

Mesure indirecte de température dans un four par identification de modèle ARX

Thomas LOUSSOUARN^{1,2*}, Denis MAILLET¹, Benjamin REMY¹, Vincent SCHICK¹, Diane DAN²

¹ Laboratoire d’Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, Université de Lorraine et CNRS
2 avenue de la Forêt de Haye - 54518 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex

² Safran Aircraft Engines siège
10, allée du Brévent - 91019 Evry Cedex

*(auteur correspondant : thomas.loussouarn@univ-lorraine.fr)

Résumé - Le traitement thermique de pièces céramiques en l’absence d’oxydation nécessite l’emploi de fours sous vide. Nous nous plaçons ici dans le cas de fours à induction. En production, il n’y a pas de mesures de la température dans la pièce comme le travail est réalisé à haute température ($> 1000^{\circ}\text{C}$) et la pièce n’est pas instrumentable. Ce papier s’intéresse à l’estimation indirecte de la température de la pièce. La mesure indirecte de sa température nécessite la calibration d’un modèle de référence qui relie la température de la pièce à celle de l’élément chauffant. Le modèle de référence est un modèle simplifié du four construit sur des hypothèses justifiées par des expérimentations et les propriétés des différents éléments constitutifs du four. A partir de ce modèle, le modèle AutoRégressif avec des variables eXogènes (ARX) est identifié. Cet article souligne les avantages de l’utilisation de modèles ARX au lieu de modèles analytiques ainsi que leurs similarités.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, m^2/s	λ	conductivité thermique, $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
h	coefficient de transfert, $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$	ρ	masse volumique, $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
C	capacité calorifique, $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$	η	rendement de l’induction,
H	hauteur, m	θ	température relative, K
r	rayon, m	<i>Indices et exposants</i>	
S	surface d’échange, m^2	sus	suscepteur
V	volume, m^3	m	pièce
T	température, K	c	sole/cuivre
P	puissance électrique, W	iso	isolant
Q	flux, W	in	intérieur
s	paramètre de Laplace, s^{-1}	ext	extérieur
\bar{A}	transformée de Laplace de A	ss	régime permanent
A	vecteur ou matrice A		

Symboles grecs

1. Introduction

Le traitement thermique à haute température de pièces céramiques en l’absence d’oxydation nécessite l’emploi de four sous vide. Nous nous plaçons ici dans le cas de fours à induction. Ce procédé nécessite une bonne connaissance des échanges de chaleur au cours du processus. Il n’y a pas d’approche systémique connue. Les fours employés pour ce process possèdent peu de capteurs. Le four étudié a un seul élément chauffant. Il est possible d’effectuer une étude complète du système, de la puissance électrique jusqu’à la température de la pièce et du suscepteur. Cette étude s’inscrit dans le cadre d’une possible procédure d’identification expérimentale correspondant à une modélisation des interactions entre le module de chauffe, la pièce et l’environnement extérieur.

En premier lieu, un modèle du four a été construit afin d'obtenir des simulations de référence des champs de température dans le four. Ensuite, nous avons défini un modèle réduit identifié basé sur une structure AutoRégressive avec variables eXogènes (modèle ARX) afin de décrire l'état du four à tout instant.

2. Présentation du four

2.1. La configuration de four étudiée

Afin de comprendre le comportement général du système, une configuration simplifiée a été choisie, voir figure 1. Le four fonctionne sous vide et possède seulement un inducteur. Nous considérons pendant toute l'étude que la température de surface de l'inducteur est constante et vaut 473 K. L'élément de chauffe, aussi appelé suscepteur, est chauffé par induction. L'isolant et l'inducteur échangent de la chaleur par rayonnement. Les thermocouples ne sont pas présentés sur le schéma, ils seront considérés comme des points de mesure au sein du suscepteur. La pièce cylindrique est positionnée sur une base en cuivre refroidie, appelée sole, à 293 K. Le mauvais contact thermique entre la pièce et la sole est modélisé par un faible coefficient d'échange h_s . La pièce est chauffée par le rayonnement du suscepteur. Ces échanges radiatifs ont été linéarisés suite à des observations expérimentales en condition de fonctionnement. Les fermetures haute et basse sont considérées comme des isolants parfaits. Le système a un axe de symétrie vertical, c'est pourquoi il sera toujours représenté en 2D axisymétrique.

2.2. Modélisation simplifiée des échanges de chaleur dans le module de chauffe

Le système composé de la pièce et de l'élément chauffant est modélisé, voir figure 2. Le suscepteur est considéré comme un petit corps car le nombre de Biot associé est de l'ordre de 0.014. Le suscepteur est chauffé par une puissance de chauffe volumique égale à ηP . Il échange de la chaleur avec la pièce ($hS_{sus}(T(t) - \tilde{T}_m(t))$) et perd de l'énergie vers l'extérieur ($h_{ext}S_{ext}(T(t) - T_{ext})$). La température du suscepteur T vérifie le bilan :

$$\rho CV \frac{dT}{dt}(t) = \eta P - hS_{sus}(T(t) - \tilde{T}_m(t)) - h_{ext}S_{ext}(T(t) - T_{ext}) \quad (1)$$

avec $\tilde{T}_m(t) = \frac{1}{H} \int_0^H T_m(t, z) dz$. La pièce est représentée par une ailette. De par la symétrie du système, nous considérons qu'il n'y a pas d'échange à travers sa face interne. Il n'y a pas d'échange par la face supérieure. La température est uniforme dans la pièce pour une altitude z donnée. Seuls les échanges radiatifs avec le suscepteur et les échanges par conduction avec la sole sont pris en compte. L'équation de la chaleur pour la pièce est alors :

$$\frac{\partial^2 T_m(t, z)}{\partial z^2} + \frac{hm}{\lambda_m S_m}(T(t) - T_m(t, z)) = \frac{1}{a_m} \frac{\partial T_m(t, z)}{\partial t} \quad (2)$$

avec $m = 2\pi r_{out}$ et $S_m = \pi(r_{out}^2 - r_{in}^2)$. Les conditions limites sont :

$$\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z}(t, z = 0) = h_s(T_m(t, z = 0) - T_s) \quad , \quad \frac{\partial T_m}{\partial z}(t, z = H) = 0 \quad (3a,3b)$$

La température initiale n'est pas uniforme dans la pièce avec $T_m(t = 0, z) = T_{m,0}(z)$. Grâce à cette modélisation, la température de la pièce est définie à toute altitude. La construction d'un capteur virtuel reliant la température de la pièce pour toute hauteur à la température du suscepteur est alors possible.

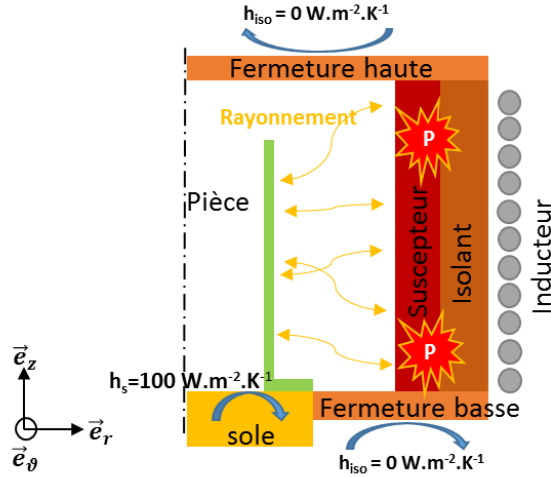


Figure 1 Configuration étudiée du module de chauffe avec la pièce insérée

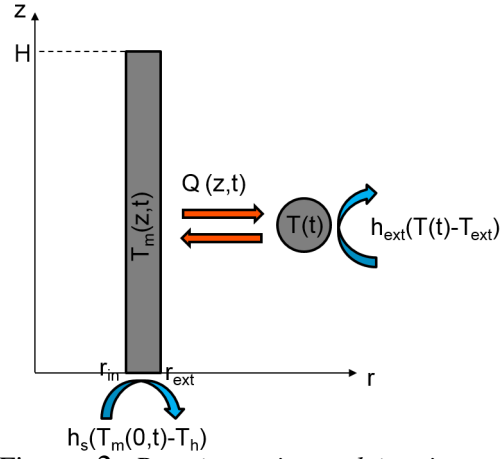


Figure 2 Représentation schématique de la modélisation du module de chauffe avec $H = 0.276m$, $r_{in} = 0.03m$ et $r_{ext} = 0.037m$

2.3. Solutions en régime permanent et amélioration des équations de la chaleur en régime transitoire

2.3.1. Solutions en régime permanent

L'équation de la chaleur (1) du susceptible devient en régime permanent :

$$0 = \eta P_{ss} - h S_{sus}(T_{ss} - \tilde{T}_{m,ss}) - h_{ext} S_{ext}(T_{ss} - T_{out}) \quad (4)$$

et l'équation de la chaleur pour la pièce (2) devient quant à elle :

$$\frac{d^2 T_{m,ss}(z)}{dz^2} + \frac{hm}{\lambda_m S_m}(T_{ss} - T_{m,ss}(z)) = 0 \quad (5)$$

Le système en régime permanent peut alors être résolu avec l'aide des conditions limites (3a) et (3b). Les expressions analytiques des températures ($T_{m,ss}$, $\tilde{T}_{m,ss}$ et T_{ss}) sont alors obtenues.

2.3.2. Une nouvelle façon d'écrire les équations transitoires

Le système est supposé à l'état permanent à l'instant initial. Les équations à l'instant initial peuvent donc être soustraites aux équations en régime transitoire. Le but est d'obtenir des variables nulles à l'initialisation, et donc l'équation (4) est soustraite à (1) :

$$\rho CV \frac{d\theta}{dt}(t) = \eta P' - h S_{sus}(\theta(t) - \tilde{\theta}_m(t)) - h_{ext} S_{ext} \theta(t) \quad (6)$$

avec $\theta(t) = T(t) - T_{ss}$, $\tilde{\theta}_m(t) = \tilde{T}_m(t) - \tilde{T}_{m,ss}$, $\theta_m(z, t) = T_m(z, t) - T_{m,ss}(z)$ et $P'(t) = P(t) - P_{ss}$. L'équation de la chaleur pour la pièce devient :

$$\frac{\partial^2 \theta_m(z, t)}{\partial z^2} + \frac{hm}{\lambda_m S_m}(\theta(t) - \theta_m(z, t)) = \frac{1}{a_m} \frac{\partial \theta_m(z, t)}{\partial t} \quad (7)$$

avec les conditions limites suivantes :

$$\lambda_m \frac{\partial \theta_m}{\partial z}(z = 0, t) = h_h \theta_m(z = 0, t), \quad \frac{\partial \theta_m}{\partial z}(z = H, t) = 0 \quad (3a, 3b)$$

Les deux équations de la chaleur sont résolues à l'aide de la transformation intégrale de Laplace. L'équation (6) est transformée dans le domaine de Laplace en :

$$(\rho CV s + h S_{sus} + h_{ext} S_{ext}) \bar{\theta} = \eta \bar{P}' + h S_{sus} \bar{\tilde{\theta}}_m \quad (9)$$

l'équation (7) a quant à elle l'expression :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_m}{\partial z^2}(z, s) - \left(\frac{s}{a_m} + \frac{hm}{\lambda_m S_m} \right) \bar{\theta}_m(z, s) + \frac{hm}{\lambda_m S_m} \bar{\theta}(s) = 0 \quad (10)$$

2.4. Sorties du modèle physique

L'équation de la chaleur (10) est résolue à l'aide de la méthode des quadripôles thermiques [1]. La température de la pièce est alors exprimée en fonction de la température relative du susceptible avec une transmittance \bar{W}_z :

$$\bar{\theta}_m(z, s) = \bar{W}_z(s) \bar{\theta}(s) \quad (11)$$

où

$$\bar{W}_z(s) = \frac{hm}{\lambda_m S_m \gamma^2} \left[1 - \frac{h_s \cosh(\gamma(H-z))}{h_s \cosh(\alpha H) + \lambda_m \gamma \sinh(\gamma H)} \right] \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{s}{a_m} + \frac{hm}{\lambda_m S_m}} \quad (12a, 12b)$$

La température moyenne de la pièce est obtenue par intégration de (12a) de \bar{W}_z :

$$\bar{\theta}_m(s) = \bar{W}(s) \bar{\theta}(s) = \frac{hm}{\lambda_m S_m \gamma^2} \left[1 - \frac{1}{H\gamma} \frac{\tanh(\gamma H)}{1 + \frac{\lambda_m \gamma}{h_s} \tanh(\gamma H)} \right] \bar{\theta}(s) \quad (13)$$

Au final, l'équation (13) et (9) sont combinées et l'expression de la température relative du susceptible est alors obtenue en fonction de la puissance relative :

$$\bar{\theta}(s) = \bar{Z}(s) \bar{P}'(s) = \frac{1}{\rho C V s + h_{ext} S_{ext} + h S_{sus} (1 - \bar{W}(s))} \bar{P}'(s) \quad (14)$$

La température de la pièce est aussi une fonction de la puissance relative et d'une impédance $\bar{Z}_m(z, s)$:

$$\bar{\theta}_m(z, s) = \bar{Z}_m(z, s) \bar{P}' \quad \text{avec la relation} \quad \bar{W}_z(s) = \frac{\bar{Z}_m(z, s)}{\bar{Z}(s)} \quad (15a, 15b)$$

L'objectif est d'obtenir les résultats dans le domaine temporel, la transformée inverse de Laplace est donc appliquée à la transmittance $\bar{W}_z(s)$ et aux impédances $\bar{Z}(s)$ et $\bar{Z}_m(z, s)$ à l'aide d'un algorithme d'inversion numérique [2]. La multiplication dans le domaine de Laplace est équivalente à un produit de convolution dans le domaine temporel. L'expression finale des températures relatives dans le domaine temporel est alors un produit de convolution entre une fonction de transfert et une puissance relative ou une température relative, et donc :

$$\theta_m(z, t) = W_z(t) * \theta(t), \quad \theta(t) = Z(t) * P', \quad \theta_m(z, t) = Z_m(z, t) * P' \quad (16a, 16b, 16c)$$

Le produit de convolution * peut être écrit en temps continu ou en temps discret (quadrature) pour une entrée $u(t)$, une fonction de transfert $H(t)$ et une sortie $y(t)$:

$$y(t) = H(t) * u(t) = \int_0^t H(t-v) u(v) dv \Rightarrow y_i = y(t_i) = \Delta t \sum_{j=1}^i H_{i-j+1} u_j \quad (17)$$

avec $H_j = H(t_j)$, $u_j = u(t_j)$ et $t_j = j\Delta t$ pour $j = 1$ à i .

2.5. Modélisation ARX

Un modèle AutoRégressif avec des entrées eXogènes a la structure présentée en (18). La sortie $y(i)$ est une combinaison des précédentes sorties ainsi que des précédentes valeurs de l'entrée et d'un bruit blanc $\epsilon(i)$. Le modèle ARX a été particulièrement étudié par Ljung [3].

$$y(i) = - \sum_{j=1}^{n_a} a_j y(i-j) + \sum_{j=1}^{n_b} b_j e(i-j-n_d) + \epsilon(i) \quad (18)$$

L'ordre du modèle est défini par un triplet (n_a, n_b, n_d) . Ici, l'entrée n'est pas retardée donc $n_d = 0$ et on suppose $\epsilon(i) = 0$ (modèle à entrée uniquement déterministe). La sortie y et l'entrée e correspondent respectivement à la température de la pièce θ_m et à la température du susceptible θ . Les paramètres a_i et b_i doivent être estimés. Cela nécessite l'utilisation de deux séries de mesures de y pour 2 entrées e différentes. La première série est appelée série de calibration et la seconde de validation. L'expérience de calibration est utilisée pour estimer les paramètres a_i et b_i considérés comme les inconnues du problème d'estimation des moindres-carrés du système (18). Ils sont estimés à l'aide d'une factorisation de type QR sur Matlab[®]. Après cette calibration, le jeu de paramètres est validé par une expérience de validation.

2.6. Comparaison de la double convolution analytique avec le modèle ARX

Les équations (16a) et (16b) peuvent être combinées pour éliminer $P'(t)$, ce qui donne lieu à une relation correspondant à un double produit de convolution :

$$Z(t) * \theta_m(z, t) = Z_m(z, t) * \theta(t) \quad (19)$$

A partir de (19), la température de la pièce à tout instant t_i ($i = 2$ à n) est écrite comme une fonction des sorties précédentes et des valeurs précédentes et actuelle de l'entrée :

$$\theta_m(z, i) = - \sum_{j=1}^{i-1} a_j \theta_m(z, i-j) + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \theta(i-j) \quad (20)$$

avec $a_j = \frac{Z_{i+1}}{Z_1}$ pour $j = 1$ à $i-1$ et $b_j = \frac{Z_{m,j+1}}{Z_1}$ pour $j = 0$ à $i-1$. L'analogie avec la définition de l'ARX en (18) apparaît clairement si b_0 est nul. Nous pouvons remarquer que si n observations de θ_m et θ sont disponibles alors le nombre de coefficients a et b présents en (18) est de $(2n-1)$. Il est alors impossible de tous les estimer. Le nombre maximum de paramètres pouvant être estimés est donc $n_a + n_b = n$.

3. Résultats pour une puissance de chauffe

3.1. Sorties du modèle analytique

Dans notre cas d'étude, la simulation commence à une température d'équilibre de 1173 K pour le susceptible et la distribution de température dans la pièce est ni uniforme ni linéaire, voir figure 3. Le gradient est dû à la sole refroidie. Il est important dans les premiers millimètres à cause de la faible conductivité de la pièce. A partir de cet état d'équilibre initial, deux profils de puissance relative électrique vont être appliqués au système, voir figure 4. Le premier profil est l'entrée de calibration, il est constitué de 2 échelons ainsi que d'une phase de relaxation pour obtenir le plus d'information possible. Le second profil est l'entrée de validation. La puissance électrique relative peut être négative car le modèle a été construit avec $P'(t) = P(t) - P_{init}$ ainsi lorsque la puissance électrique est interrompue $P'(t) = -P_{init} < 0$.

La réponse analytique en température pour ces entrées est donnée en figure 5. Le gradient est clairement observable au cours des premiers millimètres de la pièce, $T_m(0.0029, t) \ll T_m(0.0145, t)$. La température de la pièce est stable pour des hauteurs plus élevées, $T_m(0.087, t)$ est quasi égale à $T_m(0.276, t)$. Les profils temporels des fonctions de transfert $W_{0.087}(t)\Delta t$, $Z(t)\Delta t$, $Z_m(0.087, t)\Delta t$, pour $\Delta t = 10s$, sont donnés en figure 6.

3.2. Résultats du modèle ARX

3.2.1. Etude sans bruit

Différents ordres de modèle ARX sont étudiés dans cette section. Nous nous intéressons principalement aux modèles autorégressifs avec $n_a = n_b$ et aux modèles convolutifs avec $n_a =$

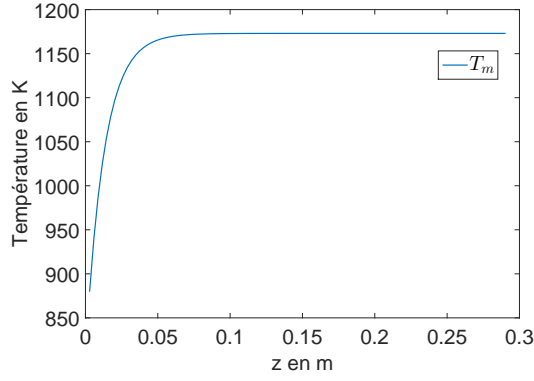


Figure 3 Distribution de la température de la pièce en fonction de z pour un suscepteur à 1173 K

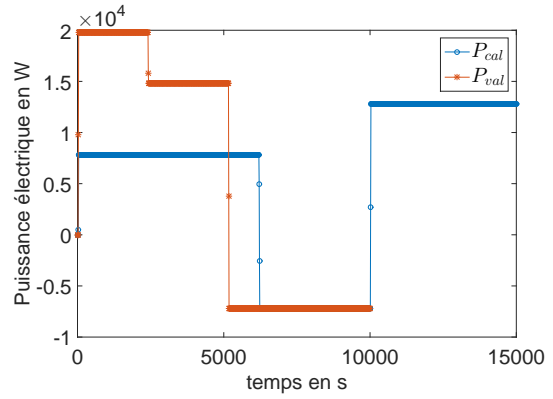


Figure 4 Profils de puissance électrique relative de calibration et de validation

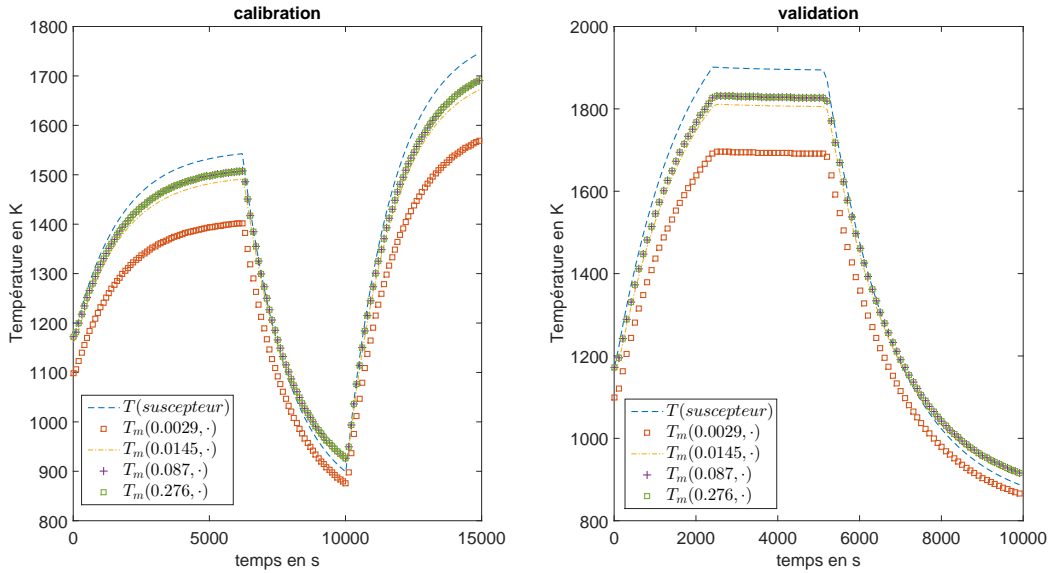


Figure 5 Profils temporels de température du suscepteur ainsi que de la pièce à 4 hauteurs différentes ($z = 0.0029m$, $z = 0.0145m$, $z = 0.087m$ and $z = 0.276m$) pour les phases de calibration et validation

0. Les résultats sont présentés pour les phases de calibration et validation, tableau 1, en terme d'erreur moyenne quadratique (E_{RMS}) avec

$$E_{RMS} = \|\boldsymbol{\theta}_m(z, t) - \mathbf{Y}\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\theta_m(z, j) - y(j))^2} \quad (21)$$

où \mathbf{Y} est la sortie du modèle ARX. Le modèle ARX fournit d'excellent résultats même pour de petits ordres comme (1,1,0). Le tableau 1 montre l'intérêt des modèles ARX : le nombre de paramètres à estimer, afin d'obtenir une E_{RMS} équivalente, est beaucoup plus faible pour un modèle autorégressif que pour un modèle convolutif.

Les coefficients a_j et b_j sont présentés en fonction de l'indice j pour différents ordres ($n_a, n_b, 0$), en figure 7. Pour les modèles convolutifs, les coefficients b_j convergent vers une solution stable lorsque l'ordre s'accroît correspondant à $W_{0.087}(t)\Delta t$ (voir figure 6). Dans les cas autorégressifs les coefficients a_j et b_j oscillent et ne semblent pas converger vers une solution stable mais leur rapport correspond aussi à $W_{0.087}(t)\Delta t$.

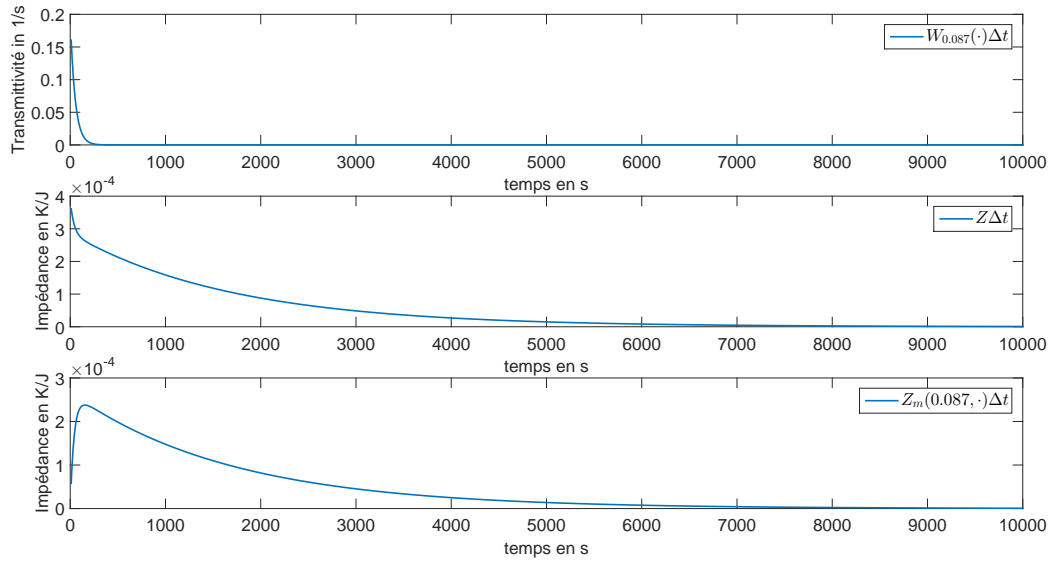


Figure 6 Profils temporels des différentes fonctions de transfert multipliées par le pas de temps $W_{0.087}(t)\Delta t$, $Z(t)\Delta t$ et $Z_m(0.087, t)\Delta t$

ordre du modèle ARX ($n_a, n_b, 0$)	Calibration (E_{RMS}) K	Validation (E_{RMS}) K
Modèle autorégressif		
(1,1,0)	$1.73 \cdot 10^{-6}$	$2.52 \cdot 10^{-6}$
(4,4,0)	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$3.35 \cdot 10^{-7}$
(50,50,0)	$9.14 \cdot 10^{-10}$	$1.32 \cdot 10^{-9}$
Modèle convolutif		
(0,2,0)	1.20	1.71
(0,8,0)	0.36	0.52
(0,70,0)	$2.03 \cdot 10^{-6}$	$2.88 \cdot 10^{-6}$
(0,100,0)	$4.65 \cdot 10^{-9}$	$6.64 \cdot 10^{-9}$

Tableau 1 Capacité du modèle ARX à suivre les séquences de calibration et validation pour une hauteur $z=0.087$ m dans la pièce

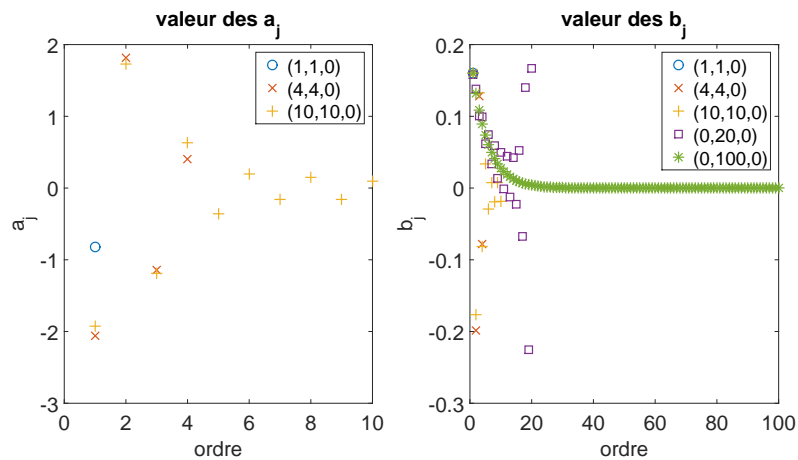


Figure 7 Valeurs estimées des paramètres a_j et b_j en fonction de l'ordre j pour différents ordres d'ARX ($n_a, n_b, 0$)

3.2.2. Etude avec bruit

L'ajout d'un bruit blanc avec un écart-type de 5 K, ce qui correspond au pire cas rencontré dans nos expérimentations, n'impacte pas la qualité des résultats. Les résultats du modèle ARX (1, 1, 0) pour les phases de calibration et validation sont présentés en figure 8. L'erreur E_{RMS} pour la phase de calibration est égale à 6.48 K et 6.39 K pour la phase de validation, ce qui est équivalent à l'écart-type du bruit de mesure.

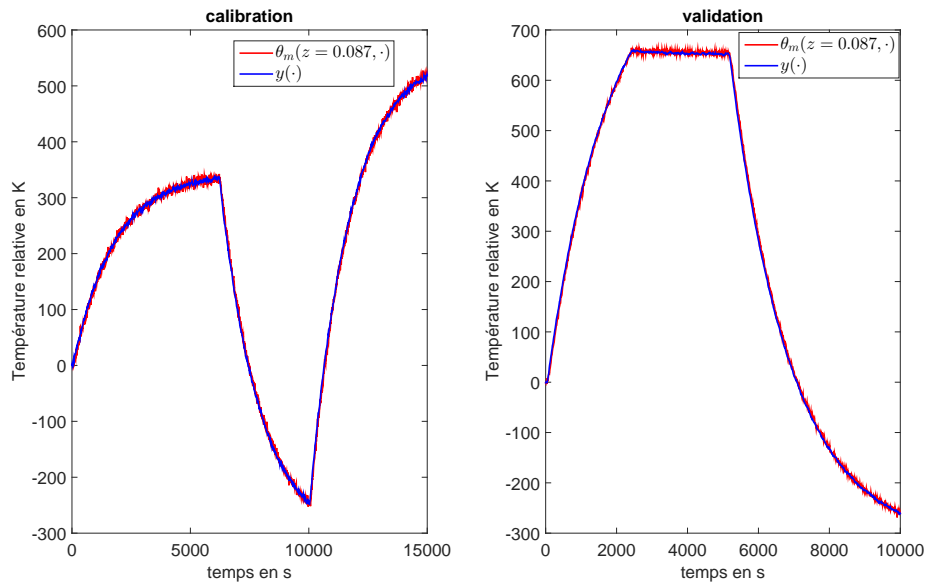


Figure 8 Profils temporels de $\theta_m(z = 0.087, t)$ et les sorties du modèle ARX correspondantes pour les phases de calibration et validation

4. Conclusion

Au cours de cet article, des modèles AutoRégressif à variables eXogènes ont été confrontés à un modèle analytique simplifié d'un four à induction. Le modèle ARX d'ordre faible (1,1,0) a montré sa capacité à suivre le modèle analytique même avec un bruit blanc significatif et il a été validé pour une expérience synthétique différente de la calibration. Les fonctions de transfert du modèle analytique peuvent être retrouvées grâce aux coefficients a_j et b_j du modèle ARX. De plus, les modèles autorégressifs sont très efficaces pour représenter le modèle analytique avec beaucoup moins de paramètres qu'un modèle convolutif.

La prochaine étape concernera l'utilisation des modèles ARX pour des jeux de données expérimentales afin de valider notre approche.

Références

- [1] D. Maillat, & al., *Thermal quadrupoles : solving the heat equation through integral transforms*, Wiley (2000).
- [2] K. Hollenbeck, 1998, INVLAP.m : A matlab function for numerical inversion of Laplace transforms by the De Hoog algorithm, URL <http://www.isva.dtu.dk/staff/karl/invlap.htm>.
- [3] L. Ljung, *System identification : theory for the user*, Prentice-Hall PTR (1996).

Remerciements

Les auteurs remercient les équipes Safran Aircraft Engines.