation): au bruit près, et aux erreurs d'inversion près,

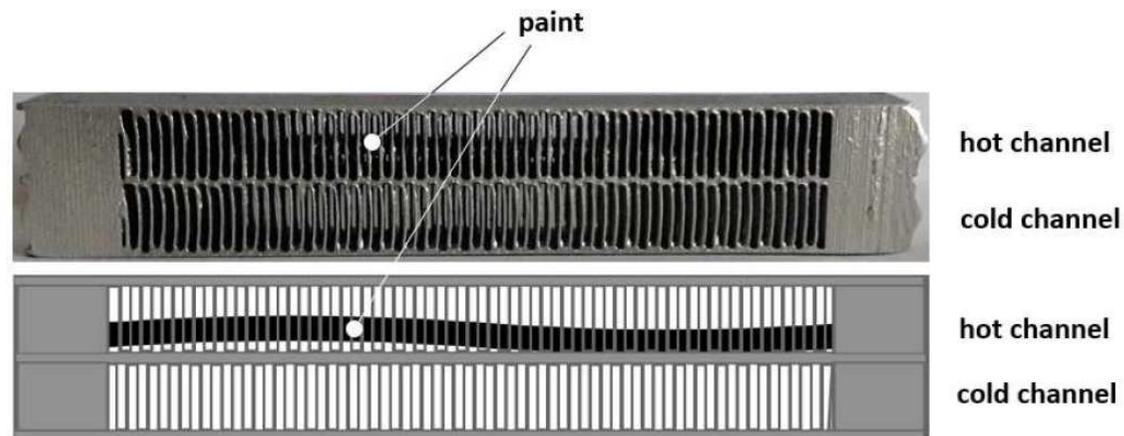
les transmittances identifiées sont **indépendantes** de la forme temporelle de l'excitation (**température entrée chaude**)



[2] W. Al Hadad, Y. Jannot, V. Schick, B. Rémy, D. Maillet, Transient characterization of a heat exchanger through identification of its transfer functions, Paper IHTC16-21381, Proceedings of the International Heat Transfer Conference (IHTC-16), Beijing, August 10-15, 2018.

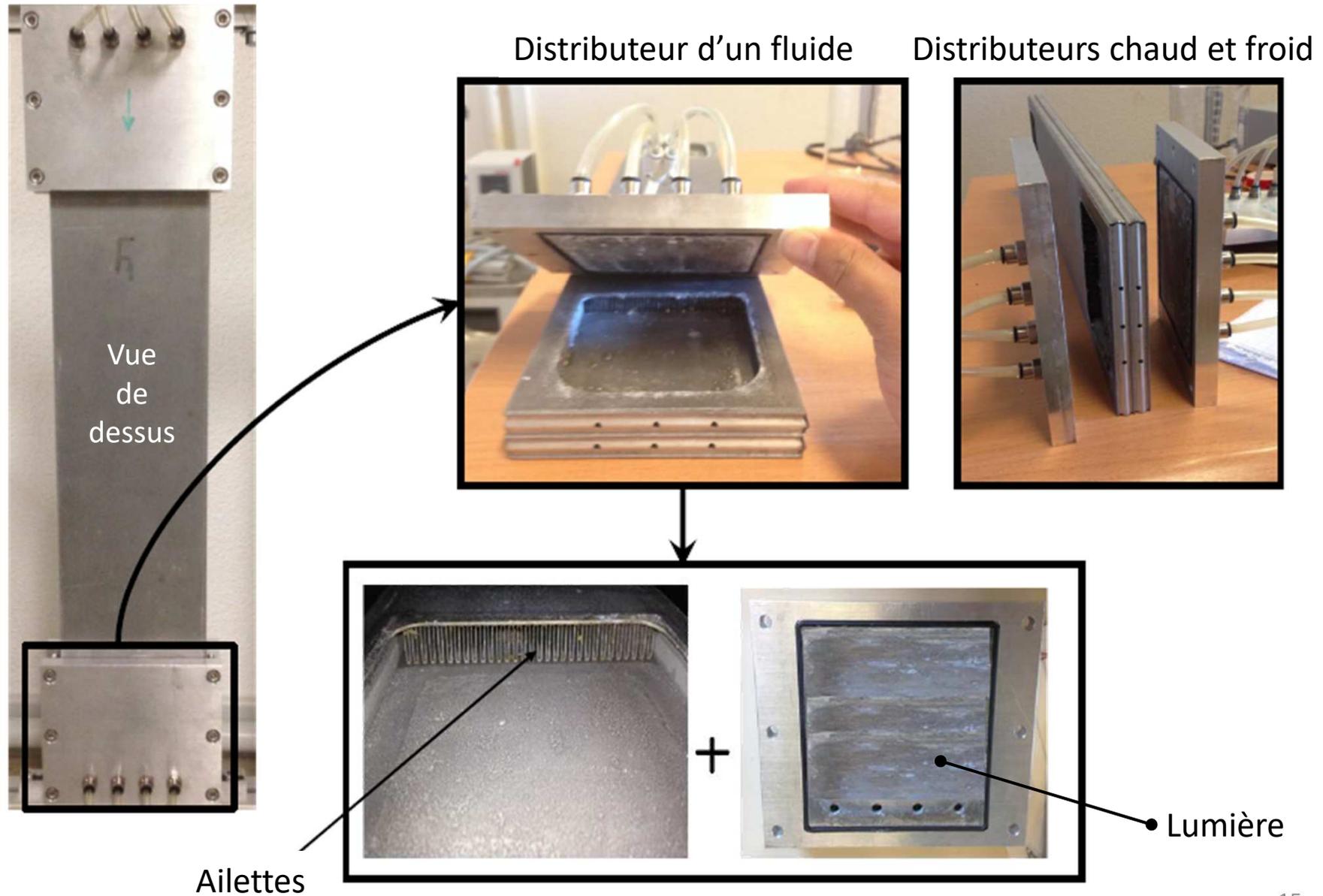
3. Application expérimentale à la quantification de l'encrassement

Encrassement synthétique: mise en peinture de l'intérieur de l'échangeur à plaque et ailettes



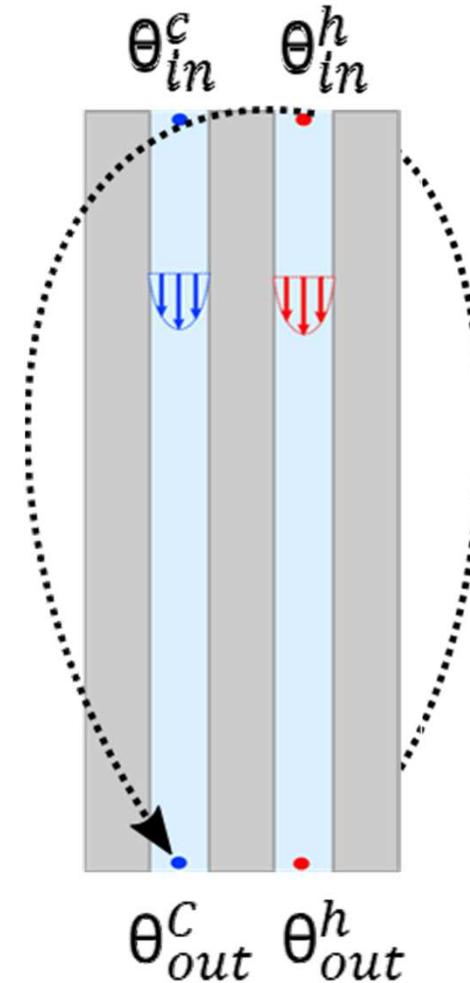
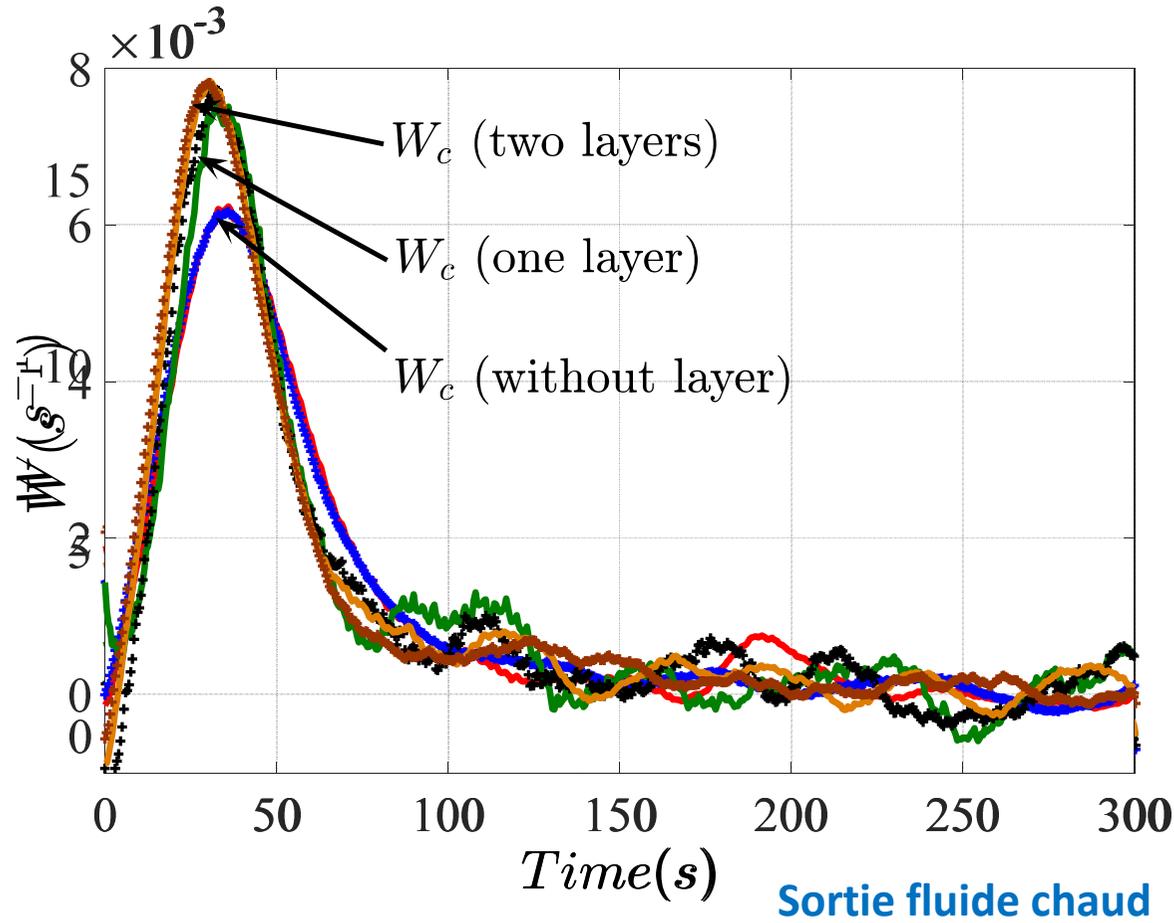
- ⇒ Changement de structure du système (n'est plus linéaire à **coefficients invariants en temps**)
- ⇒ Changement des 2 transmittances
- ⇒ Détection de l'encrassement

Réalisation pratique de la mise en peinture



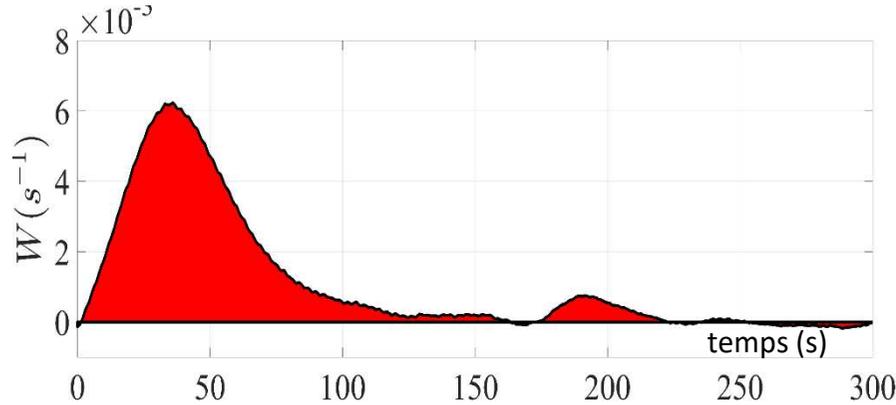
6 expériences de calibration avec 0, 1 ou 2 couches de peinture
 et avec à chaque fois 2 excitations différentes

Transmittances identifiées



Efficacité et transmittances en sortie

Calcul de l'efficacité en régime permanent (ss = steady state) par intégration temporelle des transmittances



transmittance en permanent :

$$W_{\alpha}^{ss} \equiv \frac{1}{t_{final}} \int_0^{t_{final}} W_{\alpha}(t) dt$$

pour $\alpha = c$ ou h

efficacité :

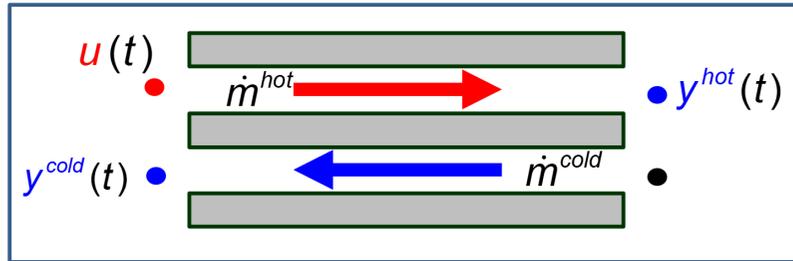
$$\eta_{\alpha} = \frac{(\dot{m}c)_c |\theta_{out}^{ss,\alpha} - \theta_{in}^{ss,\alpha}|}{(\dot{m}c)_{min} (\theta_{in}^{ss,h} - \theta_{in}^{ss,c})}$$

Efficacités η_2 déduites de l'intégration de la transmittance froide w_c

		Débit froid inchangé			
		Débit chaud doublé		Débit chaud doublé	
Perturbation		$\dot{m}_h = \dot{m}_c / 2 = 1 \text{ kg / mn}$	$\dot{m}_h = \dot{m}_c = 2 \text{ kg / mn}$	$\dot{m}_h = \dot{m}_c = 2 \text{ kg / mn}$	$\dot{m}_h = \dot{m}_c = 2 \text{ kg / mn}$
		$\eta_h = (1 - W_h^{ss})$	$\eta_c = 2W_c^{ss}$	$\eta_h = (1 - W_h^{ss})$	$\eta_c = W_c^{ss}$
without fouling	1	0.66	0.62	0.48	0.44
	2	0.65	0.62	0.47	0.45
with fouling (one layer)	1	0.66	0.62	0.48	0.45
	2	0.65	0.62	0.48	0.45
with fouling (two layers)	1	0.65	0.58	0.47	0.41
	2	0.64	0.58	0.46	0.41

- Conclusions**
- efficacités côté chaud et côté froid **différentes (transfert de chaleur conjugué pris en compte)**: $\eta_h > \eta_c$
 - effet de présence de la **monocouche** de peinture **indiscernable** sur l'efficacité
 - présence de **2 couches détectée et quantifiées** par la baisse d'efficacité
 - limitations: la méthode ne permet pas de différencier les variations de débit d'un possible encrassement

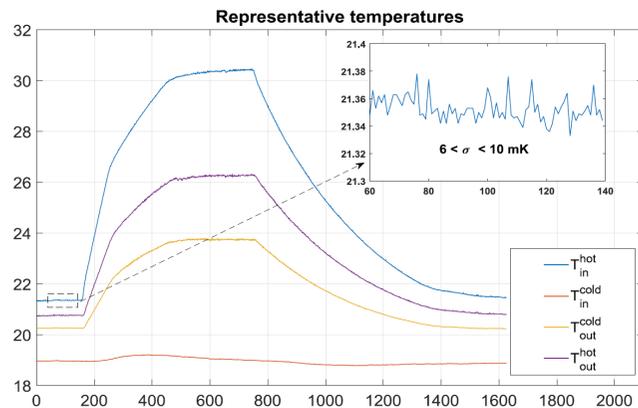
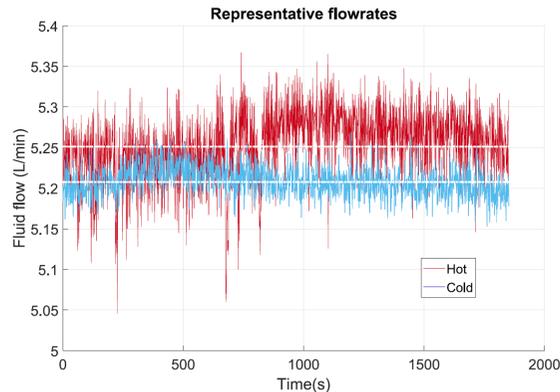
4. Echangeur à plaques et ailettes (contre-courant) : identification avec modèle ARX³



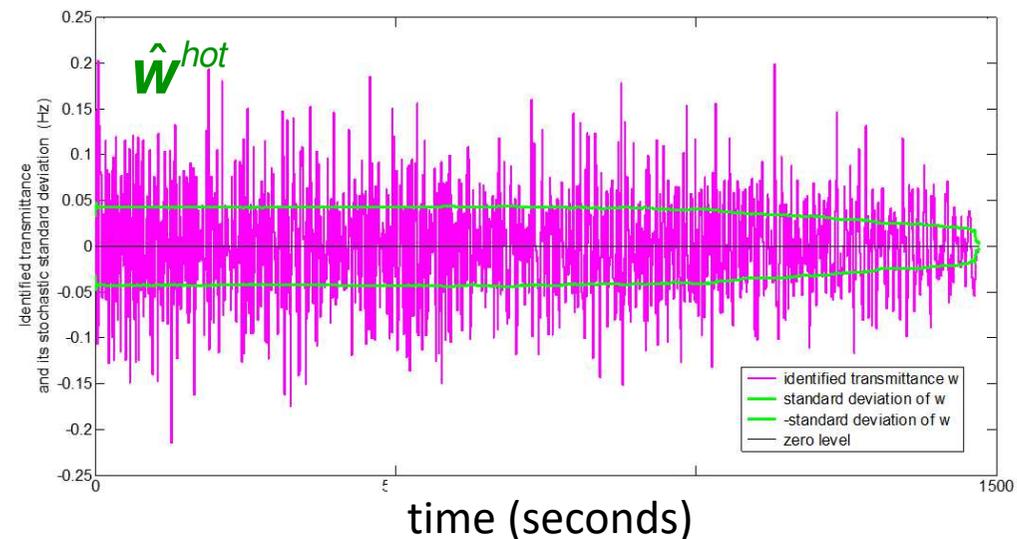
$$u(t) = T_{in}^{hot}(t) - T_{in}^{hot}(t=0) ; y^{hot}(t) = T_{out}^{hot}(t) - T_{out}^{hot}(t=0)$$

$$T_{in}^{cold}(t) = T_{in}^{cold}(t=0) ; y^{cold}(t) = T_{out}^{cold}(t) - T_{out}^{cold}(t=0)$$

$$y^{hot} = \mathbf{M}(u) w^{hot} ; y^{cold} = \mathbf{M}(u) w^{cold}$$



Régularisation TSVD inefficace: $m = 1471$ temps
924 valeurs singulières conservées pour $\mathbf{M}(y^{hot})$



[3] D. Maillet, C. Zacharie, B. Rémy,, Reduced ARX models and convolution product for heat transfer in times invariant systems (in French), *Proceedings of Congrès Français de Thermique 2021*, <https://doi.org/10.25855/SFT2021-049>

➤ Estimation d'une réponse impulsionnelle: PB inverse mal-posé du fait du bruit de mesure

➤ (biais sur maximum et oscillations)

$$\theta_{out}^{h,exact} = \mathbf{M}(\theta_{in}^{h,exact}) \mathbf{w}_{out}^{h,exact} \Rightarrow \hat{\mathbf{w}}_{out}^h = \left(\mathbf{M}(\theta_{in}^h) \right)^{-1} \theta_{out}^h$$

sortie y
entrée u
réponse impuls. h
estimation
bruit

➤ Alternative: remplacer $h(t)$ (rép. impuls.) par 2 jeux de coefficients, les a_i et les b_j avec éventuel retard τ (modèle **ARX** = **A**uto **R**egressive model with **eX**ternal input)

$$y_k = - \underbrace{\sum_{i=1}^{na} a_i y_{k-i}}_{\text{autoregressive terms}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{nb-1} b_j u_{k-j-nk}}_{\text{external input terms}} + \underbrace{e_k}_{\text{equation error}}$$

m : nombre de temps de mesure
 $na \leq m$; $nb \leq m$; $n = na + nb \leq m$

$$t_k = k \Delta t ; y_k = y(t_k) ; u_k = u(t_k) ; \tau = n_k \Delta t$$

➤ Liens forts avec modèle convolutif⁴

- cas d'une transmittance:

$$w^{ss} = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} b_j}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i} = \frac{\sum_{k=1}^m y_k}{\sum_{k=1}^m u_k}$$

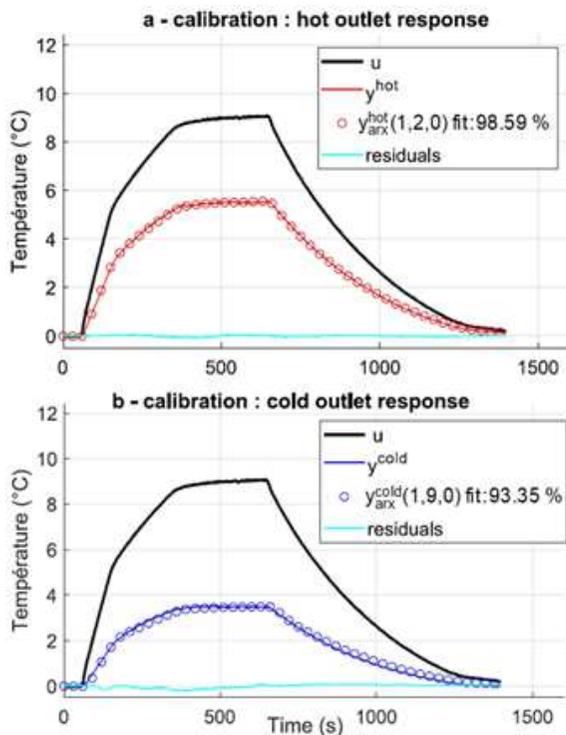
[4] D.Maillet, C. Zacharie, B. Rémy, Identification of an impulse response through a model of ARXstructure, Proceedings of the Intern. Conference of Inverse Problems in Engineering 2022 – To be published in Journal of Physics: Conference Series

- Identification des a et des b 's: expérience de calibration
- choix des na , nb and nk – Ici: balayage 2D des couples (na, nb) avec $nk = 0$ et $b_0 = 0$, pour $na + nb = 10$
- problème d'estimation linéaires ⁵ (moindres carrés): résidus faibles (% of fit) et stables mais solution non-unique

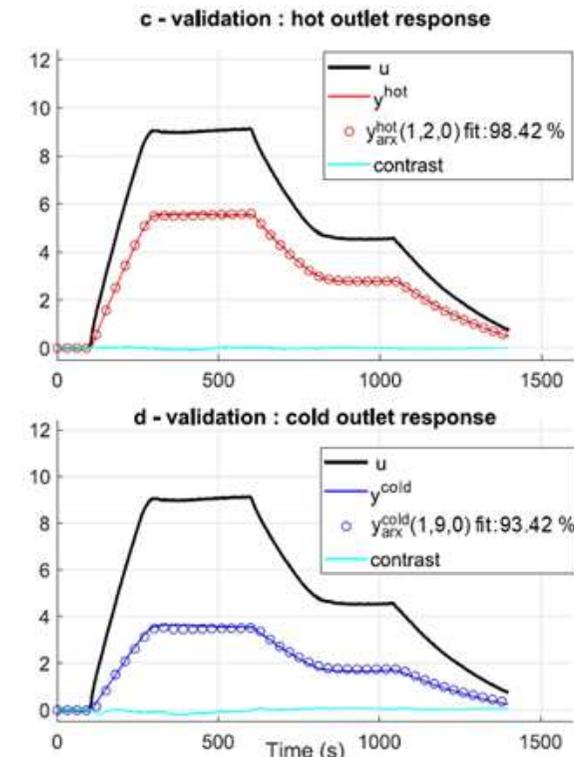
	a_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
Hot output model ARX (1,2,0)	-0.8956	0.1049	-0.0409	0	0	0	0	0	0	0
Cold output Model ARX (1,9,0)	-0.9716	0.0402	0.0029	0.0011	0.0426	-0,0880	0.0001	0.0551	0.0600	-0,1031

- besoin d'une expérience de validation : faible contraste/modèle identifié au départ

CALIBRATION EXPERIMENT



VALIDATION EXPERIMENT



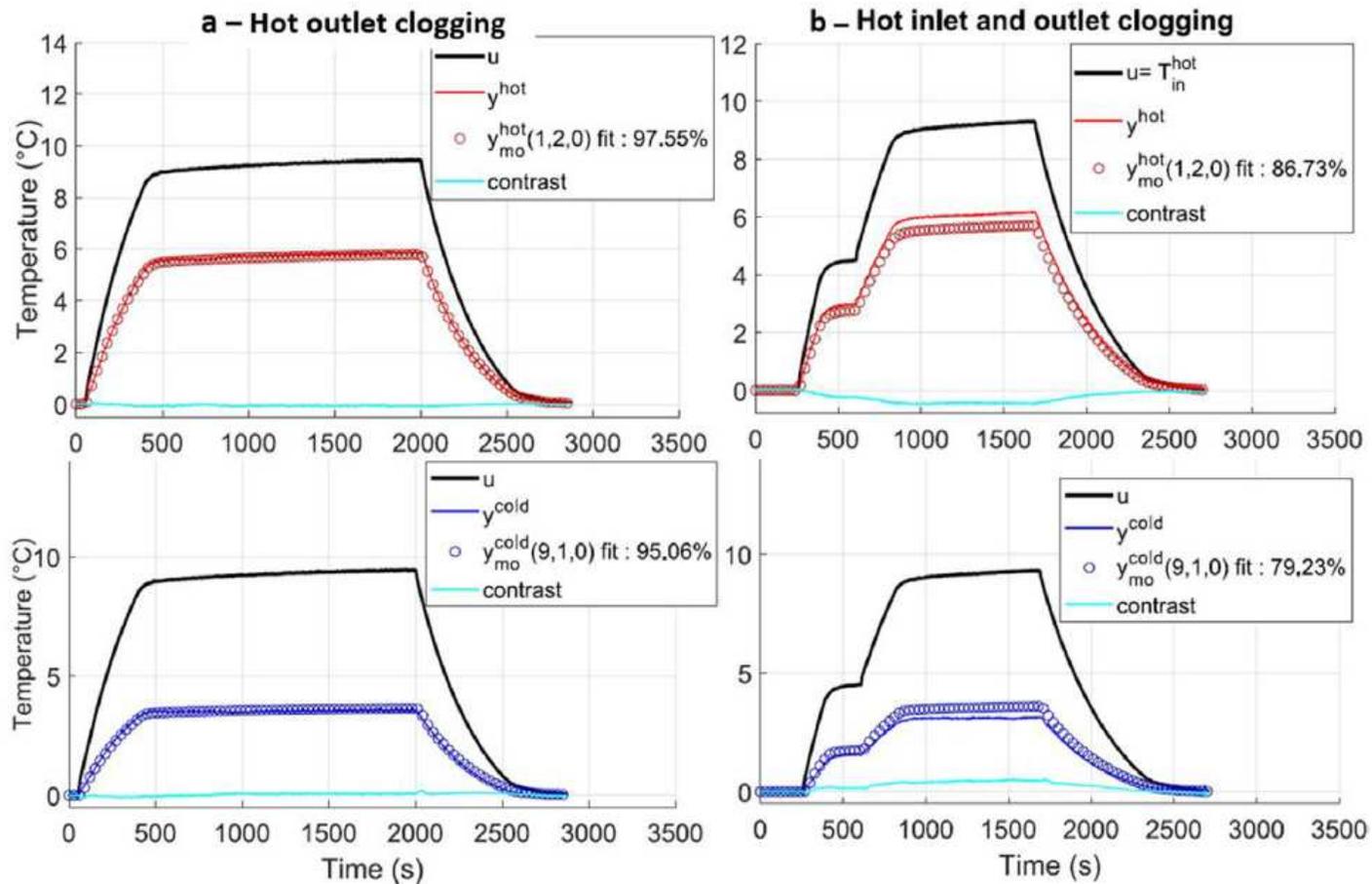
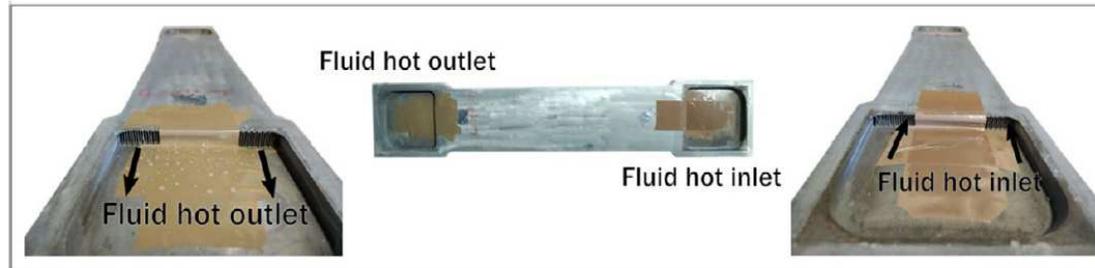
Le jeu de paramètres a et b estimés peut être « exporté » pour expliquer la sortie d'une autre expérience avec une autre entrée



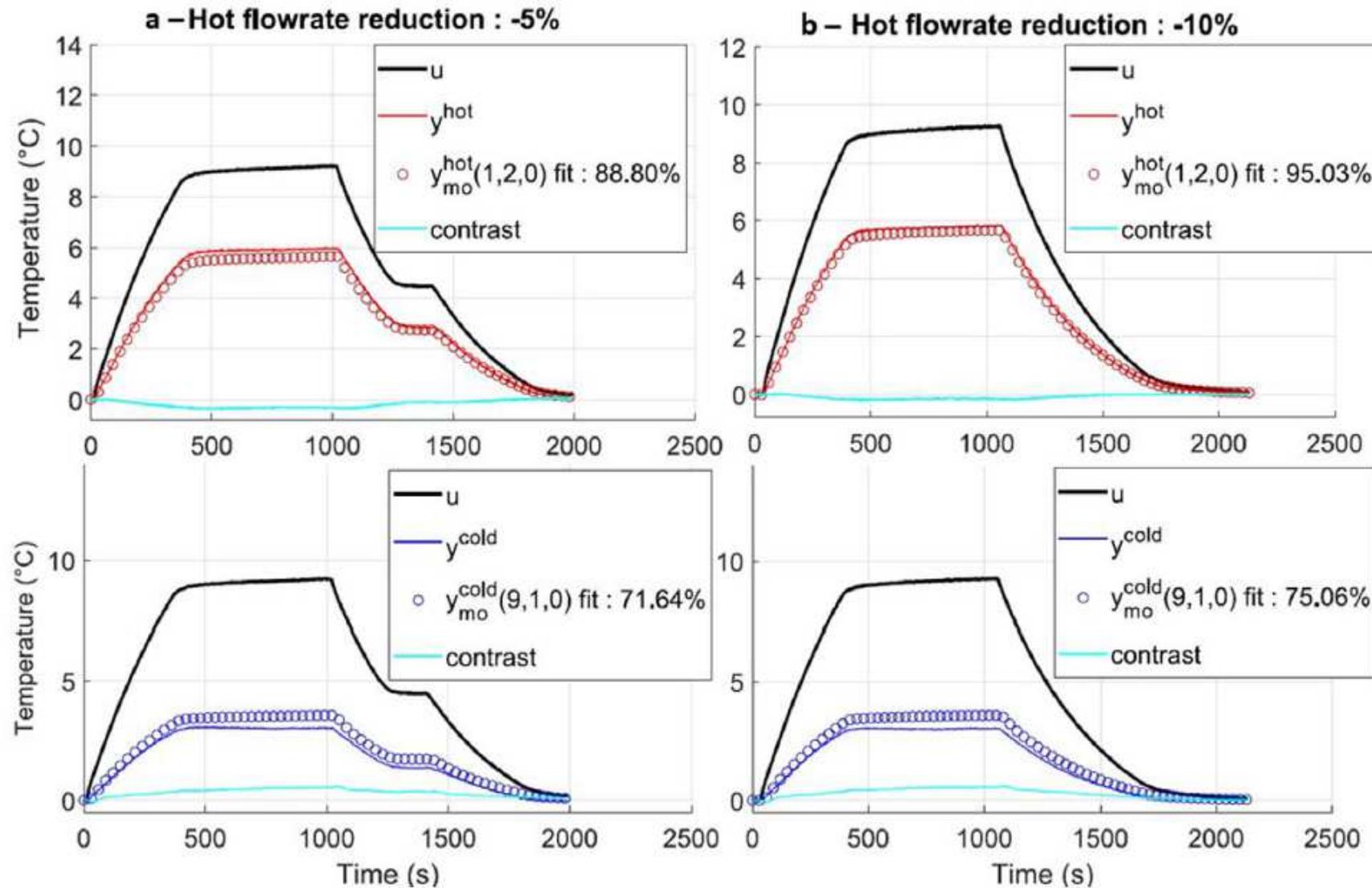
MAIS ce jeu n'est pas unique

[5] B. Rémy, D. Maillet, B. Sahnoun, Identification of Transfer Functions and of Boundary conditions, Tutorial TFB, METTI7 Advanced School, Thermal Measurements and Inverse Techniques, SFT, Porquerolles, Sept. 29-Oct.4, 2019.

Application 1: effet de la maldistribution (bouchage partiel)

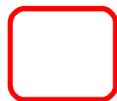


Application 2: étude d'une baisse du débit chaud



Exploitation quantitative: effet de l'encrassement/réduction d'un débit sur les efficacités

	Hot circuit			Cold circuit			Heat losses η_{losses}
	fit_{hot} (%)	transmittance w_{hot}^{SS} *	Effectiveness η_{hot}	fit_{cold} (%)	transmittance w_{cold}^{SS} *	effectiveness η_{cold}	
Calibration	98.59	0.613	0.387	93.35	0.384	0.384	0.003
Validation	98.42	0.613	0.387	93.42	0.380	0.380	0.007
Hot inlet clogging	97.55	0.616	0.384	95.06	0.379	0.379	0.005
Hot inlet and outlet clogging	86.73	0.660	0.340	79.23	0.318	0.318	0.022
Hot flowrate reduction: -5%	88.8	0.670	0.330	71.64	0.322	0.339	0.008
Hot flowrate reduction: -10%	95.03	0.640	0.360	75.06	0.341	0.379	0.019



= références



= impact sensible

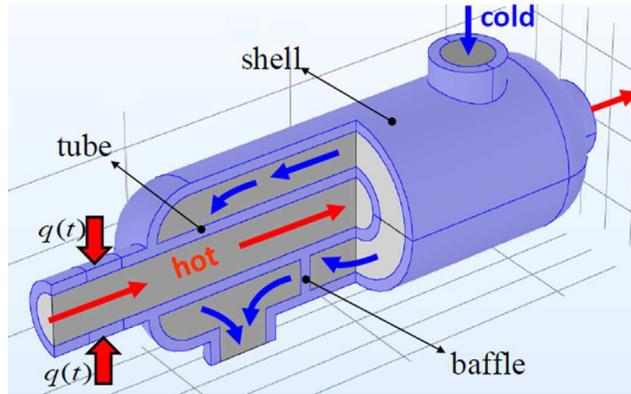
5. Conclusions et perspectives

- ❑ Méthode de **caractérisation thermique** du fonctionnement d'un échangeur en termes de transmittances:
 - **robuste**: les transmittances sont indépendantes de l'excitation en température d'entrée
 - peut s'appliquer "**en ligne**" :
 - les **transmittances temporelles** permettent d'accéder rapidement aux **efficacités** (régime permanent)
- ❑ Les perturbations en température peuvent être suffisamment faibles (**quelques K**)
 - le système reste convolutif car **thermodépendance de la viscosité négligeable** (hypothèse de système linéaire à coefficients invariants en temps)
- ❑ Le modèle convolutif ne repose sur aucune hypothèse de densité de flux pariétal perpendiculaire à la paroi: les effets **de transferts conjugués fluide/paroi** sont implicitement pris en compte
 - intérêt pour les **échangeurs courts** et pour les **mini** et **micro échangeurs**
- ❑ La présence d'un **encrassement** suffisamment important est **déTECTABLE** et **quantifiable** par une variation d'efficacité déduite d'une variation de transmittance (suivi en ligne).
- ❑ Le modèle ARX permettent une alternative au modèle convolutif lorsque la calibration de ce dernier est impossible. Travail en cours sur estimation de réponse impulsionnelle par **déconvolution non isochrone**.

Merci pour votre attention !

Model reduction (no noise, no measurement) ⁶

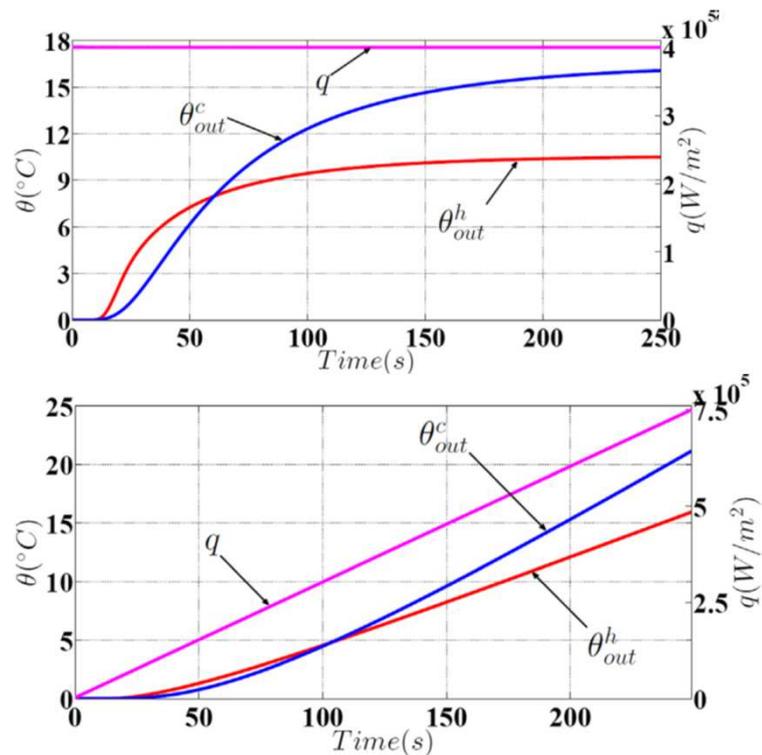
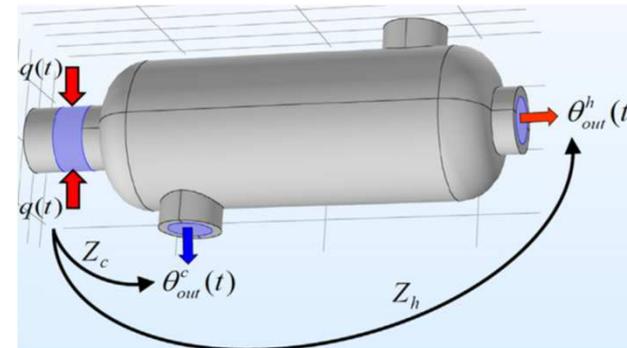
Shell & Tube HX- SIMO case



Detailed model (Comsol)

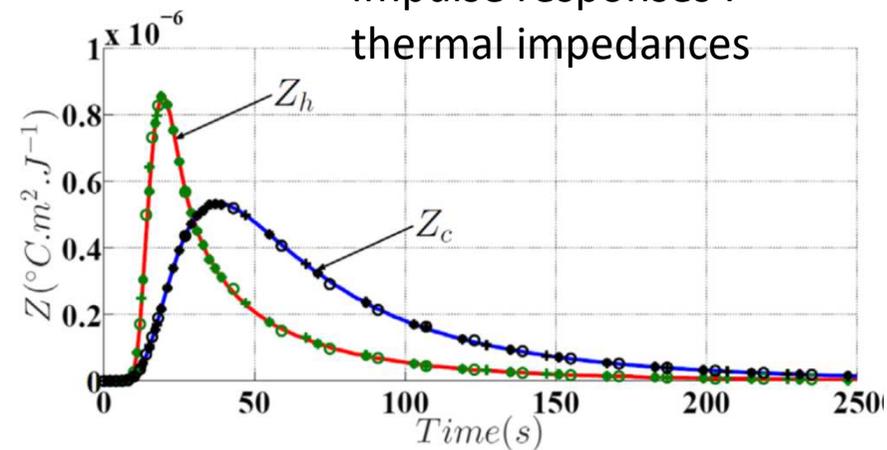
Navier Stokes+ $k - \epsilon$ turbulence model

Heat equation in fluid and solid (conjugate HT)



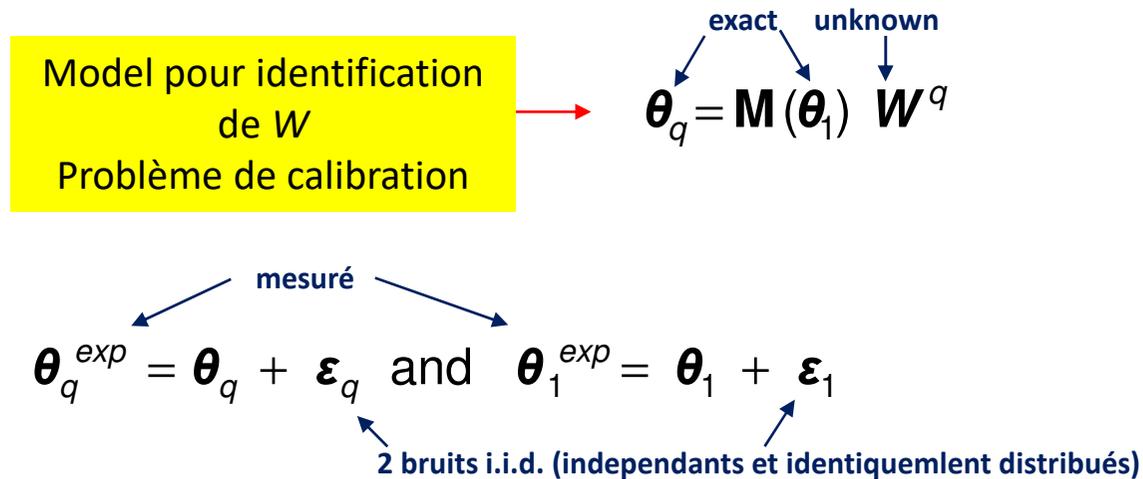
Reduced model : convolution

Impulse responses :
thermal impedances



[6] W. Al Hadad, V. Schick, D. Maillet, Fouling detection in a shell and tube heat exchanger using variation of its thermal impulse responses: Methodological approach and numerical verification, *Applied Thermal Engineering*, Volume 155 (2019) 612–619.

Estimation de fonction de transfert: réduction de modèle ou **identification (mesures)**



- Moindres carrés ordinaires (linéaires) : $\hat{W}^q = \left(\mathbf{M}(\theta_1^{exp}) \right)^{-1} \theta_q^{exp}$

Problème inverse « mal-posé »:
Inversion nécessite une **regularisation**
Ici: SVD tronquée ou Tikhonov d'ordre 0

- avec le principe de non-contradiction (discrepancy principle, Morozov)

Model for W identification calibration problem:

$$\theta_q = \mathbf{M}(\theta_1) \mathbf{W}^q$$

exact unknown

$$\theta_q^{exp} = \theta_q + \epsilon_q \quad \text{and} \quad \theta_1^{exp} = \theta_1 + \epsilon_1$$

measured

2 i.i.d. and independent noises

- Ordinary least squares: $\hat{\mathbf{W}}^q = \left(\mathbf{M}(\theta_1^{exp}) \right)^{-1} \theta_q^{exp}$

Ill-posed problem:
Inversion needs **regularization**
Here: Truncated SVD or 0 order Tikhonov

- SVD decomposition of **square** sensitivity matrix:

$$\mathbf{M}(\theta_1^{exp}) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad \text{with} \quad \mathbf{S} = \text{diag}(s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m)$$

singular values

-TSVD: $\hat{\mathbf{W}}_\alpha^q = \mathbf{V} \mathbf{S}_\alpha^{-1} \mathbf{U}^T \theta_q^{exp}$ with $\mathbf{S}_\alpha^{-1} = \text{diag}(1/s_1 \ 1/s_2 \ \dots \ 1/s_\alpha \ 0 \ \dots \ 0)$

- Zero order Tikhonov: $\hat{\mathbf{W}}_\mu^q = \text{Arg} \left(\min_{\mathbf{W}} \left(\underbrace{\| \mathbf{r}(\mathbf{W}) \|_2^2}_{\text{ordinary least squares sum}} + \mu \| \mathbf{W} \|_2^2 \right) \right)$ where $\mathbf{r}(\mathbf{W}) \equiv \theta_q^{exp} - \mathbf{M}(\theta_1^{exp}) \mathbf{W}$
residual vector

or: $\hat{\mathbf{W}}_\mu^q = \mathbf{V} \mathbf{S}_\mu^{-1} \mathbf{U}^T \theta_q^{exp}$ with $\mathbf{S}_\mu^{-1} = \mathbf{F}_\mu \mathbf{S}$ where $\mathbf{F}_\mu = \text{diag} \left(\frac{s_1^2}{\mu^2 + s_1^2} \quad \frac{s_2^2}{\mu^2 + s_2^2} \quad \dots \quad \frac{s_m^2}{\mu^2 + s_m^2} \right)$

- Choice of the hyperparameters $\gamma = \alpha$ or μ by **discrepancy principle** (Morozov) : $\| \mathbf{r}(\hat{\mathbf{W}}_\gamma) \|_2^2 \approx m \sigma^2$

standard deviation of ϵ_q 28

Forme vectorielle /matricielle d'un produit de convolutionZ

Continuous time domain:

$$y(t) = (h * u)(t)$$

$$\mathbf{M}(z) \equiv \Delta t \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 & & & & \\ \tilde{z}_2 & \tilde{z}_1 & & & 0 \\ \tilde{z}_3 & \tilde{z}_2 & \tilde{z}_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{z}_m & \tilde{z}_{m-1} & \tilde{z}_{m-2} & \cdots & \tilde{z}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_m) \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

valeurs instantannées

valeurs moyennées sur chaque intervalle temporel

$$\tilde{z}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} z(t) dt \approx \frac{1}{2} (z(t_{i-1}) + z(t_i))$$

En **maths**, $\mathbf{M}(z)$ est une **matrice de Toeplitz triangulaire inférieure**

En thermique (**physique**) : $z(t) = h(t)$ ou $u(t)$

Réponse impulsionnelle $h(t) \geq 0 \rightarrow$ coefficients de $\mathbf{M}(h)$ sont **non-negatifs**

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}(u) \quad \mathbf{h} = \mathbf{M}(h) \quad \mathbf{u} \quad \text{Commutativité}$$

Cas spécifique (transmittance):

$$h \equiv w, \quad u \equiv \theta_1, \quad y \equiv \theta_2$$

$$\theta_2 = \mathbf{M}(\theta_1) \quad w = \mathbf{M}(w) \theta_1$$

Vector/matrix form of a discrete convolution product

Introduction of a square matrix, function \mathbf{N}
(.) that depends on a column-vector \mathbf{x} :

$\mathbf{N}(\mathbf{x})$ is a **Lower Triangular Toeplitz matrix (LTTM)**
(nice mathematical properties: set of LTTM = commutative ring⁷)

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ x_2 & x_1 & & & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}$$

Continuous time domain:

$$y(t) = (h * u)(t)$$

Laplace domain :

$$\bar{y}(p) = \bar{h}(p) \bar{u}(p)$$



Discrete vector form :

$$\mathbf{y} = \mathbf{N}(\hat{\mathbf{h}}) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{h}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \Delta t \tilde{\mathbf{x}}$$

\mathbf{y} : vector of **instant values** of output $y_k = y(t_k)$