

# Détermination d'un mur 1D équivalent à une structure 2D/3D : nouvelle fonction objectif, impact du flux solaire et des phénomènes surfaciques.

Julien QUINTEN<sup>1\*</sup>, Véronique FELDHEIM<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UMONS – Faculté Polytechnique – Service de Thermique et Combustion  
Rue de l'Épargne, 56 – 7000 Mons – Belgique

\* (auteur correspondant : [julien.quinten@umons.ac.be](mailto:julien.quinten@umons.ac.be))

**Résumé** – Nous présentons une méthode de mur équivalent 1D. Elle permet de prendre en compte la contribution dynamique des géométries 2D/3D dans le bilan énergétique des bâtiments dans des logiciels de simulation se basant sur des flux de chaleur 1D. Nous l'avons appliquée à des ponts thermiques 2D : pour une évolution réelle de la température extérieure et une température intérieure constante, les résultats sont très satisfaisants. Nous avons vérifié que le mur équivalent permet de prendre en compte efficacement l'impact du flux solaire et de la variation des coefficients de transferts surfaciques.

## Nomenclature

$C$	capacité thermique 1D, $J.K^{-1}.m^{-2}$	$t$	temps, $h$
$c$	chaleur spécifique, $J.K^{-1}.kg^{-1}$	$x,y,z$	coordonnées spatiales
$e$	épaisseur, $m$	<i>Symboles grecs</i>	
$F$	fonction objectif, $W^2.m^{-2}$ (2D)	$\phi$	facteur de structure
$K$	coefficient de transfert, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\rho$	masse volumique, $kg/m^3$
$k$	conductibilité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	<i>Indices</i>	
$P$	période, $h$	$0$	initial
$q$	flux de chaleur 2D, $W.m^{-1}$	$e$	extérieur
$R$	résistance thermique 1D, $m^2.K.W^{-1}$	$f$	final
$T$	température, $^{\circ}C$	$i$	intérieur

## 1. Introduction

La plupart des logiciels de simulation énergétique des bâtiments font l'hypothèse que le flux de chaleur dû à la conduction dans une paroi est 1D. On ne peut donc pas tenir compte des effets 2D-3D (par ex. au niveau des ponts thermiques ou détails 2D-3D) et de leur dynamique.

Les ponts thermiques pouvant représenter 5 à 39% [1] de la demande en énergie d'une habitation, une modélisation plus précise des détails 2D/3D s'avère nécessaire pour une évaluation correcte de leur impact énergétique.

Des méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis ou des volumes finis, pourraient être utilisées pour tenir compte de ces effets mais, à partir du moment où l'on veut évaluer facilement au cours du temps la température et la consommation énergétique d'un bâtiment entier avec précision, nous avons besoin d'une méthode simple, rapide, facile à intégrer dans les logiciels existants et nécessitant peu de ressources.

Dans cette optique-là, nous avons développé une méthode de structure équivalente. Il existe différentes façons de définir une structure équivalente, nous en avons comparé plusieurs dans [2] afin de choisir la plus précise et la plus appropriée : une méthode mixte se basant sur la méthode des facteurs de structure [3] et sur une méthode harmonique [4].

Dans [5-6], nous avons appliqué cette méthode à plusieurs ponts thermiques 2D, les résultats étaient encourageants même si pour deux des cinq structures étudiées ils n'étaient pas satisfaisants pour une évolution sévère de la température extérieure.

Dans cet article, nous résumons cette méthode et proposons l'utilisation d'une nouvelle fonction objectif, désormais basée sur la réponse à une somme d'harmoniques de différentes périodes et amplitudes, représentative d'un climat réel. Nous appliquons cette modification aux ponts thermiques étudiés précédemment et comparons l'évolution du flux de chaleur à travers la surface intérieure du pont thermique et du mur équivalent correspondant, pour une évolution réelle de la température extérieure. De plus, nous étudions également l'impact du flux solaire et des coefficients de transferts surfaciques sur la précision de la structure équivalente.

## 2. Méthode mixte de structure équivalente

### 2.1. Principe

Le principe de la méthode (voir Fig. 1) est de remplacer la partie de l'enveloppe perturbée par un détail 2D/3D, où le flux de chaleur est 2D/3D, par une structure multicouche 1D ayant les mêmes comportements thermiques statique et dynamique que la partie réelle. Définir cette structure revient à déterminer la résistance thermique ( $R_m = \frac{e_m}{k_m}$ ) et la capacité thermique ( $C_m = \rho_m \times c_m \times e_m$ ) de chaque couche  $m$ , et en déduire leur conductivité thermique  $k_m$ , leur chaleur massique  $c_m$ , leur masse volumique  $\rho_m$  et leur épaisseur  $e_m$ . Ces propriétés sont ensuite à introduire dans le logiciel de simulation énergétique du bâtiment. D'après la littérature [1] et notre expérience, le nombre optimal de couches de la structure équivalente est de 3.

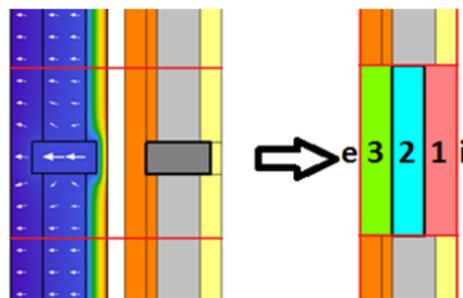


Figure 1 : Principe du mur équivalent

Dans cette section, nous exposons les grandes lignes de la méthode. Pour davantage de détails, le lecteur peut se référer à [2,3,6].

### 2.2. Résumé de la méthode

Les limites géométriques du pont thermique, qui délimitent la zone à étudier, sont déterminées à partir d'une étude stationnaire avec des coefficients de transferts surfaciques standards ( $K_i = 8\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $K_e = 23\text{W/m}^2\text{K}$ ) et les plans de coupe situés, initialement, à 1m de part et d'autre de l'élément perturbateur [7].

Notre méthode mixte se base sur la notion de facteurs de structure et sur la réponse à des sollicitations harmoniques pour déterminer ce mur équivalent.

Si le pont thermique et le mur équivalent possèdent la même résistance thermique, la même capacité thermique et les mêmes facteurs de structure, ils auront des comportements thermiques dynamiques similaires, même si en détail ils peuvent être différents [3]. Les facteurs de

structures  $\phi_{ii}$ ,  $\phi_{ee}$  et  $\phi_{ie}$  d'un mur représentent la fraction de chaleur stockée entre 2 états stables et qui est transférée à travers chaque surface [3], respectivement à proximité de la surface interne, de la surface externe et du centre du mur. Ces 3 nombres sont liés par l'Eq. 1 :

$$\phi_{ii} + 2 \times \phi_{ie} + \phi_{ee} = 1 \quad (1)$$

Pour le pont thermique 2D/3D, les facteurs de structures peuvent être déterminés grâce au champ de température  $T(x,y,z)$  dans le mur étudié qui est la solution de l'équation de diffusion en stationnaire pour  $T_i = 0$  et  $T_e = 1$  [2,3]. La résistance thermique  $R$  en est également déduite et la capacité thermique  $C$  est calculée à partir des propriétés physiques de chaque matériau.

Une fois la capacité  $C$ , la résistance  $R$  et les facteurs de structures du pont thermique connus, il faut s'assurer que la structure équivalente 1D à 3 couches (int. – 1 – 2 – 3 – ext.) possède les mêmes valeurs et respecte donc les Eqs. 2-5, valables pour une géométrie 1D [2] :

$$\phi_{ii} = \frac{1}{R^2 C} \times \left( \begin{array}{l} C_1 \times \left( \frac{R_1^2}{3} + R_1 \times (R_2 + R_3 + R_e) + (R_2 + R_3 + R_e)^2 \right) \\ + C_2 \times \left( \frac{R_2^2}{3} + R_2 \times (R_3 + R_e) + (R_3 + R_e)^2 \right) \\ + C_3 \times \left( \frac{R_3^2}{3} + R_3 \times R_e + R_e^2 \right) \end{array} \right) \quad (2)$$

$$\phi_{ie} = \frac{1}{R^2 C} \times \left( \begin{array}{l} C_1 \times \left( -\frac{R_1^2}{3} + \frac{R_1 \times R}{2} + R_i \times (R_2 + R_3 + R_e) \right) \\ + C_2 \times \left( -\frac{R_2^2}{3} + \frac{R_2 \times R}{2} + (R_i + R_1) \times (R_3 + R_e) \right) \\ + C_3 \times \left( -\frac{R_3^2}{3} + \frac{R_3 \times R}{2} + (R_i + R_1 + R_2) \times R_e \right) \end{array} \right) \quad (3)$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (4)$$

$$R = R_i + R_1 + R_2 + R_3 + R_e \quad (5)$$

Etant donné qu'il y a 6 paramètres à déterminer ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ) et 4 relations à respecter, plusieurs structures 1D à trois couches peuvent respecter ces contraintes. Pratiquement, nous testons un grand nombre de combinaisons de valeurs de  $R_2$ - $R_3$  (méthode exhaustive) et calculons celles de  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  afin de définir chaque structure possible. Pour choisir la meilleure structure équivalente, nous définissons une fonction objectif à minimiser.

### 2.3. Nouvelle fonction objectif

Précédemment, la fonction objectif que nous avons choisie se basait sur la réponse à une harmonique de période égale à 24h. Nous proposons désormais de baser la fonction objectif sur la réponse à une somme d'harmoniques, signal plus riche et représentatif d'un climat réel.

Pour cela, nous avons décomposé l'évolution de la température extérieure d'Uccle (Belgique, base de données Meteonorm disponible via le logiciel TRNSYS) en série de Fourier : sur la Fig. 2, l'amplitude de chaque harmonique est représentée. Nous avons choisi quelques harmoniques composant ce climat (harmoniques de périodes  $P = 8760h$ ,  $4380h$ ,  $1095h$ ,  $876h$ ,  $730h$ ,  $547.5h$ ,  $273.75h$ ,  $24h$ ,  $12h$ ,  $8h$ ,  $2h$  : en orange sur la Fig. 2), en tenant compte de leur amplitude et leur déphasage, afin de constituer le signal test.

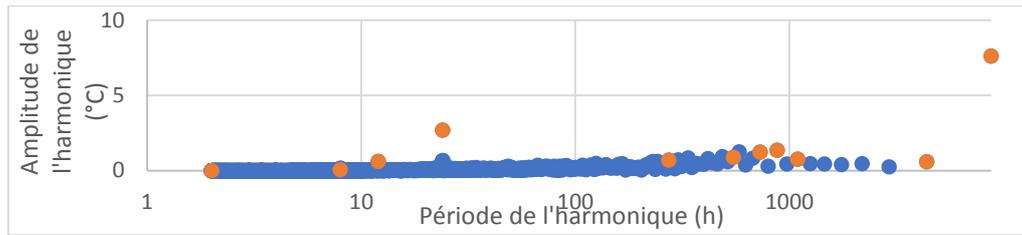


Figure 2 : Amplitude en fonction de la période de chaque harmonique de  $T_e$  (Uccle, Belgique)

Nous comparons sur la Fig. 3 des données météo réelles d'Uccle (données TRNSYS) et le climat approximé sur base des 11 harmoniques choisies (auxquelles la température moyenne est ajoutée) : en moyenne, leur évolution est bien similaire.

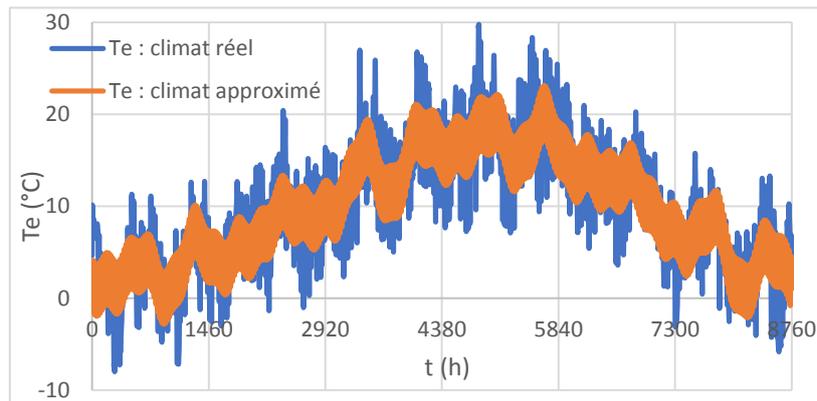


Figure 3 : Comparaison entre les climats réel (données TRNSYS) et approximé (somme d'harmoniques) d'Uccle

La fonction objectif  $F$ , à minimiser, est définie comme la somme des erreurs au carré sur le flux à travers la surface intérieure :

$$F = \sum_{t=t_0}^{t=t_f} (q_i(t) - q'_i(t))^2 \quad (6)$$

Avec :

- $q_i(t)$  : le flux de chaleur à travers la surface intérieure du pont thermique 2D/3D à l'instant  $t$ . Il est déterminé par simulation numérique (méthode aux éléments finis) avec les conditions aux limites suivantes :  $K_i = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $T_i = 0^\circ\text{C}$ ,  $K_e = 23 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $T_e =$  somme des 11 harmoniques choisies.
- $q'_i(t)$  : le flux de chaleur à travers la surface intérieure d'une structure équivalente 1D, dans les mêmes conditions. Il est déterminé par calcul analytique (régime harmonique) : la contribution de chaque harmonique peut être calculée à partir de la résistance et de la capacité de chaque couche et de la période de l'harmonique (voir [2,4,6]), toutes les contributions sont ensuite sommées.
- La simulation numérique commence en  $t = 0$ , mais l'instant initial  $t_0$  du calcul de la fonction  $F = 400\text{h}$  (pour éliminer l'influence des conditions initiales) et l'instant final  $t_f = 2000\text{h}$ . Le pas de temps choisi vaut 1h.

Parmi les structures équivalentes respectant les Eqs. 2-5, celle qui minimise cette fonction  $F$  est choisie comme étant la meilleure structure équivalente.

### 3. Applications

Nous présentons ici les résultats pour trois des cinq ponts thermiques 2D précédemment étudiés, dont les deux pour lesquels les résultats n'étaient pas satisfaisants (PT4 et PT5). Nous avons appliqué la méthode décrite ci-avant et nous comparons graphiquement le comportement thermique, en termes de flux coté intérieur du pont thermique et de son mur équivalent ( $K_i = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $K_e = 23 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $T_i = 20^\circ\text{C}$  et  $T_e$  : données météo réelles d'Uccle : voir Fig. 3). Les erreurs sont calculées par rapport aux résultats des ponts thermiques, qui servent de référence.

La simulation ( $\Delta t = 1\text{h}$ ) débute en  $t = 0\text{h}$  (01/01 à 00h) et finit en  $t = 2000\text{h}$  (24/03 à 08h). Par souci de clarté, les résultats sont représentés pour les 1500 premières heures. Des résultats similaires ont été obtenus pour d'autres périodes (2000-4000h, 4000-6000h, 6000-8000h).

#### 3.1. PT1 (Fig. 4) : Raccord mur extérieur – plancher intérieur (structure massive)

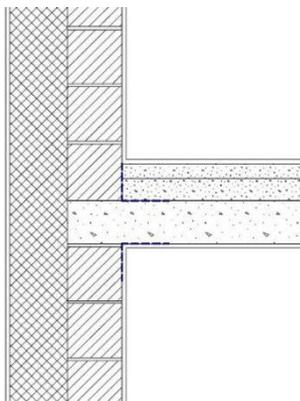


Figure 4 : PT1 – Géométrie [8]

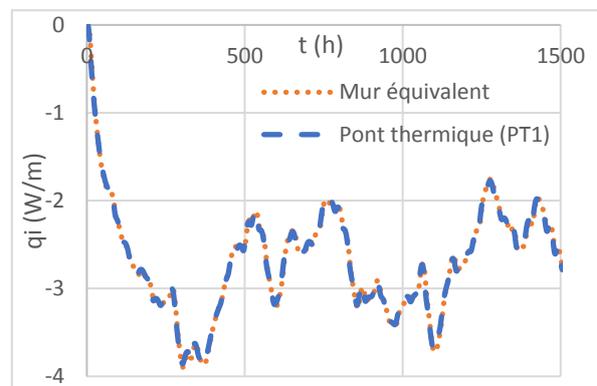


Figure 5 : Comparaison PT1 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur est constitué, à partir de l'intérieur, de plâtre (1.5 cm), de briques (19 cm), de polystyrène expansé (20 cm) et de mortier (1.5 cm). Le plancher est principalement constitué de bétons, recouverts d'un carrelage d'un côté et de plâtre de l'autre.

Sur la Fig.5, l'évolution du flux intérieur est identique pour le pont thermique 2D et le mur équivalent. Sur la période d'étude (2000h), on obtient une différence de 0.002% sur l'intégrale de  $q_i$  pour les deux structures et l'erreur moyenne est de 0.025 W/m.

#### 3.2. PT4 (Fig. 6) : Raccord mur extérieur – mur de refend (structure massive)

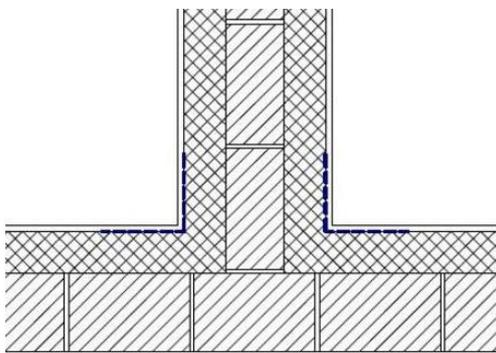


Figure 6 : PT4 – Géométrie [8]

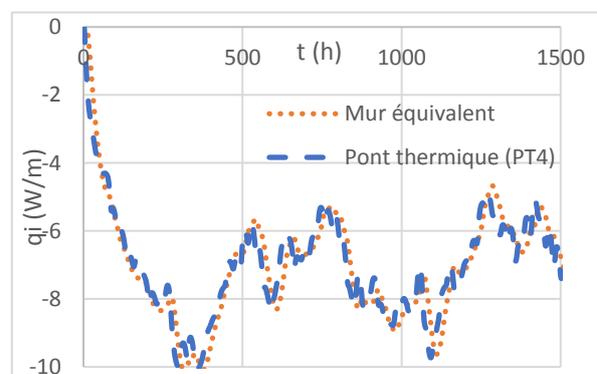


Figure 7 : Comparaison PT4 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur constitué de l'intérieur vers l'extérieur de plâtre (1.5 cm), de polyuréthane (10 cm), de béton lourd creux (19 cm) et de mortier (1.5 cm). Le mur intérieur est constitué de 14 cm de béton creux, et de part et d'autre de PUR (10 cm) et de plâtre (1cm).

Sur la Fig.7, l'évolution du flux intérieur est assez proche pour le pont thermique 2D et le mur équivalent. Il existe un déphasage variant de quelques heures à une dizaine d'heures et des écarts sont possibles au niveau des valeurs des maxima/minima locaux. En intégrant les flux  $q_i$  sur la période d'étude (2000h) pour les deux structures, on obtient une différence de 0.012%. Sur cette période, l'erreur moyenne est de 0.41 W/m.

### 3.3. PT5 (Fig. 8) : Raccord fenêtre – mur extérieur (structure légère)

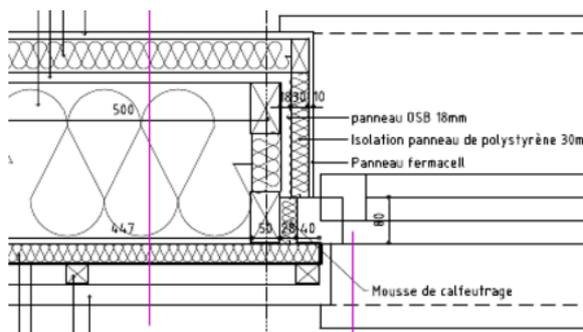


Figure 8 : PT5 – Géométrie [8]

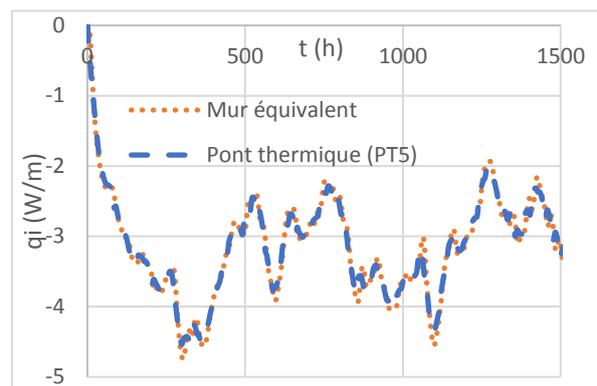


Figure 9 : Comparaison PT5 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur est constitué de l'intérieur vers l'extérieur de plâtre (1 cm), de fibres de bois (6 cm), de panneaux d'OSB (1.8 cm), de cellulose (28 cm) et de fibres de bois (3.5 cm).

Sur la Fig.9, l'évolution du flux intérieur est similaire pour le pont thermique 2D et le mur équivalent. Les deux courbes sont bien en phase, néanmoins des écarts restent possibles au niveau des valeurs des maxima/minima locaux. En intégrant les flux  $q_i$  sur la période d'étude (2000h) pour les deux structures, on obtient une différence de 0.037%. Sur cette période, l'erreur moyenne est de 0.090 W/m.

## 4. Influence des coefficients de transferts surfaciques

La méthode de détermination du mur équivalent que nous avons définie se base sur des valeurs de coefficients de transfert standards ( $K_i = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $K_e = 23 \text{ W/m}^2\text{K}$ ). En réalité, ces coefficients peuvent être différents. Afin de vérifier si le mur équivalent est valide pour d'autres valeurs de coefficients que celles avec lesquelles il a été défini, nous analysons l'évolution du flux intérieur pour les mêmes évolutions de  $T_i$  et  $T_e$  que dans la Section 3 mais avec :

- Les coefficients surfaciques doublés :  $K_i = 16 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $K_e = 46 \text{ W/m}^2\text{K}$ .
- Les coefficients surfaciques divisés par 2 :  $K_i = 4 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $K_e = 11.5 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Nous montrons ici les résultats obtenus pour PT4 (voir Fig. 10), en zoomant entre la 500<sup>ème</sup> et la 1500<sup>ème</sup> heure. Dans les deux cas, les évolutions du flux au cours du temps du mur équivalent et du pont thermique sont similaires, avec le même déphasage qu'observé précédemment. En intégrant les flux sur la période d'étude (2000h), nous trouvons une erreur de 0.20% quand les coefficients sont doublés et de 0.38% quand ils sont divisés par 2 : ces erreurs sont plus grandes que pour les coefficients standards mais elles sont tout à fait satisfaisantes. L'erreur moyenne quant à elle reste semblable, respectivement 0.44 et 0.35 W/m.

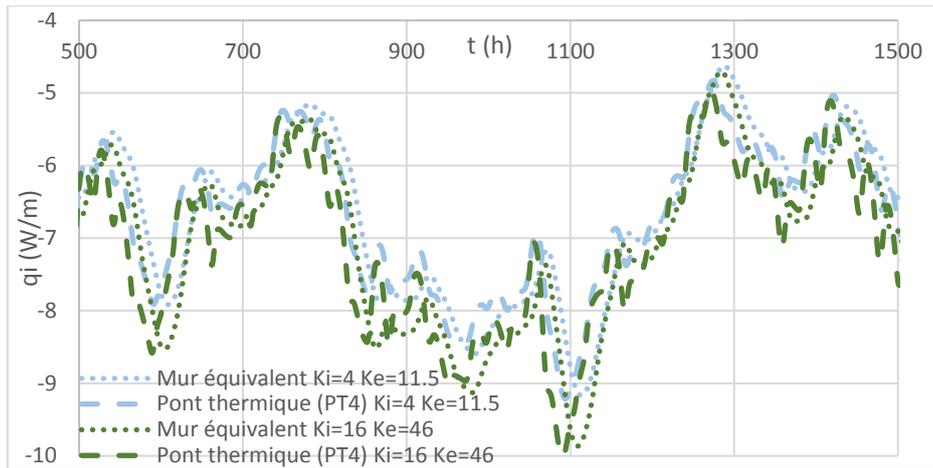


Figure 10 : Comparaison PT4 – structure équivalente : influence de  $K_i$  et  $K_e$

## 5. Impact du flux solaire

Nous réalisons le même type de comparaison que dans la Section 3, sauf que le flux solaire arrivant sur la surface extérieure est ici pris en compte (les structures équivalentes ne sont pas recalibrées). Nous considérons les données météo du flux solaire arrivant sur une surface verticale orientée sud (Uccle), en supposant que l'entièreté de ce flux est absorbée par la paroi extérieure. Sur la période étudiée, le flux solaire atteint un maximum de  $895 \text{ W/m}^2$ .

Pour PT4 et PT5, les résultats sont montrés sous forme graphique (Fig. 11-12). Même s'il subsiste quelques différences, les tendances sont similaires et les courbes assez proches, excepté au niveau de certains pics. Pour PT4, le léger déphasage observé précédemment reste présent. En intégrant les valeurs des flux  $q_i$  de  $t = 0\text{h}$  à  $t = 2000\text{h}$ , on trouve un écart de 0.028% pour PT4 et un écart de 0.024% pour PT5. Les erreurs moyennes sont environ deux fois plus élevées :  $0.76 \text{ W/m}$  pour PT4 et  $0.24 \text{ W/m}$  pour PT5, mais globalement les résultats sont donc acceptables.

Pour PT1, les résultats sont de nouveau très précis. L'erreur sur la valeur de l'intégrale du flux vaut 0.004% et l'erreur moyenne vaut  $0.060 \text{ W/m}$ .

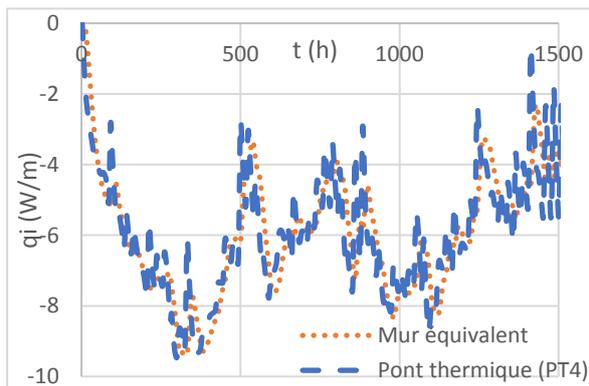


Figure 11 : Comparaison avec flux solaire PT4 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

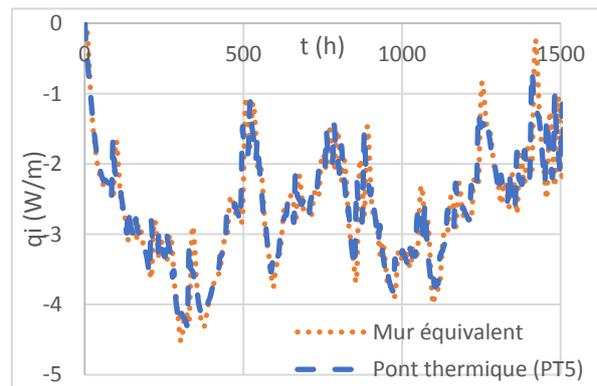


Figure 12 : Comparaison avec flux solaire PT5 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

## 6. Conclusion

Dans cet article, nous avons rappelé les grandes lignes de notre méthode mixte de structure 1D équivalente à un détail 2D/3D, se basant sur la notion de facteurs de structure et un calcul de flux en régime harmonique. Nous avons détaillé la modification principale apportée à notre méthode : l'utilisation d'une fonction objectif pour minimiser l'erreur de la réponse de la structure équivalente à une sollicitation extérieure composée de plusieurs harmoniques d'un climat réel (Uccle, Belgique), plutôt qu'une seule harmonique de période égale à 24h.

Nous avons d'abord analysé la qualité de la structure équivalente, en termes de flux à travers la surface intérieure, pour une évolution de la température extérieure basée sur des données météo (Uccle) et une température intérieure constante. Nous avons montré les résultats pour trois ponts thermiques étudiés précédemment [5,6]. Globalement ils sont très satisfaisants : l'erreur sur la valeur de l'intégrale du flux est, dans chaque cas, inférieure à 0.05%. L'évolution du flux est qualitativement similaire mais, dans certains cas, on peut observer localement quelques différences : par ex., pour PT4 l'erreur moyenne vaut 0.4 W/m (4% du flux maximal).

Nous avons ensuite vérifié que le mur équivalent est valide pour d'autres valeurs de coefficients de transferts surfaciques que celles avec lesquelles il a été défini. Pour des cas extrêmes, avec des valeurs de coefficients doublées ou diminuées de moitié, les erreurs sur l'intégrale du flux sont inférieures à 0.5% et les erreurs moyennes sur le flux varient peu.

Pour finir, nous avons montré qu'en prenant en compte le flux solaire (données pour Uccle) l'erreur moyenne sur le flux est doublée, mais que globalement on obtient une très bonne estimation de l'énergie transférée à travers la surface intérieure sur la période étudiée.

Dans la suite du travail, nous poursuivons l'analyse de la méthode pour d'autres configurations de ponts thermiques, notamment 3D ou avec 3 zones de température, et pour d'autres climats (nous avons déjà obtenu des résultats satisfaisants pour les climats de Moscou, Quito, Katmandou). Nous comptons enfin évaluer l'impact d'une modélisation précise des ponts thermiques sur le bilan énergétique d'un bâtiment.

## Références

- [1] K. Martin, A. Erkoreka, I. Florezs, M. Odriozola, J.M. Sala, Problems in the calculation of thermal bridges in dynamic conditions, *Energy and Buildings*, 43 (2011), 529-535.
- [2] J. Quinten, V. Feldheim, Dynamic modelling of multidimensional thermal bridges in building envelopes: Review of existing method, application and new mixed method, *Energy and Buildings*, 110 (2016), 284-293.
- [3] J. Kosny, E. Kossecka, Equivalent wall as a dynamic model of a complex thermal structure, *Journal of Building Physics*, vol. 20 no. 3 (1997), 249-268.
- [4] X. Xiaona, J. Yi et X. Jianjun, A new approach to compute heat transfer of ground-coupled envelope in building thermal simulation software, *Energy and Buildings*, 40 (2008), 476-485.
- [5] J. Quinten et V. Feldheim, Détermination d'un mur 1D équivalent à une structure 2D/3D : analyse de la méthode, *Proc. Congrès Français de Thermique 2015* (La Rochelle, 26-29 mai 2015).
- [6] J. Quinten et V. Feldheim, Détermination d'un mur 1D équivalent à une structure 2D/3D : application à différents ponts thermiques et limites actuelles de la méthode, *Proc. Congrès Français de Thermique 2016* (Toulouse, 31 mai – 3 juin 2016).
- [7] EN ISO 10211, Thermal bridges in building construction – Heat flows and surface temperatures – Detailed calculations, *European Committee for Standardization* (2007).
- [8] [www.ponts-thermiques.be](http://www.ponts-thermiques.be), *Service Ponts Thermiques de la Plate-forme Maison Passive asbl*