

# Identification spatio-temporelle d'un flux de chaleur, par utilisation de modèles réduits modaux. Application à une plaquette de frein.

Sylvain CARMONA<sup>1\*</sup>, Yassine ROUIZI<sup>1</sup>, Olivier QUEMENER<sup>1</sup>, Frédéric JOLY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, Université d'Evry val d'Essonne  
Antenne de Brétigny sur Orge, IUT d'Evry Val d'Essonne, Département GTE, Chemin de la Tuilerie –  
91731 Brétigny sur Orge

\*Auteur correspondant : Sylvain CARMONA (sylvain.carmona@univ-evry.fr)

**Résumé :** Dans cette étude, nous traitons un problème inverse, pour lequel on cherche à identifier un flux reçu à la surface d'une géométrie 3D. Il s'agit d'une plaquette de frein en phase de freinage, pour laquelle la densité de flux varie dans l'espace et dans le temps. Pour s'affranchir du problème de la taille importante du problème discret qui est incompatible avec la procédure d'identification utilisée (gradient conjugué avec la méthode adjointe), on choisit de construire des modèles réduits à la fois pour le champ tridimensionnel de température et pour le champ du flux à identifier à la surface de la plaquette. Ces modèles réduits sont de types modaux selon une procédure d'amalgame, ils sont construits à partir d'un problème de référence différent du problème traité. Les premiers résultats obtenus montrent l'intérêt de la méthode dans le cas d'évolutions de flux à faibles fréquences spatiales, pour lesquelles l'ordre du modèle réduit en flux est faible, entraînant alors l'identification d'un nombre réduit de paramètres.

## Nomenclature

$c$	Capacité thermique [ $J.m^{-3}.K^{-1}$ ]
$k$	Conductivité thermique [ $W.m^{-1}.K^{-1}$ ]
$h$	Coefficient d'échange [ $W.m^{-2}.K^{-1}$ ]
$T$	Température [ $^{\circ}C$ ]
$z_i$	Valeur propre [ $s^{-1}$ ]
$x_i, \psi_i$	Etat d'excitation d'un mode,
$V_i, W_i$	Mode propre [K]

### *Symboles grecs*

$\phi$	Flux [W]
$\zeta$	Nombre de Steklov [ $kg.s^{-2}.K^{-1}$ ]

### *Indices et exposants*

$u$	Rapport à la valeur maximale
$m$	Valeur maximale
$\sim$	Grandeur réduite
$\wedge$	Grandeur estimée

## 1. Introduction

Dans le cadre de la problématique inverse, l'identification spatio-temporelle de flux de chaleur est un problème difficile, puisqu'il impose d'associer un grand nombre de points de mesures à un processus numérique gourmand en temps de calcul et en mémoire. De ce fait ce type de problème est en général associé à des géométries simplifiées, afin de limiter le nombre de nœuds du maillage de la géométrie. Pour s'affranchir de cette limitation, nous proposons ici d'allier une technique d'identification spatio-temporelle par méthode adjointe à l'utilisation de modèles réduits à la fois pour la température et pour la densité de flux à identifier.

Le problème étudié est celui de la plaquette de frein de voiture en phase de freinage, pour laquelle on cherche à déterminer la répartition spatio-temporelle de la densité de flux reçu à la surface de la plaquette. En effet, indépendamment des scénarios de freinage, la puissance dissipée par frottement est d'une part fonction de la vitesse de rotation du disque de frein et

donc du rayon, et d'autre part, le piston du système de freinage est en appui localisé sur la plaquette et crée une déformation mécanique sur cette dernière.

## 2. Définition du problème direct et formulation discrète

On considère une plaquette de frein en représentation tridimensionnelle (figure 1), comportant trois frontières :  $\Gamma_1$  est en contact avec le disque lors d'une phase de freinage et reçoit une puissance thermique sous forme de densité de flux variable dans l'espace  $\Phi(x, y, t)$  (orientée selon  $-z$ ),  $\Gamma_2$  est la frontière opposée à  $\Gamma_1$ , considérée adiabatique. Toutes les autres frontières peuvent être regroupées dans  $\Gamma_3$  échangeant avec le milieu extérieur par convection ( $h=20\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  et  $T_{ext}=0^\circ\text{C}$ ). La plaquette est caractérisée par une épaisseur  $e=12\text{mm}$ , une conductivité thermique  $k=4\text{W.m}^{-1}.\text{C}^{-1}$  et une capacité de  $c=1,83.10^6\text{J.m}^{-3}.\text{C}^{-1}$ . La condition initiale choisie est un champ de température uniforme  $T_0=0^\circ\text{C}$ .

Dans l'objectif d'illustrer une application du problème inverse, on choisit de façon artificielle une loi analytique de répartition de densité de flux  $\Phi(x, y, t)$  afin qu'elle corresponde aux observations expérimentales [1]:

$$\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) \cdot C(x, y) \cdot \alpha(t) \quad (1)$$

La fonction  $\varphi(x, y, t)$  permet d'imposer une condition de densité de flux nul le long des arrêtes  $\gamma$  de la surface  $\Gamma_1$ , puisqu'elle est obtenue par résolution de l'équation de diffusion suivante :

$$\forall M \in \Gamma_1, \quad \Delta\varphi = \Pi(x, y, t) \quad (2)$$

$$\forall M \in \gamma, \quad \varphi = 0 \quad (3)$$

Le choix de la fonction  $\Pi(x, y, t)$  permet d'une part d'avoir une variation au cours du temps de la position du point où le flux est maximum, et donc de simuler une évolution de la déformation mécanique au cours du temps, et d'autre part de reproduire la dissymétrie de répartition de la densité de flux en fonction de la vitesse et donc du rayon :

$$\Pi(x, y, t) = \pi_0 \left( a - \text{abs} \left( \frac{x}{x_0} - \frac{t}{\tau} + b \right) \right) (x^2 + y^2) \quad (4)$$

avec  $\pi_0 = 111,11.10^{-9}\text{W.m}^{-4}$ ,  $x_0 = 1\text{ m}$ ,  $\tau = 400\text{ s}$ ,  $a = 0,12$  et  $b = 0,5$  (sans dimension)

Le rôle de la fonction  $C(x, y)$  est de tenir compte de la position du piston au centre de la plaquette (avec  $x_0 = y_0 = 1\text{ m}$  et  $a'=750$ ) :

$$C(x, y) = 1 + a' \cdot e^{-\left(-4\frac{x}{x_0} + \left(\frac{y}{y_0} - 0,1\right)^2\right)} \quad (5)$$

Enfin  $\alpha(t)$  reproduit un scénario de freinage. La figure 2 permet de représenter son évolution. Sur cette même figure sont également représentées les évolutions du flux  $\Phi(x, y, t)$  aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Le problème thermique tridimensionnel s'écrit alors sous forme variationnelle (avec  $g \in H_1(\Omega)$  la fonction d'essai) :

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial T}{\partial t} g d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - h \int_{\Gamma_3} T g d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \Phi g d\Gamma \quad (6)$$

La discrétisation de ce problème par éléments finis de type P1 amène un système matriciel de dimension  $N$  (ici  $N = 43488$ ) qui s'écrit :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = [\mathbf{K} + \mathbf{H}]\mathbf{T} + \mathbf{\Phi}, \quad (7)$$

où  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{H}$  sont respectivement les matrices de capacité, de conduction et de convection, et  $\mathbf{\Phi}$  est le vecteur de la sollicitation thermique générée par le freinage.

La résolution de l'équation (7) permet de déterminer l'évolution du champ de température  $\mathbf{T}$  aux  $N$  nœuds du maillage. Pour le scénario présenté sur la figure 2 (durée de 400 secondes), le temps de calcul est de l'ordre de 250 secondes.

### 3. Réduction modale

Dans l'optique de la résolution du problème inverse où le flux est déterminé de manière itérative, on utilise des modèles réduits de type modal. Deux types de modèles réduits sont présentés ici :

- Le premier est un modèle réduit tridimensionnel permettant de reproduire le champ de température pour un scénario de flux donné.
- Le second permet de construire une base de décomposition de la densité de flux à identifier.

#### 3.1. Modèle réduit en température

La méthode modale de branche associée au problème physique précédent un problème aux valeurs propres défini par les équations (8) et (9), où  $z_i$  représente la valeur propre associée au vecteur propre  $V_i$ .

$$\forall M \in \Omega, \quad k \nabla^2 V_i = z_i c V_i, \quad (8)$$

$$\forall M \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \quad k \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{n} = -z_i \zeta V_i, \quad (9)$$

Le nombre de Steklov  $\zeta = 18839 \text{ kg.s}^{-2}.\text{K}^{-1}$  évite la dégénérescence du problème modal de branche. La résolution de ce système amène à  $N$  vecteurs propres  $V_i$ , qui forment une base capable de décomposer tous les champs de température du problème considéré, et ce quelle que soit l'évolution des conditions aux limites. A partir de cette base complète et de champs de référence connus par ailleurs sur l'intégralité des nœuds du maillage, la technique d'amalgame [2] permet de construire une base réduite de vecteurs  $\tilde{V}_i$  de dimension  $\tilde{N} \ll N$  qui approche le champ de température :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) V_i(M) \cong \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i(t) \tilde{V}_i(M), \quad (10)$$

Les coefficients  $\tilde{x}_i$  de cette décomposition sont les états d'excitation des modes. Il est possible d'écrire une équation sur les états en remplaçant la température par sa décomposition modale (équation (10)) dans le problème physique (équation (7)) :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{V}}^t \Phi, \\ \mathbf{T} &= \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{X}}\end{aligned}\quad (11)$$

où  $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}$  et  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{V}}^t (\mathbf{K} + \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{V}}$ , en notant  $\tilde{\mathbf{V}}$  la matrice contenant les  $\tilde{N}$  vecteurs propres réduits et où le vecteur  $\tilde{\mathbf{X}}$  représente les  $\tilde{N}$  états d'excitations  $\tilde{x}(t)$ . Connaissant l'évolution spatio-temporelle de la densité de flux  $\Phi(x, y, t)$  (équation (1)), la résolution de l'équation modale réduite (équation (11)) nous permet de calculer rapidement le champ de température  $\mathbf{T}$  en tous points.

### 3.2. Modèle réduit en flux

L'objectif de cette étude est d'estimer une densité de flux  $\Phi(x, y, t)$  en partant de mesures de température. En pratique pour résoudre ce type de problème inverse, il est nécessaire de paramétrer la densité de flux en la projetant sur une base. Bien sûr le choix de la base n'est pas unique et il va dépendre de la nature du problème physique.  $\Phi(x, y, t)$  est par définition nul sur les arrêtes  $\gamma$ , ainsi nous choisissons de décomposer la densité de flux sur une base de vecteurs propres de type Dirichlet qui respecte cette condition aux limites:

$$\forall M \in \Gamma_I, \quad k \nabla^2 W_i = z'_i c W_i, \quad (12)$$

$$\forall M \in \gamma, \quad k \vec{\nabla} W_i \cdot \vec{n} = 0, \quad (13)$$

où  $z'_i$  représente la valeur propre associée au vecteur propre  $W_i$ .

Comme pour le modèle en température, il est possible d'obtenir une base de décomposition de la densité de flux par la méthode d'amalgame (cette fois à partir de champs de densité de flux de référence définis aux nœuds de la surface  $\Gamma_I$ ), ce qui amène :

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N'} \psi_i(t) W_i(x, y) \cong \sum_{i=1}^{\tilde{N}'} \tilde{\psi}_i(t) \tilde{W}_i(x, y), \quad (14)$$

A partir de cette décomposition, les inconnues sont les états d'excitation  $\tilde{\psi}_i(t)$ . Leur connaissance va nous permettre de reconstruire le flux. Evidemment cette projection va engendrer une erreur qui va dépendre de la taille et de la nature de la base.

### 3.3. Analyse des modèles réduits

Une fois la base calculée, la procédure d'amalgame utilise un scénario de sollicitation (dit de référence) pour construire le modèle réduit. Le choix de la densité de flux de référence est important car il doit permettre au modèle réduit de calculer les observables pour tout type de scénarios. Dans notre étude, ce scénario de référence est évidemment différent du flux que l'on cherche à identifier, tant sur le plan temporel (figure 3) que spatial (figure 4).

Différentes bases amalgamées sont obtenues pour différents ordres de réduction. Les tableaux 1 et 2 présentent les erreurs de réduction en fonction de l'ordre des bases réduites, caractérisées par les erreurs quadratiques  $\sigma_T$  et  $\sigma_\Phi$  ainsi que les erreurs maximales  $\varepsilon_T$  et  $\varepsilon_\Phi$  :

$$\sigma_Z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_p} (Z(i) - \hat{Z}(i))^2}{N_p}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_Z = \max_{i=1, N_p} |Z(i) - \hat{Z}(i)| \quad (15)$$

où  $N_p$  correspond au le nombre de points de mesures dans l'espace et dans le temps, et  $Z$  est soit la température  $T$  (°C), soit la densité de flux  $\phi_u = \frac{\phi}{\phi_{\max}}$  (%). Pour quantifier ces erreurs, la température maximale atteinte est de :  $T_{\max} = 580$  °C et la densité de flux maximale vaut  $\phi_{\max} = 40.46$  KW/m<sup>2</sup>.

On note qu'en augmentant l'ordre de modèle réduit en température  $\tilde{N}$ , l'erreur quadratique entre les modèles réduit et complet diminue. Le choix de l'ordre du modèle réduit en température va dépendre de la précision souhaitée. A titre d'information, une simulation directe a été effectuée, avec un modèle réduit d'ordre 30. Cette réduction a permis d'effectuer la simulation non plus en 250 secondes (modèle détaillé) mais en moins de 2 secondes.

Ordre $\tilde{N}$	3	5	10	15	20	30	50
$\sigma_T$ (°C)	3.99	1.91	1.19	0.695	0.539	0.367	0.219
$\varepsilon_T$ (°C)	31.0	22.1	22.6	13.4	12.8	9.94	4.64

Tableau 1 : Erreur de réduction du modèle réduit en température

Concernant la base réduite de densité de flux (tableau 2), on note une diminution de l'erreur quadratique en fonction de l'ordre  $\tilde{N}'$ , alors que l'erreur maximale se stabilise rapidement en fonction de l'ordre. Cela est dû au fait que dans la procédure d'amalgame seules les erreurs quadratiques sont considérées.

Ordre $\tilde{N}'$	3	4	5	7	10	15	20
$\sigma_\phi$ (%)	0.769	0.467	0.354	0.299	0.261	0.231	0.221
$\varepsilon_\phi$ (%)	3.45	3.04	2.57	2.58	2.57	2.58	2.57

Tableau 2 : Erreur de réduction de la base réduite de densité de flux

Ces bases réduites vont servir pour reconstruire la densité de flux en partant de l'équation (14). L'ordre de la base est un hyper-paramètre dont le choix sera discuté par la suite.

#### 4. Problème inverse

L'objectif de cette étude est d'estimer un flux inconnu en partant d'un certain nombre d'observables. Ces points de mesures (50 points) sont choisis dans l'épaisseur de la plaquette, répartis uniformément sur une surface distante de 3 mm de la frontière  $\Gamma_1$  (à comparer à l'épaisseur  $e = 12$  mm), à travers une matrice de sélection  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{X}}, \quad (17)$$

Pour tenir compte d'un cas réel d'identification, nous ajoutons aux observables  $\mathbf{Y}$  un bruit de mesure d'amplitude  $\sigma_b = 0.3$  °C. Rappelons que le flux à estimer correspond aux équations

(1) à (5) et est différent du flux de référence, ce qui évite de commettre ce que certains auteurs appellent un « *crime inverse* » [3].

L'inversion est réalisée à travers la minimisation d'une fonctionnelle quadratique bâtie sur les écarts entre les températures mesurées et celles issues du calcul avec le flux identifié :

$$J(\boldsymbol{\psi}_i, \tilde{N}') = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\tau} \|\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)\|^2 dt \right) \quad (18)$$

où  $\boldsymbol{\psi}_i$  est le vecteur de l'ensemble des états d'excitation permettant la reconstitution du champs de densité de flux.

La résolution de ce problème consiste à trouver par une méthode de descente les sollicitations telles que la fonctionnelle soit minimale. Cette technique d'optimisation est la méthode adjointe, qui fait intervenir un lagrangien  $L_a$  dans lequel on trouve le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  :

$$L_a(\boldsymbol{\psi}_i, \tilde{\mathbf{X}}, \lambda) = J(\boldsymbol{\psi}_i) + \int_0^{\tau} \lambda(t) \left( -\mathbf{L} \frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} + \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{V}}^t \boldsymbol{\Phi} \right) dt \quad (19)$$

On aboutit alors à trois équations : l'équation du gradient (20) et l'équation adjointe (21), et l'équation d'état déjà obtenue (11).

$$\nabla \mathbf{J} = \tilde{\mathbf{V}} \lambda \quad (20)$$

$$-\mathbf{L} \frac{d\lambda}{dt} = \mathbf{M}^* \lambda + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{E}(\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)) \quad (21)$$

Le schéma de descente utilisé est celui du gradient conjugué présenté dans [4].

## 5. Résultats d'inversion

Connaissant l'erreur engendrée par la réduction (tableau 1) et les caractéristiques du bruit de mesure, le modèle réduit en température d'ordre 30 semble être le meilleur compromis entre temps de calcul et précision (principe de Morozov).

Plusieurs identifications ont été effectuées en faisant varier l'hyper-paramètre  $\tilde{N}'$ . Pour chaque valeur de  $\tilde{N}'$ , les erreurs sur les flux identifiés sont données dans le tableau 3.

Ordre $\tilde{N}'$	3	4	5	7	10	15	20
$\sigma_{\phi}$ (%)	6.98	6.35	6.45	6.59	8.38	10.3	10.1
$\varepsilon_{\phi}$ (%)	63.6	53.0	53.7	54.9	70.8	70.5	68.2

Tableau 3 : Erreur d'identifications pour différents ordres  $\tilde{N}'$

Les résultats font apparaître un optimum pour un ordre de  $\tilde{N}'=4$ , qui engendre une erreur quadratique de 6.35%. Si l'on choisit des ordres de base plus élevés, l'erreur augmente très nettement. Ces résultats sont ainsi différents de ceux du tableau 2, qui présentaient l'évolution de l'erreur du modèle réduit en fonction de son ordre  $\tilde{N}'$  : En effet, augmenter l'ordre de la base réduite de flux, bien que permettant une meilleure approximation de cette densité de flux,

va en contrepartie augmenter le nombre de paramètres à identifier (pour un même nombre de points de mesure), et donc faire croître la difficulté d'identification.

Les résultats de cette inversion pour  $\tilde{N}' = 4$  sont présentés en figure 3 en terme d'évolution temporelle en deux points  $A$  et  $B$ . On présente également l'évolution spatiale en deux instants du champ de flux sur les figures 4 et 5. On note d'une part que la densité de flux de référence est bien différente de la densité de flux à estimer et d'autre part la bonne concordance entre les densités de flux identifiée et exacte.

Notons par ailleurs que le processus d'identification a nécessité 1000 itérations, pour un temps de calcul de l'ordre de 40s (correspondant à un processus de 400s). On voit ici l'intérêt d'utiliser des modèles réduits.

## 6. Conclusion

L'objectif de cette étude était d'étudier l'apport des modèles réduits pour un processus d'identification spatio-temporelle, dans le cadre d'un problème présentant une géométrie complexe à grand nombre de nœuds.

La réduction de modèle (à la fois en température et en densité de flux), permet effectivement cette identification avec du matériel informatique standard (Core i7, 2,7GHz, 32 Go de RAM). Ceci aurait été difficile voire impossible à réaliser avec un modèle détaillé.

En ce qui concerne la paramétrisation de la densité flux sur une base modale réduite, elle permet de réduire le nombre d'inconnues. On passe ainsi de 1945 nœuds sur la surface  $\Gamma_1$  à  $\tilde{N}'$  modes. Sans régularisation, les premiers résultats obtenus montrent que le nombre  $\tilde{N}'$  de paramètres  $\psi_i(t)$  à identifier doit rester faible, puisque l'optimum obtenu correspond à  $\tilde{N}'=4$ , et qu'un ordre plus grand engendre une augmentation importante de l'erreur d'identification. Ce faible nombre de paramètres limite alors la fréquence spatiale de la densité de flux que l'on souhaite identifier.

L'objectif final étant alors de pouvoir augmenter l'ordre de la base réduite afin d'élargir la gamme de densité de flux identifiable, des études complémentaires sont nécessaires afin de comprendre l'influences des différents paramètres susceptibles de permettre la régularisation du problème inverse : bruit de mesures, terme de pénalisation dans le fonctionnelle, ...

Quoi qu'il en soit ces tous premiers résultats sont prometteurs en termes de compromis entre temps de calculs et précision atteinte.

## Références

- [1] D. Méresse : Approche thermomécanique de la tribologie à grande vitesse – Application au freinage, *thèse de doctorat*,
- [2] O. Quémener, F. Joly, A. Neveu : The generalized amalgam method for modal reduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55 (2012) 1197 – 1207.
- [3] J. Kaipio, E. Somersalo, Statistical and Computational Inverse Problems. Applied Mathematical Science, Springer Verlag, New York 339p, (2005)
- [4] S. Carmona, Y. Rouizi, O. Quémener, F. Joly : Identification de flux de chaleur, par modèle réduit combiné à la méthode de l'adjoint. Application au cas d'un disque de frein en fonctionnement. *Congres Français de Thermique (2016), 31 mai - 3 juin, Toulouse.*

## Figures

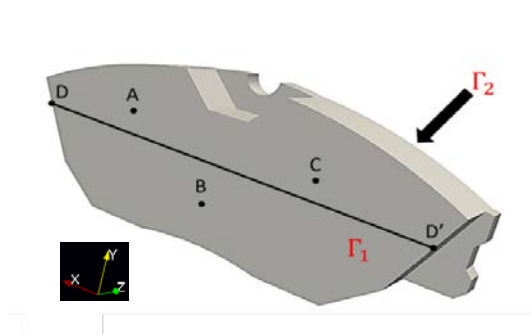


Figure 1 : Représentation de la plaquette

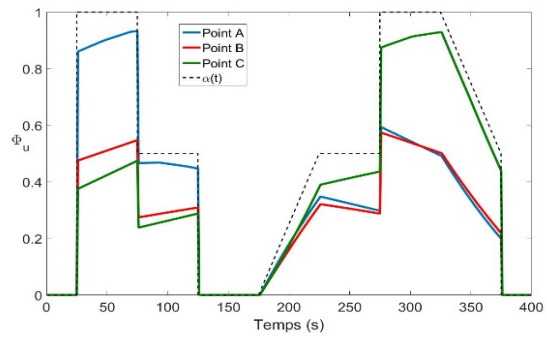


Figure 2 : Evolution de la densité de flux aux points A, B et C

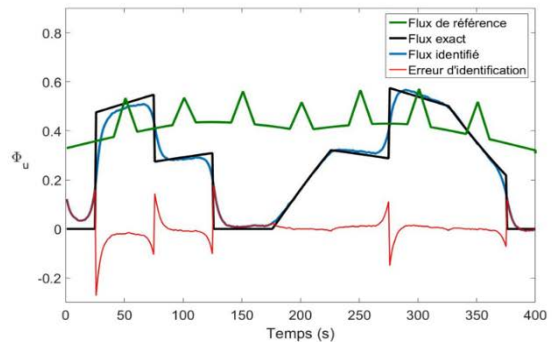
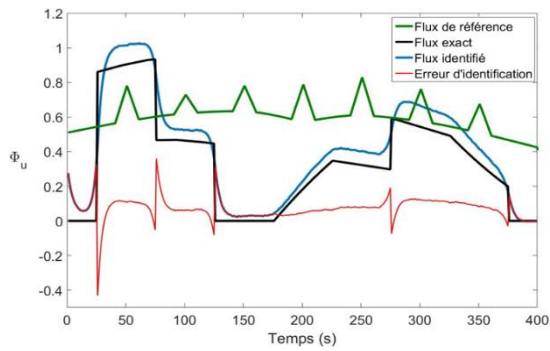


Figure 3 : Evolution des différentes densités de flux au point A (gauche) et au point B (droite)

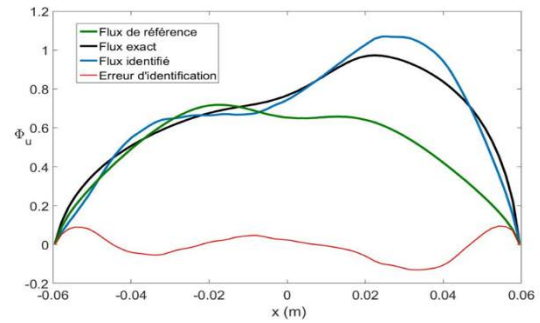
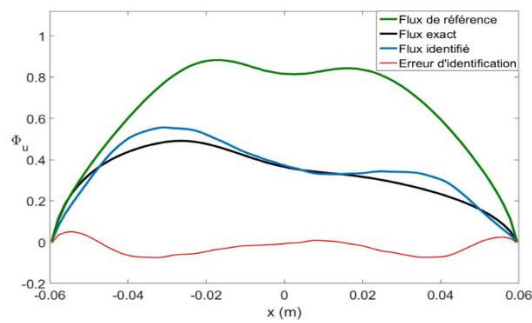


Figure 4 : Profils des densités de flux sur le segment  $[DD']$  à  $t=100s$  (gauche) et à  $t=280s$  (droite)

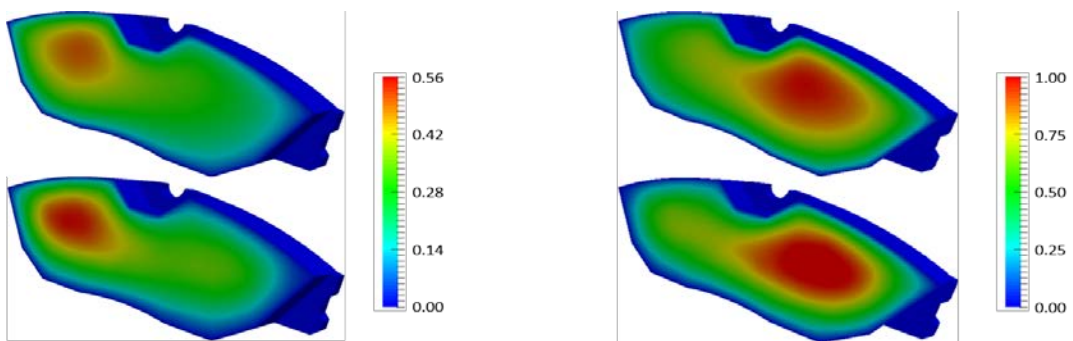


Figure 5 : Densités des flux exacts (haut) et identifiés (bas) pour  $t=100s$  (gauche) et  $t=280s$  (droite)