

Identification d'un système convolutif par moindres carrés ordinaires et totaux régularisés

Waseem AL HADAD*, Denis MAILLET, Yves JANNOT

LEMTA, Université de Lorraine & CNRS, Vandœuvre-lès-Nancy
ENSEM - 2 Avenue de la Forêt de Haye, TSA 60604 - 54518 Vandœuvre-lès-Nancy cedex *(auteur correspondant : (waseem.al-hadad@univ-lorraine.fr)

Résumé - En thermique linéaire, c'est à dire en présence de diffusion et/ou advection transitoire, et si les paramètres du système sont invariants en temps, les relations entre une source (en température ou puissance) et ses conséquences (température locale) sont convolutives. Le présent travail concerne l'identification d'une fonction de transfert en présence de bruit à la fois sur la sortie, mais aussi sur l'entrée, à partir d'une expérience de calibration basée sur une régularisation par les moindres carrés totaux.

1. Introduction

Les problèmes inverses d'estimation d'entrée, c'est à dire de la "cause" d'une sortie non nulle (problème inverse d'estimation de source) ou de construction de modèle (problème inverse d'identification de modèle), à partir de mesures de sa sortie "la conséquence" correspondante, sont présents dans de nombreux domaines d'ingénierie (mécanique, médical, traitement d'image, ...etc). Pour un phénomène physique linéaire, le modèle mathématique correspondant s'écrit :

$$A x = y \quad (1)$$

où A est la matrice de l'opérateur linéaire de taille $m \times n$, x est le vecteur d'entrée de taille $n \times 1$, y est le vecteur de sortie de taille $m \times 1$. Dans ce travail, on s'intéresse au cas particulier où le système (1) est un système convolutif, ce qui est toujours le cas en thermique, en présence de conduction ou d'advection-diffusion lorsque le système est linéaire à coefficients invariants dans le temps [1]. C'est le cas par exemple pour un échangeur de chaleur en régime transitoire.

2. Problème convolutif en thermique (conduction pure) et sa modélisation

On considère une plaque plane de longueur ℓ et épaisseur e . Cette plaque est supposée initialement à une température uniforme $T_i = T_\infty$, où T_∞ est la température de l'air ambiante, supposée constant. On impose brusquement une source de chaleur créant un flux imposé $q(t)$ sur sa face $x = 0$, (voir Figure 1). L'autre extrémité échange avec l'air ambiant, cet échange est caractérisé par un coefficient d'échange uniforme h . Les deux faces latérales sont isolées (transfert 1D). La plaque est caractérisée par sa conductivité thermique λ , sa chaleur volumique ρc et sa diffusivité thermique $a = \lambda/(\rho c)$.

La résolution de l'équation de la chaleur en 1D transitoire a été réalisée par la méthode des quadripôles (voir [2]). Après avoir effectué le changement de variable $\theta(x, t) = T(x, t) - T_i$, la forme quadripolaire, qui relie le vecteur de température-puissance surfacique de Laplace en $x = 0$ avec celui en $x = \ell$, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

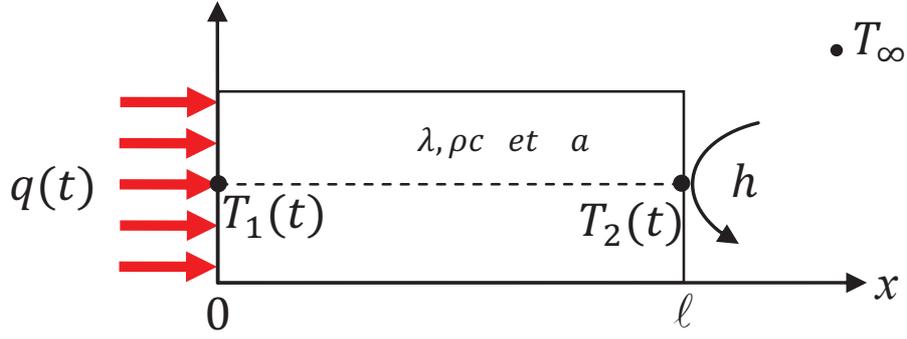


Figure 1 Plaque plane et les conditions aux limites 1D correspondantes

et $A = \cosh(\beta\ell)$, $B = \sinh(\beta\ell)/(\lambda\beta)$, $C = (\lambda\beta) \sinh(\beta\ell)$ et $\beta^2 = \frac{p}{a}$.

La réponse en température θ_2 en $x = \ell$, peut être donc reliée dans l'espace de Laplace à la source en température à $x = 0$, θ_1 , par une fonction de transfert appelée ici transmittance W :

$$\bar{\theta}_2 = \bar{W} \bar{\theta}_1 \quad \text{avec} \quad \bar{W} = \frac{1}{A + Bh} \quad (3)$$

Étant donné que le système est supposé ici LTI (*Linear Time Invariant*), le produit simple dans l'espace de Laplace, équation (3), est un produit de convolution dans l'espace temporel :

$$\theta_2(t) = W(t) * \theta_1(t) \quad (4a)$$

$$= \int_0^t W(t-t') \theta_1(t') dt' = \int_0^t \theta_1(t-t') W(t') dt' \quad (4b)$$

L'équation intégrale de convolution (4b) peut être écrite à chaque temps discret t_k , sous une forme matricielle :

$$\theta_2 = M(W) \theta_1 = M(\theta_1) W \quad (5)$$

où $M(\cdot)$ est une fonction matricielle carrée, de taille $m \times m$ (matrice de Toeplitz) :

$$M(z) = \Delta t \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ z_3 & z_2 & z_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N_t} & z_{N_t-1} & z_{N_t-2} & \cdots & z_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 = z(t_1) \\ z_2 = z(t_2) \\ z_3 = z(t_3) \\ \vdots \\ z_{N_t} = z(t_{N_t}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

où $z = W$ ou θ_1 . Le problème direct consiste donc à calculer le vecteur de sortie (réponse) θ_2 à partir du vecteur d'entrée (source) θ_1 et de la fonction de transfert correspondante W . Par contre, dans un problème inverse de calibration (identification de modèle), on cherche à estimer la fonction de transfert à partir du vecteur d'entrée et du vecteur de réponse.

3. Méthode inverse d'identification de modèle

La fonction de transfert W peut être identifiée à partir du modèle (5). La technique classique, qui permet d'effectuer cette estimation, repose sur la minimisation de la différence entre les mesures et la sortie de modèle.

3.1. Moindres carrés non-régularisés

Il existe deux façons de définir le critère de minimisation (en présence de bruit de mesure) non-régularisé : les moindres carrés ordinaires et les moindres carrés totaux.

3.1.1. Moindres carrés ordinaires (Ordinary Least Squares OLS)

Cette méthode a été publiée la première fois par Legendre [3] et a été ensuite largement employée [4]. Elle repose sur l'hypothèse d'une matrice A parfaitement connue et d'une sortie mesurée issue d'une expérience (bruitée). L'estimation par *OLS* consiste à minimiser l'argument de la différence entre les mesures y^{exp} et la sortie obtenue par le modèle :

$$\hat{x}_{OLS} = \text{Arg}(\min_x \|r\|_2^2) = (A^T A)^{-1} A^T y^{exp} \quad (7)$$

où $r = y^{exp} - y$; $y = A x$; $y^{exp} = y^{exact} + \varepsilon$ et $y^{exact} = A x^{exact}$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne, r le vecteur de résidu et ε le vecteur bruit de mesure. Dans le cas d'une matrice carrée ($m = n$), qui est le seul cas que nous allons considérer ici, on a :

$$\hat{x}_{OLS} = A^{-1} y^{exp} \quad (8)$$

3.1.2. Moindres carrés totaux (Total Least Squares TLS)

Dans certaines applications par exemple dans l'estimation d'une fonction de transfert, non seulement le vecteur de sortie y est bruité mais aussi la matrice de l'opérateur linéaire notée ici A^{exp} . Dans ce cas, une estimation possible consiste à minimiser à la fois le résidu matriciel R associé à l'opérateur linéaire, et celui associé au vecteur de sortie, r . Ce formalisme correspond à la méthode des moindres carrés totaux (TLS) [5] :

$$(\hat{A} | \hat{x}) = \text{Arg}(\min_{A,x} \|[R | r]\|_F^2) \quad \text{avec} \quad R = A^{exp} - A \quad \text{et} \quad A^{exp} = A^{exact} + \varepsilon_A \quad (9)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme (matricielle) de Frobenius (son carré est la somme des carrés des coefficients). $[R | r]$ est la matrice augmentée qui regroupe le résidu associé à A , noté ici R et le résidu associé au vecteur de sortie y , r . ε_A est la matrice du bruit associé à la matrice de l'opérateur linéaire. L'avantage de ce formalisme réside dans le fait qu'il ne privilège aucune incertitude ni sur y et ni sur A , toutes ont la même importance.

3.2. Moindres carrés régularisés

Dans le cas où A est une matrice carrée très mal-conditionnée, l'estimation de x devient très sensible au bruit sur A et sur y . Pour diminuer la forte sensibilité au bruit, nous devons régulariser la matrice de sensibilité A pour R-OLS (si $\varepsilon_A = 0$) ou régulariser la matrice augmentée $[A^{exp} \ y^{exp}]$ pour R-TLS (si ε et $\varepsilon_A \neq 0$). Il existe plusieurs techniques de régularisation dans la littérature, dans ce travail nous présentons seulement la technique qui régularise la matrice de sensibilité en tronquant les plus petites valeurs singulières (TSVD) de la matrice originale.

3.2.1. Moindres carrés ordinaires régularisés par TSVD (T-OLS)

L'estimation par moindres carrés ordinaires régularisés par Décomposition en Valeurs Singulières Tronquée (*TSVD*) ou « *Truncated Singular Value Decomposition* » en anglais [6], est

une technique de régularisation basée sur la décomposition en valeurs singulières (*SVD*) de la matrice A . On considère ici le cas où A est une matrice carrée de taille $m \times m$ non singulière, la décomposition de cette dernière peut être écrite :

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \quad \text{avec} \quad U^T U = U U^T = V V^T = V^T V = \mathbf{I}_m \\ \Sigma &= \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m), \quad \text{où} \quad \Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \dots \geq \Sigma_{m-1} \geq \Sigma_m > 0 \quad (10) \\ U &= [U_1, U_2, \dots, U_m] \quad \text{et} \quad V = [V_1, V_2, \dots, V_m] \end{aligned}$$

où Σ_k , U_k et V_k sont la $k^{\text{ème}}$ valeur singulière, le $k^{\text{ème}}$ vecteur singulier gauche et le $k^{\text{ème}}$ vecteur singulier droit respectivement. L'estimateur des moindres carrés ordinaires OLS peut être écrit :

$$\hat{x}_{OLS} = A^{-1} y^{exp} = V \Sigma^{-1} U^T y^{exp} \quad (11)$$

On partitionne le produit des 3 matrices carrées (U , Σ et V) de l'équation (11) en une somme de deux produits déterminés par un seuil compris entre 1 et m . La partie a correspond aux plus grandes valeurs singulières et la partie b aux plus petites. On obtient :

$$\hat{x}_{OLS} = [V_a V_b] \begin{bmatrix} \Sigma_a^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_b^{-1} \end{bmatrix} [U_a U_b]^T y^{exp} = x^{exact} + \underbrace{(V_a \Sigma_a^{-1} U_a^T + V_b \Sigma_b^{-1} U_b^T)}_{\text{vecteur d'erreur d'estimation}} \varepsilon \quad (12)$$

en ayant remplacé y^{exp} par $y^{exact} + \varepsilon$.

A partir de l'équation (12) on peut conclure que les plus petites valeurs singulières de Σ_b (les coefficients diagonaux de Σ_b^{-1} tendent vers l'infini) sont responsables de l'amplification de l'erreur de mesure, et conduisent à l'explosion de l'estimation. La régularisation par *TSVD* consiste donc à tronquer les plus petites valeurs singulières. Cette modification de la matrice A va engendrer un biais sur l'estimation \hat{x} , mais ce biais va être faible car la partie tronquée est bien plus petite que l'erreur d'estimation avant troncature. La version tronquée de cet estimateur s'écrit, en appelant α_{TO} le paramètre de régularisation par T-OLS :

$$\hat{x}_{T-OLS} = V \Sigma_{\alpha_{TO}}^{-1} U^T y^{exp} \quad \text{où} \quad \Sigma_{\alpha_{TO}}^{-1} = \text{diag}(\Sigma_1^{-1}, \Sigma_2^{-1}, \dots, \Sigma_{\alpha_{TO}}^{-1}, 0 \dots 0) \quad (13)$$

3.2.2. Moindres carrés totaux régularisés par TSVD (T-TLS)

La méthode des moindres carrés totaux régularisés par TSVD ou méthode des moindres carrés totaux tronqués (T-TLS) est similaire à T-OLS. TLS a été introduit par Golub et al. [5]. Sa version régularisée par TSVD (T-TLS) a été donnée par Fierro et al. [7]. La matrice augmentée $[A^{exp} | y^{exp}]$ est remplacée ici par sa meilleure approximation $[A | y]_{\alpha_{TT}}$ de rang α_{TT} . La version tronquée de TLS s'écrit :

$$\hat{x}_{T-TLS} = -V_{12}^{\alpha_{TT}} (V_{22}^{\alpha_{TT}})^T / \|V_{22}^{\alpha_{TT}}\|^2 \quad \text{avec} \quad [A^{exp} | y^{exp}] = U \Sigma V^T \quad (14)$$

où $V = \begin{bmatrix} V_{11}^{\alpha_{TT}} & V_{12}^{\alpha_{TT}} \\ V_{21}^{\alpha_{TT}} & V_{22}^{\alpha_{TT}} \end{bmatrix}$ et $\begin{cases} V_{11}^{\alpha_{TT}} & \text{de taille} & m \times \alpha_{TT} \\ V_{12}^{\alpha_{TT}} & \text{de taille} & m \times (m + 1 - \alpha_{TT}) \\ V_{21}^{\alpha_{TT}} & \text{de taille} & 1 \times \alpha_{TT} \\ V_{22}^{\alpha_{TT}} & \text{de taille} & 1 \times (m + 1 - \alpha_{TT}) \end{cases}$

Le choix de l'hyperparamètre ou du coefficient de régularisation (α_{TO} pour T-OLS et α_{TT} pour T-TLS) est délicat. Une faible régularisation (α_{TO} et α_{TT} élevé) va conduire à une solution qui va rester la plus fidèle possible aux mesures (le résidu tend vers zéro) avec une erreur d'estimation élevée. Inversement, une forte régularisation va aggraver le biais. Ceci signifie qu'il existe un optimum entre les deux. Il existe des critères permettant de définir les valeurs optimum de l'hyperparamètre comme le principe de contradiction de Morozov « *Morozov's discrepancy principle* » ou *L-curve* si on n'a pas d'information sur le bruit de mesure [8].

4. Comparaison entre T-OLS et T-TLS sur un problème convolutif

Dans cette partie, nous allons nous servir de l'approche fonction de transfert appliquée au problème de diffusion pure (problème de transfert thermique dans une plaque plane présenté dans la section 2 pour comparer les performances de T-OLS et T-TLS.

4.1. Résultats sans bruit

Le système modélisé par méthode quadripolaire en section 2.a été simulé par COMSOL [9]. La source $q(t)$ a été appliquée de façon à ce que $\theta_1(t)$ (la température à $x = 0$) varie exponentiellement en temps, suivant la relation :

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-t/\tau}) \theta_1^{ss}, & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

où τ est une constante et θ_1^{ss} est la valeur asymptotique (*steady state*) de $\theta_1(t)$. La réponse en température en $x = \ell$, $\theta_2(t)$ a été calculée à chaque instant t_j où $j = 1$ à m avec $m = t_f / \Delta t$ et Δt est le pas du temps. La variation de la source, $\theta_1(t)$ et la distribution de la réponse $\theta_2(t)$, sont tracées dans la figure (2). Les paramètres de cette simulation sont donnés dans le Tableau (1).

Tableau 1 paramètres de la simulation directe

ℓ (mm)	τ (s)	θ_1^{ss} (K)	t_f (s)	Δt (s)	h (W.m ⁻² .K ⁻¹)	λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	ρc (kJ.m ⁻³ .K ⁻¹)
50	30	30	700	0.5	10	43	3666

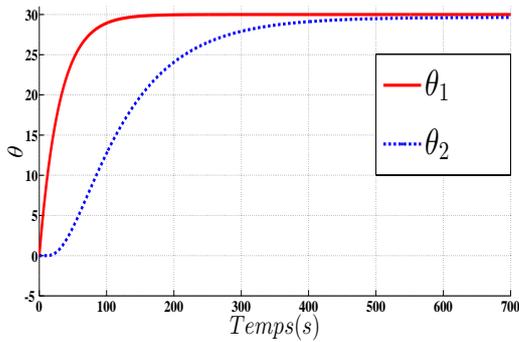


Figure 2 La source, $\theta_1(t)$ et sa réponse $\theta_2(t)$ obtenue par COMSOL

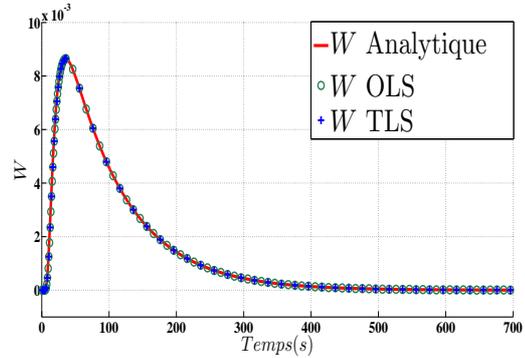


Figure 3 Les transmittances W analytique, estimée par OLS et estimée par TLS

La transmittance W reliant la source $\theta_1(t)$ à sa réponse $\theta_2(t)$ a été calculée analytiquement (via l'expression obtenue par la méthode des quadripôles, expression 3), et a été estimée par OLS et TLS à partir des profils synthétiques $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ générés par COMSOL. L'inversion de Laplace de l'expression analytique de la transmittance a été faite ici par l'algorithme de Hoog [10, 11]. Les transmittances W analytique, estimée par OLS et par TLS sont présentées sur la Figure (3). On voit bien qu'en absence de bruit les méthodes OLS et TLS fournissent une bonne estimation de W .

4.2. Résultats avec bruits

A partir des profils synthétiques $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ (voir Figure 2) et après avoir ajouté des bruits indépendants et identiquement distribués (iid) caractérisés par des écarts types σ_1 et σ_2 respectivement, la transmittance W a été estimée par OLS tronqué (T-OLS) et TLS tronqué (T-TLS). Sur les figures (4 à 6) on présente les transmittances analytique et estimée par T-OLS et T-TLS pour trois cas différents : la réponse $\theta_2(t)$ est bruitée ($\sigma_1 = 0K$ et $\sigma_2 = 1K$), la source $\theta_1(t)$ est bruitée ($\sigma_1 = 1K$ et $\sigma_2 = 0K$) et les deux sont bruitées ($\sigma_1 = \sigma_2 = 1K$) respectivement. Ces figures montrent que les deux techniques d'estimation (T-OLS et T-TLS) donnent pratiquement la même estimation. La présence de bruit au seul niveau de la source a moins d'impact sur la qualité de l'estimation que sa présence au seul niveau de la réponse.

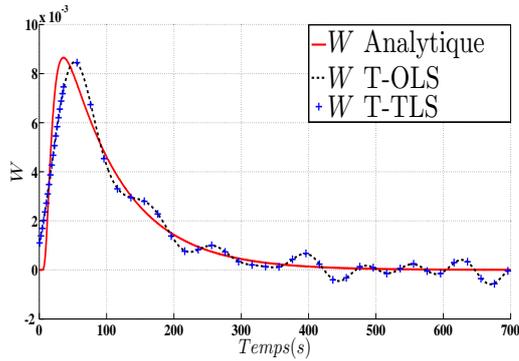


Figure 4 Les transmittances W analytique, estimée par T-OLS et T-TLS, pour $\sigma_1 = 0K$ et $\sigma_2 = 1K$

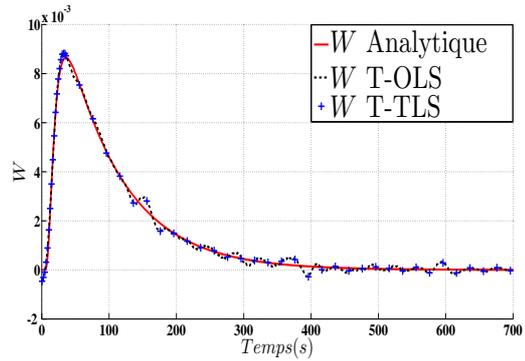


Figure 5 Les transmittances W analytique, estimée par T-OLS et T-TLS, pour $\sigma_1 = 1K$ et $\sigma_2 = 0K$

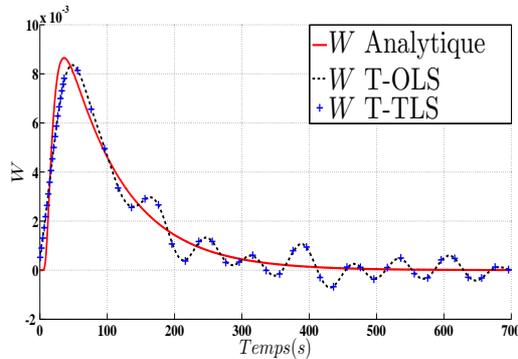


Figure 6 Les transmittances W analytique, estimée par T-OLS et par T-TLS, pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 1K$

Pour vérifier ces résultats, les estimations ont été effectuées pour différentes valeurs de σ_1 et σ_2 . Au lieu de tracer les courbes correspondant à chaque couple de valeur σ_1 et σ_2 , nous avons calculé seulement les erreurs relatives e_w^* correspondantes. L'erreur relative e_w^* quantifie le niveau d'éloignement entre la valeur analytique (exacte) de la transmittance \mathbf{W} et son estimation $\hat{\mathbf{W}}$, et est définie par :

$$e_w^* = \frac{\|\hat{\mathbf{W}} - \mathbf{W}\|_2}{\|\mathbf{W}\|_2} \times 100 \quad (16)$$

Le Tableau (2) récapitule les erreurs relatives e_w^* et les paramètres de régularisation optimum qui correspondent, pour un cas donné à un minimum de e_w^* , obtenus par l'estimation T-OLS et T-TLS pour différents écarts types de bruit σ_1 et σ_2 . Le rapport signal/bruit qui y figure est défini par :

$$SNR_k = \frac{\|\boldsymbol{\theta}_k\|_2}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (17)$$

Ce tableau confirme que les deux techniques de régularisation donnent pratiquement la même estimation sauf pour les cas 3, 4 et 7, ce qui peut être expliqué par le bruit numérique (précision de la machine). Ce tableau confirme également que la présence de bruit au niveau de la sortie dégrade plus la qualité de l'estimation que la présence de bruit de même écart type au niveau de l'entrée.

Tableau 2 e_w^* et $\alpha_{opt.}$ correspondants obtenus par T-OLS et T-TLS pour différents σ_1 et σ_2

Cas	σ_1 (K)	σ_2 (K)	SNR_1	SNR_2	T-TLS		T-OLS	
					e_w^* (%)	$\alpha_{opt.}$	e_w^* (%)	$\alpha_{opt.}$
1	0.01	0.01	2907	2563	3.7	57	3.7	57
2	0.10	0.10	290.2	256.3	6.1	28	6.1	28
3	1.00	1.00	29.3	25.6	19.3	20	19	20
4	10	10	3.1	2.8	38	4	37.9	4
5	0.01	1.00	2907	25.6	18.6	19	18.6	19
6	1.00	0.01	29.3	2563	5.9	59	5.9	59
7	0.01	10	2907	2.8	37.7	4	37.3	9
8	10	0.01	3.1	2563	17.1	467	17.1	467
9	0	1.00	—	25.6	18.6	19	18.6	19
10	0	10	—	2.8	37.7	4	37.3	9
11	1.00	0	29.3	—	5.5	606	5.5	606
12	10	0	3.1	—	17.1	492	17.1	492

5. Modélisation d'un bruit unique pour le cas à entrée et sortie bruitées

Nous supposons ici que l'entrée et la sortie sont chacune affectées par un bruit $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ indépendant et identiquement distribué (i.i.d) :

$$\boldsymbol{\theta}_k^{exp} = \boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad \text{et} \quad cov(\boldsymbol{\varepsilon}_k) = \sigma_k^2 \mathbf{I}_m \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (18)$$

et on utilise les moindres carrés linéaires pour estimer la transmittance W . On a alors, puisque le problème est carré :

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1)(\mathbf{W} + \mathbf{e}_w) = \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_w = \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{W} \quad (19)$$

où \mathbf{e}_w est l'erreur d'estimation. Par soustraction de (5), on obtient, en négligeant les termes du second ordre et en utilisant la commutativité du produit de convolution :

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{e}_w = \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \mathbf{M}(\mathbf{W}) \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} = [\mathbf{I}_m \mid -\mathbf{M}(\mathbf{W})]; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \end{bmatrix}; \quad cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_1^2 \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donc la prise en compte du bruit ε_1 sur l'entrée conduit à remplacer le bruit sur la sortie ε_2 par un bruit ε'_2 unique mais i.i.d. Comme ε_1 et ε_2 sont indépendants, on montre facilement :

$$\text{cov}(\varepsilon'_2) = \mathbf{K} \text{cov}(\varepsilon) \mathbf{K}^T = \sigma_2^2 \left(\mathbf{I}_m + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \mathbf{M}(\mathbf{W}) \mathbf{M}^T(\mathbf{W}) \right) = \sigma_2^2 \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{W}) \quad \text{avec} \quad \varepsilon'_2 = \mathbf{K} \varepsilon \quad (21)$$

Ceci indique qu'avant régularisation, un estimateur de Gauss-Markov, qui minimise la variance de chaque paramètre estimé, serait le mieux adapté :

$$\mathbf{J}_{GM}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{M}^T(\boldsymbol{\theta}_1^{exp}) \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{W}) \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1^{exp})\|_2^2 \quad (22)$$

Malheureusement, lorsque le problème est carré ($m = n$) cet estimateur dans sa version non régularisée est le même que celui des moindres carrés linéaires.

6. Conclusion

Nous avons montré, sur un exemple de transfert diffusif dans un mur, que l'identification d'une fonction de transfert température/température, en présence de bruit sur ces deux signaux, pouvait être estimée par moindres carrés linéaires régularisés par TSVD. La régularisation par moindres carrés totaux de cette déconvolution n'apporte pratiquement rien de plus. Bien que les propriétés stochastiques d'un unique bruit équivalent sur la sortie soient connues, ceci ne permet pas d'améliorer la dispersion des 2 estimateurs précédents. Les travaux futurs ne viseront pas à minimiser l'erreur moyenne quadratique relative, mais plutôt à améliorer la qualité de l'estimation de la fonction de transfert aux premiers instants, car ce sont ces valeurs qui conditionnent la qualité de la simulation dans le problème direct.

Références

- [1] W. Al Hadad, Y. Jannot, and D. Maillet, "Characterization of a heat exchanger by virtual temperature sensors based on identified transfer functions," in *Journal of Physics : Conference Series*, vol. 745, p. 032089, IOP Publishing, 2016.
- [2] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, and C. Moyne, *Thermal quadrupoles : solving the heat equation through integral transforms*. Chichester : New York : Wiley., 2000.
- [3] A. M. Legendre, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. No. 1, F. Didot, 1805.
- [4] W. L. Harter, "The method of least squares and some alternatives : Part i," *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pp. 147–174, 1974.
- [5] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "An analysis of the total least squares problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 17, no. 6, pp. 883–893, 1980.
- [6] D. Petit and D. Maillet, "Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 2," *Techniques de l'ingénieur Mécanique physique*, 2008.
- [7] R. D. Fierro, G. H. Golub, P. C. Hansen, and D. P. O'Leary, "Regularization by truncated total least squares," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, no. 4, pp. 1223–1241, 1997.
- [8] R. C. Aster, B. Borchers, and C. H. Thurber, *Parameter estimation and inverse problems*, vol. 90. Academic Press, 2011.
- [9] *COMSOL Multiphysics version 3.4*.
- [10] F. R. De Hoog, J. Knight, and A. Stokes, "An improved method for numerical inversion of laplace transforms," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, no. 3, pp. 357–366, 1982.
- [11] Q. Wang and H. Zhan, "On different numerical inverse laplace methods for solute transport problems," *Advances in Water Resources*, vol. 75, pp. 80–92, 2015.