

# Transfert de chaleur dans un cristal laser Yb :YAG et étude de sensibilité aux paramètres critiques pour le fonctionnement

Bastien GAVORY<sup>1,2\*</sup>, Jean-Luc BATTAGLIA<sup>1</sup>, Antoine COURJAUD<sup>2</sup> et Magali DURAND<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire I2M, UMR 5295, Université de Bordeaux, 351, cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France

<sup>2</sup> Amplitude Systèmes, Institut d'optique, Université de Bordeaux, Rue François Mitterrand, 33400 Talence, France

\*(auteur correspondant : bastien.gavory@u-bordeaux.fr)

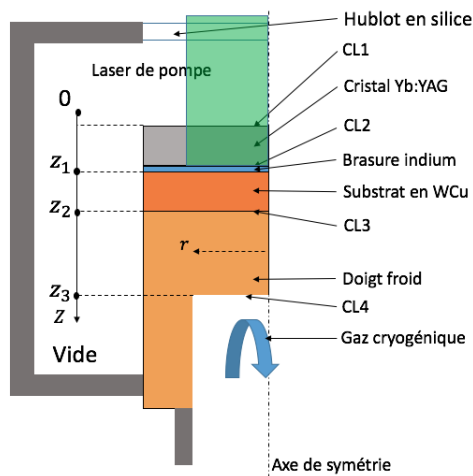
**Résumé**- Les cristaux laser de type Yb/YAG sont utilisés sous forme de lames mince pour générer des rayonnements intenses sous l'effet d'un pompage laser impulsif. La dissipation de la chaleur dans ces cristaux est critique en regard du rendement de l'émission laser. En particulier, la connaissance du terme source de chaleur et de la résistance thermique à l'interface entre le cristal et le refroidisseur doivent être parfaitement identifiés. Cette communication présente le modèle du transfert de la chaleur dans le système étudié ainsi que l'analyse de sensibilité aux paramètres cités. Le modèle est résolu en utilisant le formalisme des impédances thermiques avec terme source basé sur les transformées intégrales de Laplace, pour le temps, et de Hankel, pour l'espace. Ce modèle est utilisé pour calculer l'évolution de la température en tout point du cristal en réponse à un peigne de Dirac.

## Nomenclature

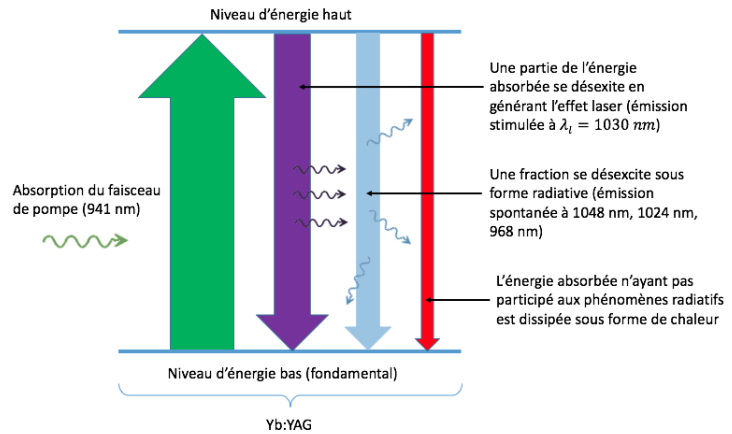
		$k$	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
		$L$	Longueur du cristal, $m$
$\alpha$	variable de Hankel	$p$	Variable de Laplace, $s^{-1}$
$\delta$	Impulsion de Dirac	$P_0$	Puissance optique de pompe, $W$
$\eta_{th}$	Rendement thermique du Yb :YAG	$Q$	Puissance thermique, $W$
$\lambda_p$	Longueur d'onde du laser de pompe, $nm$	$Q_0$	Puissance thermique en $z = 0$ , $W$
$\phi$	Densité de flux thermique, $W.m^{-2}$	$R$	Rayon du cristal, $m$
$\rho$	Masse volumique, $kg.m^{-3}$	$r$	Coordonnée radiale, $m$
$\tau$	Coefficient de transmission du Yb :YAG	$r_0$	Rayon de la sonde, $m$
$\theta$	Variable représentative de la température dans le domaine de Laplace, $s^{-1}$	$R_{th1,2}$	Résistance thermique, $K.m^2.W^{-1}$
$h$	Réponse impulsionnelle	$T$	Température, $K$
$h_{f,r}$	Coefficient d'échange en face avant et arrière respectivement, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$X_\omega$	Sensibilité réduite à $\omega$
		$z$	Axe du cristal, $m$

## 1 Introduction

Le refroidissement cryogénique des lasers solides permet d'augmenter sensiblement leurs performances. En effet aux basses températures on note une diminution significative des effets thermo-optiques dans le cristal amplificateur, la dépendance en température de l'indice de réfraction ou encore du coefficient d'expansion thermique. En outre, d'autres propriétés physiques du cristal laser sont affectées positivement comme sa conductivité thermique qui augmente [1]. Le rendement de ces lasers solides dépend donc de l'efficacité de l'extraction des calories s'accumulant dans le cristal, issues en grande partie de phénomènes non radiatifs et responsables de sa montée en température. Notons aussi que l'augmentation de la température est responsable de la déformation du cristal de YAG et affecte par ce biais sensiblement les performances du laser. Dans



(a) schéma simplifié du dispositif laser basé sur un cristal Yb :YAG refroidit



(b) les destins possibles des photons de pompe [2][5]

FIGURE 1

ce document nous présentons un modèle du transfert de chaleur dans le système cristal-système de refroidissement basé sur l'utilisation d'impédances thermiques avec termes sources de chaleur. Ce modèle est utilisé pour effectuer une analyse de sensibilité aux paramètres critiques tels que le terme source, les résistances thermiques aux interfaces entre matériaux ou bien encore le coefficient d'échange avec le fluide du cryostat.

## 2 Analyse des sources de chaleur dans le cristal lors du pompage

Le laser solide se compose d'un cristal amplificateur cylindrique de YAG dopé à l'Ytterbium à 2,5%. Un traitement hautement réfléchissant en or est appliqué en face arrière du cristal. De rayon  $R = 10$  mm et d'épaisseur  $L = 3$  mm, le cristal est rendu solidaire de son support en cuivre-tungstène par une brasure à l'indium (voir Figure 1a). Le procédé de brasure est réalisé à température ambiante avec une préparation de la face du support par une attaque chimique à l'acide. L'adhérence du cristal à la brasure est assurée par la métallisation (Ni-Pt-Au) de la face arrière du cristal.

Ce même support est en contact avec un 'doigt' froid en cuivre refroidi par un gaz cryogénique (azote) dont la température est connue et maintenue constante à 100 K. L'ensemble cristal + support refroidi est installé dans une chambre sous vide secondaire avec un hublot en silice face au cristal permettant le passage du laser d'excitation optique (pompage à la longueur d'onde  $\lambda_p = 940$  nm) depuis l'extérieur de la chambre. Une sonde PT 100, placée dans le support refroidi, permet d'asservir le refroidisseur cryogénique. Le faisceau de pompe de profil « top hat » (puissance crête 2 kW) de diamètre 6 mm fait un aller et retour seulement dans le cristal de sorte qu'environ 90% de la puissance optique est absorbée par le cristal. Une multitude de phénomènes physiques coexistent lors du pompage d'un cristal Yb :YAG. Il y a bien sûr l'émission stimulée à l'origine du faisceau laser, mais d'autres phénomènes sont responsables de l'échauffement de la matrice de YAG. On peut ainsi citer de façon non exhaustive les défauts quantiques, les transitions non radiatives, les défauts de la matrice de YAG, etc. Ces phénomènes sont plus amplement détaillés dans [2]. La Figure 1b représente schématiquement l'absorption des photons de pompe puis la désexcitation des ions ytterbium sous forme de transition radiative (émission de photons) ou sous forme de chaleur.

Le laser de pompe est absorbé selon une loi de Beer-Lambert. Il est ensuite réfléchi sur la couche d'or en face arrière du cristal et ressort par la face d'entrée (voir Figure 1a). Nous faisons ici l'hypothèse que l'angle d'incidence du laser de pompage est suffisamment petit pour conserver la symétrie de révolution cylindrique ( $r, z$ ) dans la modélisation du transfert de chaleur. On exprime ainsi le terme source de chaleur dans le cristal

pour une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  en fonction des coordonnées d'espace et du coefficient d'absorption  $\xi$  :

$$Q(r, z, t) = \underbrace{Q_0(e^{-\xi z} - e^{-\xi L}(e^{\xi(z-L)} - 1))\Pi_0(r)}_{Q_s(r,z)} \delta(t) \quad (1)$$

Où  $L$  est l'épaisseur du cristal (on notera  $R$  son rayon) et la fonction  $\Pi_{r_0}(r)$  limite spatialement le terme source à un disque de rayon  $r_0$  comme :

$$\Pi_{r_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

Enfin :

$$Q_0 = \eta_{th} \frac{P_0}{\pi r_0^2 \xi dz^2} \quad (3)$$

Où  $\eta_{th}$  est le rendement thermique du cristal,  $P_0$  est la puissance optique en Watt du laser de pompe et  $dz$  l'épaisseur de couche élémentaire du cristal. La valeur de  $Q_0$  n'est pas maîtrisée car elle dépend de  $\eta_{th}$ .

### 3 Modèle du transfert de la chaleur

#### 3.1 Conservation de l'énergie et conditions aux limites

En adoptant l'hypothèse de révolution cylindrique, l'équation de la chaleur dans le cristal, le substrat et le doigt s'écrit :

$$k_r^i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} \right) + k_z^i \frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial z^2} + Q(r, z, t) = (\rho c_p)^i \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} \quad (4)$$

$$0 < z < z_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad t > 0$$

Pour le substrat et le doigt froid on a  $Q = 0$  et on considère les propriétés de chacun des matériaux. Le cristal étant placé dans une chambre sous vide poussé, les échanges par convection sont nuls. D'autre part, nous choisissons de négliger le flux échangé par rayonnement car la température du cristal est proche de 100 K. Ce choix est discutable en regard de l'émissivité du hublot en silice dans l'IR (0,94 dans le domaine 8 – 14  $\mu\text{m}$  [4]), cependant le coefficient de réflexion du YAG est proche de 100% dans l'IR. Ainsi la condition limite (CL1) sur la face avant du cristal et la surface latérale du dispositif est :

$$\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad 0 \leq z \leq z_3, \quad t > 0 \quad (5)$$

Le contact entre le cristal et le substrat étant imparfait, il implique de considérer une résistance thermique  $R_{th1}$  telle que (CL2) :

$$T(r, z_1^-, t) - T(r, z_1^+, t) = -k_z^1 \frac{dT(r, z, t)}{dz} \Big|_{R_{th1}}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0 \quad (6)$$

Il en est de même pour l'interface entre le substrat et le doigt froid une résistance thermique  $R_{th2}$  telle que (CL3) :

$$T(r, z_2^-, t) - T(r, z_2^+, t) = -k_z^2 \frac{dT(r, z, t)}{dz} \Big|_{R_{th2}}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0 \quad (7)$$

Sur la face arrière du doigt froid, il y a un échange convectif de coefficient de transfert  $h_r$  avec le gaz cryogénique, dont la température est égale à la température initiale  $T_i$ , qui s'écrit (CL4) :

$$-k_z \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z} = h_r (T(r, z, t) - T_i), \quad z = z_3, \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0 \quad (8)$$

Enfin la condition de symétrie axiale s'écrit :

$$\frac{dT(r, z, t)}{dr} = 0, r = 0, 0 \leq z \leq z_3, t > 0 \quad (9)$$

$T_i$  est la température initiale stabilisée et homogène du système cristal - Wcu - Cu refroidi avant que le pompage ne commence. Donc la condition initiale s'écrit :

$$T(r, z, t = 0) = T_i, 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq z_3, t > 0 \quad (10)$$

### 3.2 Résolution par la méthode des impédances thermiques avec termes sources

Nous avons montré dans une précédente publication [5] que l'on pouvait résoudre le système d'équations aux dérivées partielles précédent à partir du formalisme des impédances thermiques avec termes sources. Cette méthode repose sur l'utilisation des transformées intégrales de Laplace sur le temps et de Hankel sur la coordonnée d'espace  $r$  [6]. Dans un premier temps, nous réalisons une discrétisation des trois éléments du système en couche d'épaisseur voulue sur laquelle va être calculée la température moyenne. Ceci permet alors d'aboutir au réseau d'impédances thermiques représenté sur la Figure 3. Dans cette configuration nous avons choisi de privilégier évidemment la répartition de température dans le cristal en le décomposant en 30 couches alors que nous n'avons considéré qu'une seule couche pour le Wcu et le Cu.

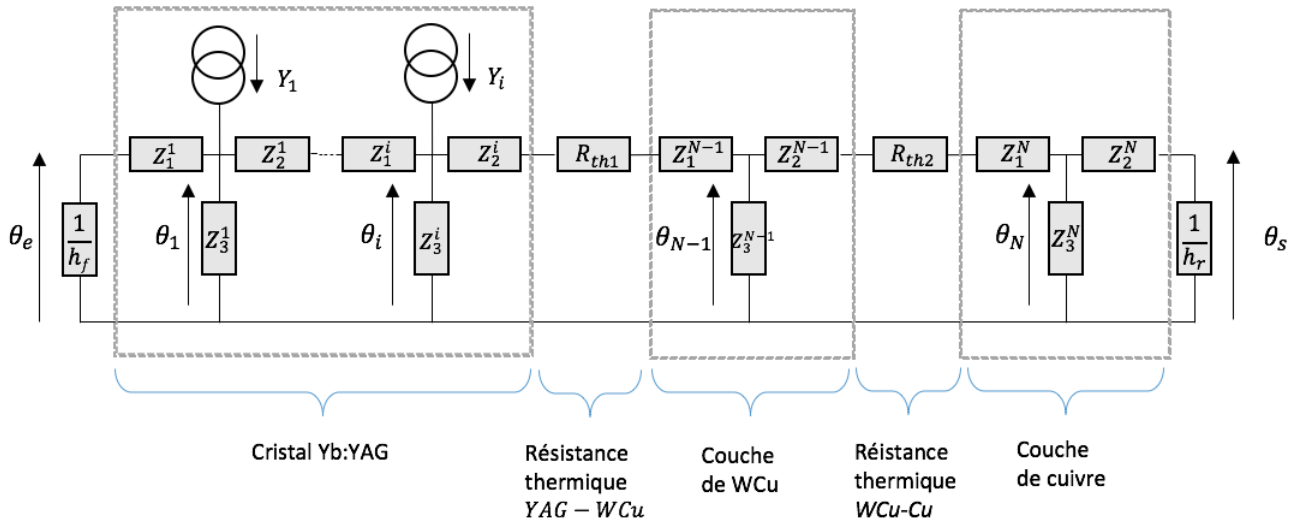


FIGURE 2 – représentation du transfert de la chaleur dans le système étudié par le formalisme des impédances thermiques avec source

On a une condition adiabatique sur toute la surface en  $z = 0$  donc  $h_f = 0$  et dans la Figure 3 on a  $\lim_{h_f \rightarrow 0^+} \frac{1}{h_f} = \infty$ . En désignant par  $\theta_i$  la représentation dans le domaine de Laplace de la température au

noeud central de la couche i qui est solution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^+} + h_f & \frac{-1}{z_1^+} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-1}{z_1^-} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{-1}{z_3^-} & \frac{1}{z_3^-} + \frac{1}{z_3^+} + \frac{1}{z_3^+} & \frac{1}{z_3^+} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{z_1^N} & \frac{1}{z_1^N} + h_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_e \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Les expressions des impédances  $Z_j^i$  (j=1,2,3) et des termes sources  $Y_i$  sont données dans [5]. Le système est résolu par une méthode adaptée aux matrices tridiagonales. On montre que la représentation de la température moyenne dans Laplace pour la couche i est :

$$\langle \theta_i \rangle = \left( \left( 2 + \frac{Z_1^i}{Z_3^i} \right) \theta_i Z_1^i Y_i \right) Z_0 + \frac{Y_i}{k_z^i \delta_{m,n}^2} (1 - 2Z_0) \quad (12)$$

Avec :  $Z_0 = \frac{\cosh(\delta_{m,n} e_i) - 1}{\delta_{m,n} e_i \sinh(\delta_{m,n} e_i)}$  et  $\delta_{m,n}^2 = \frac{p}{a_z^i} + \frac{a_r^i}{a_z^i \alpha_m^2}$  où  $e_i$  est l'épaisseur de la couche,  $a$  désigne la diffusivité thermique,  $p$  la variable de Laplace et  $\alpha_m$  sont les valeurs de la variable de Hankel. Si la durée de l'impulsion n'est pas nulle (comme dans le cas de la fonction de Dirac) mais de durée  $\tau$  alors :

$$\langle \theta_i \rangle^\tau (p) = \langle \theta_i \rangle (p) \frac{1 - e^{-p\tau}}{p} \quad (13)$$

On obtient ainsi finalement l'expression de la réponse impulsionnelle moyenne  $\langle h_i \rangle^\tau (t) = L^{-1} [\langle \theta_i \rangle^\tau (p)]$  dans chaque couche en appliquant la transformée inverse de Laplace  $L^{-1}$  par l'algorithme de Hoog [7].

### 3.3 Réponse à un peigne de Dirac

Le flux de chaleur issu du pompage optique est de la forme d'un peigne de Dirac :

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT) \quad (14)$$

où T est la période entre deux pulsations (dans notre cas le cristal est pompé à une fréquence de 100 Hz par des impulsions de  $\tau = 0,6$  millisecondes). Ainsi la température moyenne dans chaque couche i est calculée par le produit de convolution :

$$\delta_i(t) = Q_0 \langle h_i \rangle^\tau (t) * \phi(t) \quad (15)$$

On montre dans [7] que l'on abouti à :

$$S_i(t + nT) = Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \langle h_i \rangle^\tau (t + nT), \quad 0 \leq t \leq T \quad (16)$$

Nous représentons sur la Figure 4, une simulation de la variation de température moyenne de surface du cristal pour les paramètres donnés dans le tableau 1. La puissance optique de pompage est de 1700 W crête à 100 Hz. Les résistances thermiques de contact n'étant pas connues, on estime que leur valeur est de l'ordre de  $10^{-4} K.m^2.W^{-1}$ . On observe une évolution transitoire de la température entre chaque impulsion ainsi qu'une montée progressive de la température en régime "glissant" qui va se stabiliser au bout de X impulsions (Figure 5).

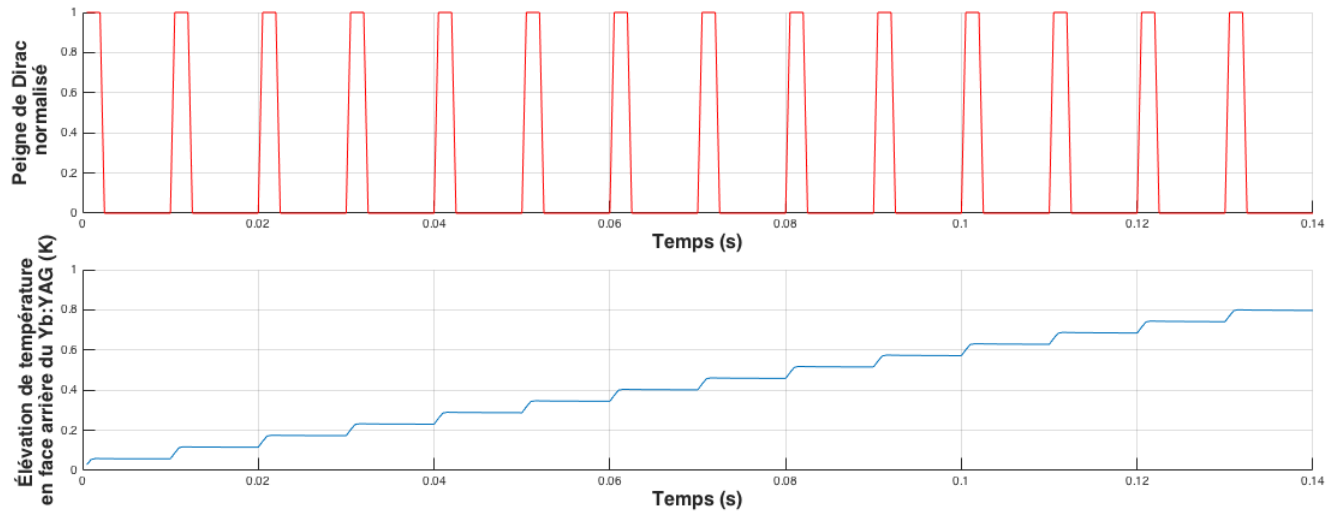


FIGURE 3 – simulation de l'élévation de température du cristal en face arrière lors du pompage à 100 Hz en  $r=0$  et  $z=0$  (en bas) et du peigne de Dirac (en haut).

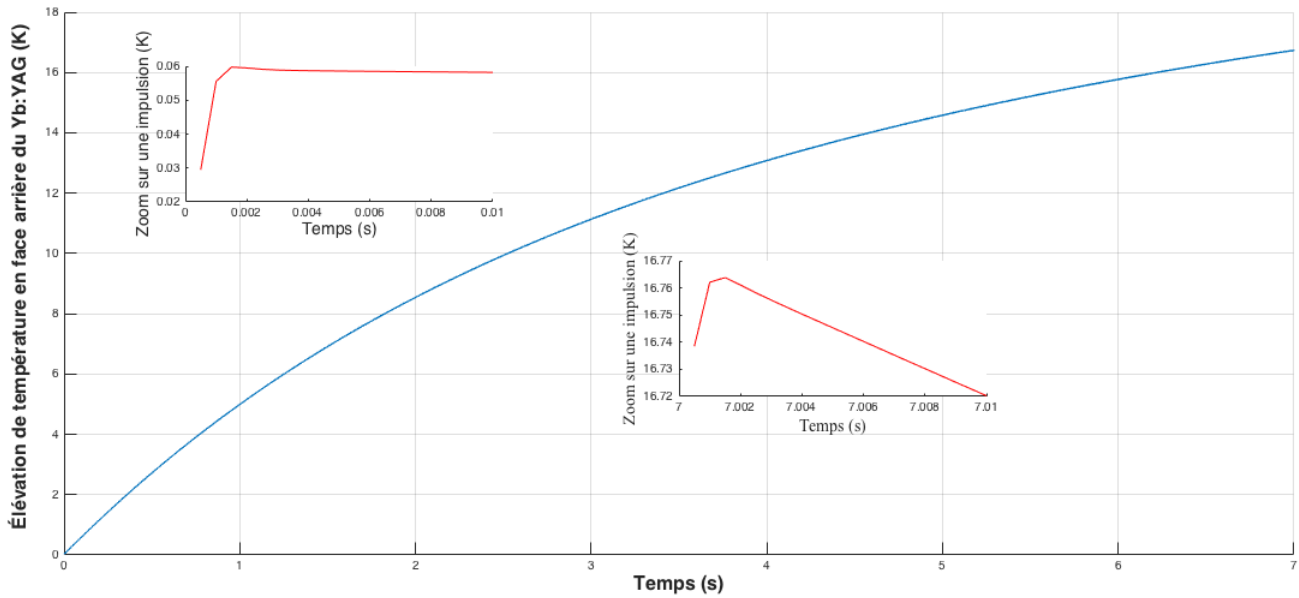


FIGURE 4 – température en face arrière du cristal et représentation de la réponse thermique à la première et dernière impulsion.

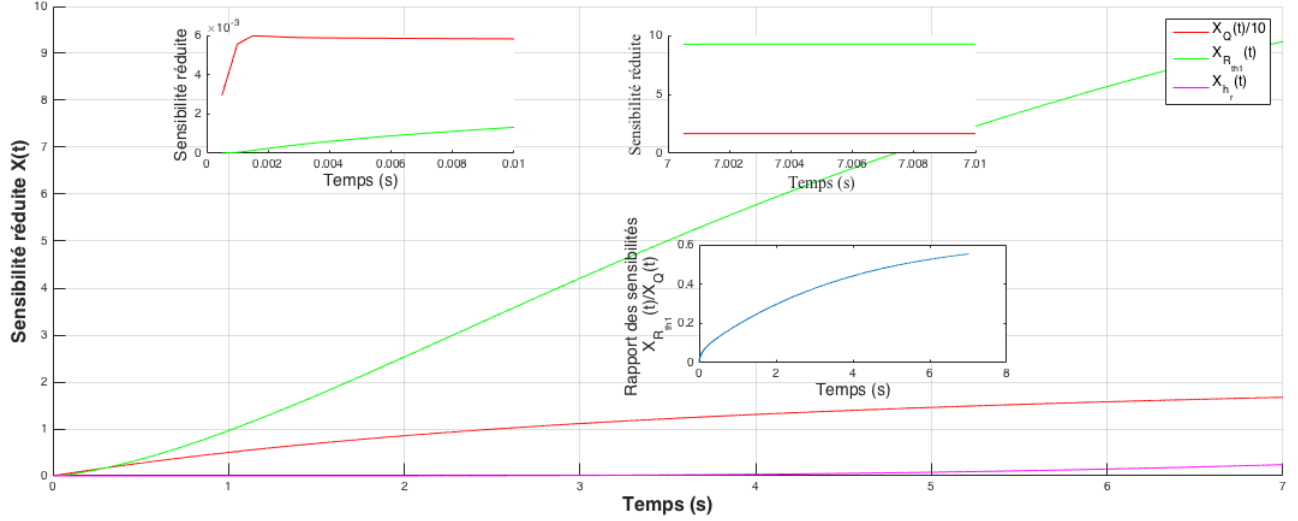


FIGURE 5 – sensibilité de la température moyenne en face arrière du cristal aux paramètres  $R_{th1}$ ,  $Q$  et  $h_r$

Paramètre	Valeur
Nombre d'aller et retour du faisceau de pompe	1
Nombre de couches de matériaux [Yb :YAG WCu Cu]	[30 1 1]
Intensité du faisceau de pompe	1700 W
Épaisseur de Yb :YAG (L)	3 mm
Épaisseur de WCu	3 mm
Épaisseur de Cu	15,45 mm
Conductivité thermique à 100 K [YAG WCu Cu]	[25 242 460] $W.m^{-1}.K^{-1}$
Estimation de la fraction thermique [3]	15 %
Température de refroidissement	100 K
Coefficient de transfert $h_r$	10000 $W.m^{-2}.K^{-1}$

### 3.4 Analyse de sensibilité

On réalise une analyse de sensibilité afin de déterminer si les paramètres  $R_{th1}$  et  $Q$  sont identifiables séparément. La fonction de sensibilité réduite de la température au paramètre  $\omega$  est notée  $X_\omega(t)$  et s'exprime :

$$X_\omega(t) = \omega \frac{dT}{d\omega} \quad (17)$$

D'un point de vue pratique, on utilise un schéma aux différences pour calculer la dérivée. Les deux fonctions de sensibilité ainsi que leur rapport sont représentés sur la Figure 6.

On note qu'aux temps très courts le modèle est très sensible au terme source  $Q$  et très peu à  $h_r$ , ce qui est cohérent car la chaleur n'a pas encore diffusé jusqu'à l'interface entre le cristal et le substrat en WCu. Le rapport des sensibilités de  $R_{th1}$  et  $Q$ , représenté par une droite aux temps longs, nous informe qu'en régime établi les deux fonctions sont entièrement linéairement dépendantes; il n'est donc pas possible d'identifier ces deux paramètres simultanément par une mesure aux temps longs. Cette analyse de sensibilité démontre l'intérêt de modéliser la réponse thermique en transitoire du cristal. En effet une mesure sur un temps très court (durée d'un pulse de laser de pompe, soit 0,6 ms) de l'évolution de la température moyenne en face arrière du cristal (ou face avant) permet d'identifier le paramètre  $Q$  sans être sensible aux autres paramètres ( $R_{th1,2}$  et  $h_r$ ). Le paramètre  $h_r$  est déterminé en mesurant le temps que met le système pour arriver à sa température cryogénique de fonctionnement depuis la température ambiante, sans aucune excitation laser

( $h_r \simeq 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ).  $R_{th1,2}$  peuvent alors être identifiés par une mesure de température moyenne aux temps longs.

## 4 Conclusion

Un modèle analytique complet du transfert de chaleur dans le cristal et son support a été développé, basé sur l'utilisation des transformées intégrales et sur le formalisme des impédances thermiques avec sources. Le modèle prend en compte la nature transitoire des phénomènes ainsi que la réalité spatiale et temporelle du terme source. La simulation permet de simuler l'accroissement de la température moyenne du cristal en face avant. L'analyse de sensibilité de cette température à l'amplitude de la source ainsi qu'à la résistance thermique de contact à l'interface entre le cristal et le substrat en WCu, montre qu'une stratégie de mesure temps longs - temps courts doit être développée. Ainsi, des mesures par thermographie infrarouge et par thermocouple sont prévues pour la suite et qui répondront à ces conclusions.

## Références

- [1] D. J. Ripin , J. R. Ochoa , and T. Y. Fan R. L. Aggarwal, Measurement of thermo-optic properties of Y3Al5O12, Lu3Al5O12, YAlO3, LiYF4, LiLuF4, BaY2F8, KGd(WO4)2, and K(WO4)2 laser crystals in the 80–300 K temperature range, *Journal of Applied Physics*, 98 103514 (2005)
- [2] Sébastien Chenais, Nouveaux matériaux laser dopés à l'ytterbium : performances en pompage par diode et étude des effets thermiques, thèse de l'Université de Paris-Sud XI, soutenue le 20 décembre 2002
- [3] Xiao Zhu, Changhong Zhu, Jianli Shang, Hailin Wan, Fei Guo and Lijun Qi Guangzhi Zhu, Modeling of end-pumped Yb :YAG thin-disk lasers with nonuniform temperature distribution, *Applied optics*, Vol. 51, No 14, 2012.
- [4] Gilbert Gaussorgues, *La thermographie infrarouge*, ed. Tec & Doc, 4ème édition, 1999
- [5] C. Pradere, J.-L. Battaglia, J. Toutain, A. Kusiak, A.W. Aregba, J.-C. Batsale, J. Pailhes, Thermal quadrupole method with internal heat sources , *Int. J. Thermal Sciences*, 53 (2012) 49-55
- [6] S. Andrzej, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, and C. Moyne D. Maillot, *Thermal Quadrupoles : Solving the Heat Equation through Integral Transforms*, ed. Wiley, 2000
- [7] J.-L. Battaglia, C. Pradere, J. Pailhes, A. Kusiak, W. Aregba, and J.-C. Batsale J. Toutain, Numerical Inversion of Laplace Transform for Time Resolved Thermal Characterization Experiment, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 133(044504), 2011