

Simulation numérique des grandes échelles dans la convection forcée d'un fluide d'Ostwald de Waele en conduite cylindrique : effet du nombre de Prandtl

P.S. Gnambode¹, M. Ould-Rouis¹, X. Nicolas¹, P. Orlandi²

¹Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME, UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France

²Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, Università La Sapienza, Rome, Italy

Résumé - Le transfert de chaleur dans la convection forcée turbulente d'un fluide d'Ostwald de Waele s'écoulant dans une conduite cylindrique horizontale, chauffée par une densité de flux de chaleur uniforme imposée à la paroi, est analysé à l'aide de simulations numériques des grandes échelles. Le modèle sous-maille de Smagorinsky non-newtonien d'Ohta et Miyashita [J. Non-Newtonian Fluid Mech, 2014] est mis en oeuvre, pour un nombre de Reynolds $Re_s = 4000$, et différentes valeurs de l'indice d'écoulement ($0.75 \leq n \leq 1.2$) et du nombre de Prandtl ($1 \leq Pr_s \leq 100$). L'influence de Pr_s sur diverses statistiques est plus particulièrement étudiée.

Nomenclature

K	consistance, $Pa.s$	<i>Symboles grecs</i>	
n	indice de comportement	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
r	direction radiale, m	γ	taux de cisaillement, s^{-1}
R	rayon de la conduite, m	η	viscosité apparente du fluide, $Pa.s$
Re_{MR}	nombre de Reynolds de Metzner-Reed	λ	conductivité thermique, W/mK
T	température, K	θ	direction azimutale
T_b	température débitante du fluide, K	Θ	température adimensionnelle
U_c	vitesse axiale au centre, $m.s^{-1}$		
y	distance à la paroi, m	<i>Indices et exposants</i>	
z	direction axiale, m	p	paroi

1. Introduction

L'étude de la convection forcée d'un fluide non-newtonien en régime turbulent, dans des conduites chauffées, est d'un grand intérêt en raison des nombreuses applications industrielles (extraction et transport des hydrocarbures, transport de suspensions ou de solutions de polymères dans les industries pharmaceutiques ou de transformation des matières plastiques et du verre, ...). Peu de travaux ont été dédiés à l'étude des transferts de chaleur en écoulement turbulent de fluides non-newtoniens dans les conduites cylindriques. Scirocco et al. [2] ont déterminé expérimentalement le nombre de Nusselt pour l'écoulement d'une solution de CMC (Carboxyméthylcellulose) en régime turbulent dans un tube chauffé par une densité de flux de chaleur constante. L'évolution de la viscosité est donnée par le modèle d'Ostwald de Waele pour l'indice de comportement $n=0,7$. Les mesures ont montré une augmentation du nombre de Nusselt avec le nombre de Reynolds. Kahine et al. [3] ont étudié par simulation numérique l'influence de l'indice de comportement n sur le nombre de Nusselt et ont proposé des corrélations pour le nombre de Nusselt. Quaresma et Lima [4] ont effectué une étude numérique de l'écoulement turbulent des fluides rhéofluidifiants non-thermodépendants dans une conduite cylindrique dont la paroi est soumise à une densité de flux de chaleur constante. Le but était d'étudier l'évolution du nombre de Nusselt en fonction

de l'indice n , du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl. L'étude a fourni les conclusions suivantes :

- à nombre de Reynolds et indice de comportement fixés, le nombre de Nusselt croît avec le nombre de Prandtl ;
- à nombres de Reynolds et Prandtl fixés, le nombre de Nusselt diminue avec les valeurs décroissantes de l'indice de comportement.
- à nombre de Prandtl et indice de comportement fixés, le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de Reynolds croissant.

On s'intéresse ici à la simulation de l'écoulement turbulent pleinement développé d'un fluide d'Ostwald de Waele dans une conduite cylindrique chauffée par une densité de flux de chaleur uniforme. Lorsque les valeurs des nombres de Reynolds et de Prandtl deviennent élevées, les simulations numériques à grande échelle (LES) sont un outil intéressant pour prédire les caractéristiques des champs turbulents. Dans la littérature, les LES d'écoulements de fluides non-newtoniens sont rares. L'une des seules études est celle de Ohta et Miyashita [1]. Ces auteurs ont développé un modèle de turbulence qui peut reproduire l'écoulement de fluides non-newtoniens. Ils ont réalisé des LES avec un modèle de Smagorinsky qu'ils ont modifié et adapté pour s'accorder avec les résultats DNS de ce type d'écoulement. Ils ont montré que leur modèle de Smagorinsky non-newtonien prédit le champ de vitesse turbulent de fluides décrits par les modèles de Casson et d'Ostwald de Waele de manière plus précise que le modèle de Smagorinsky standard.

Dans la présente étude, les simulations LES sont réalisées avec un code en différences finies développé au laboratoire, utilisant le modèle sous-maille de Smagorinsky non-newtonien proposé par Ohta et Miyashita [1], pour un nombre de Reynolds $Re_s = 4000$, et différentes valeurs de l'indice d'écoulement ($0.75 \leq n \leq 1.2$) et du nombre de Prandtl ($1 \leq Pr_s \leq 100$), pour un nombre de Pearson nul (cas d'un fluide non-thermo-dépendant). L'influence de Pr_s sur diverses statistiques (profil de température moyenne, rms et flux de chaleur turbulent, nombre de Nusselt, ...) est analysée. Des visualisations du champ résolu thermique permettent d'analyser l'effet de Pr_s sur les structures turbulentes. L'objectif est de contribuer au développement de modèles turbulents des écoulements de fluides non-newtoniens et des transferts thermiques associés en vue de mieux appréhender et comprendre la dynamique et les transferts de chaleur dans les fluides d'Ostwald de Waele, avec un coût de calcul raisonnable.

2. Formulation mathématique

2.1. Equations

On s'intéresse à l'écoulement turbulent pleinement développé et au transfert de chaleur dans un fluide d'Ostwald de Waele en conduite cylindrique chauffée par une densité de flux uniforme φ_p . Les équations filtrées sont rendues adimensionnelles en prenant comme échelles de vitesse, de longueur et de température, la vitesse axiale au centre du profil de vitesse analytique laminaire, U_{cL} (définie par $U_{cL} = (3n+1)U_b/(n+1)$ où U_b est la vitesse débitante), le rayon de la conduite, R , et la température de référence, $T_{ref} = \varphi_p R / \lambda$, respectivement. Ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re_s} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{\gamma^{n-1} \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)} \right] + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{\Theta} - T_{\theta i}) - \bar{u}_z \frac{d}{dz} \langle T_p \rangle = \frac{1}{Re_s Pr_s} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3)$$

La température adimensionnelle est définie par

$$\Theta = \frac{\langle T_p(z) \rangle - T(\theta, r, z, t)}{T_{ref}} \quad (4)$$

où T_p est la température à la paroi et $\langle \rangle$ représente une moyenne dans le temps et selon la direction azimutale. Le flux de chaleur sous-maille, $T_{\theta i}$, est estimé par : $T_{\theta i} = -\alpha_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$, où

$\alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}$ est la diffusivité thermique turbulente et Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent qui

est constant pour un indice de comportement donné n . En effet, nous avons conduit des calculs LES préliminaires, à l'aide du modèle sous-maille dynamique, afin d'estimer Pr_t : pour $n = 1$ et $n = 1.2$, $Pr_t = 0.7$, et pour $n = 0.75$, $Pr_t = 1.5$. Les nombres de Reynolds et de Prandtl des simulations sont définis par $Re_s = \rho U_{cl}^{2-n} R^n / K_0$ et $Pr_s = K_0 / \rho \alpha R^{n-1} U_{cl}^{1-n}$ respectivement. La viscosité apparente du fluide est décrite par une loi de puissance $\eta = K \gamma^{n-1}$, où K est la consistance et $\gamma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$ est le taux de cisaillement, avec $S_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$ le tenseur des vitesses de déformation. Le lecteur trouvera plus de détails dans la thèse de Gnambode [5].

2.2. Modèle sous-maille

Le tenseur des contraintes sous-maille $\bar{\tau}_{ij}$ est relié au tenseur des vitesses de déformation \bar{S}_{ij} par : $\bar{\tau}_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij}$. Dans le modèle de Smagorinsky non-newtonien de Ohta et Miyashita [1], basé sur la modification des caractéristiques de la viscosité turbulente dans le modèle de Smagorinsky standard, la viscosité turbulente s'écrit $\nu_t = C_s f_s (f_n \Delta)^2 \bar{S}_{ij}$, où Δ est la largeur du filtre, C_s la constante du modèle, f_s la fonction de van Driest utilisée comme fonction d'atténuation des effets de paroi, et $f_n = \eta_p / \bar{\eta}$ est la fonction de correction tenant compte des variations de la viscosité. Les auteurs précisent que l'échelle spatiale pour le fluide visqueux non-newtonien doit être estimée en tenant compte des variations de la viscosité. Ils montrent que l'échelle de longueur de référence pour un fluide non-newtonien est $\eta_p / \bar{\eta}$ fois celle du fluide newtonien, où $\bar{\eta}$ et η_p sont respectivement la viscosité apparente moyenne du fluide non-newtonien et la viscosité à la paroi. Par conséquent, la largeur du filtre Δ doit être multipliée par $\eta_p / \bar{\eta}$.

Notons que lorsqu'on applique ce filtre aux équations de Navier-Stokes dans un écoulement de fluide non-newtonien (pour lequel la viscosité varie dans l'espace), des termes supplémentaires sont générés lors de l'étape de filtrage parce que le tenseur des contraintes est une fonction non linéaire du tenseur de déformation. Dans la présente étude, ces termes supplémentaires ne sont pas considérés. En effet, Ohta et Miyashita [1] ont tracé les profils des composantes du tenseur sous-maille et des termes supplémentaires estimés en filtrant les résultats DNS d'un fluide newtonien et d'un fluide en loi de puissance et en moyennant en temps et en espace dans les directions périodiques (axiale et azimutale). En comparant ces profils, ils ont conclu que les termes supplémentaires, notés \bar{T}_{ij} , sont petits devant les

composantes du tenseur sous-maille $\overline{\tau_{ij}}$: la figure 9 de [1] indique par exemple que le terme supplémentaire \overline{T}_{12} vaut au maximum 7 à 8% de la composante $\overline{\sigma}_{12}$ du tenseur sous-maille.

2.3. Procédure numérique

Dans cette étude, une longueur de la conduite cylindrique $L = 20R$ est choisie afin d'obtenir un domaine de calcul adéquat pour capter et simuler les plus longues structures thermiques. En effet, l'analyse des auto-corrélations des fluctuations de vitesse axiale et des fluctuations de température, dans les directions axiale et azimutale, tendent vers zéro lorsque les séparations atteignent la moitié de la longueur, ce qui signifie que le domaine de calcul est suffisamment large pour simuler les plus gros tourbillons dans l'écoulement ainsi que les plus larges structures thermiques [6].

Des conditions périodiques en z et θ et une condition d'adhérence à la paroi sont considérées. Au voisinage de la paroi, les mailles sont très fines : une loi de raffinement en tangente hyperbolique est employée pour capter les tourbillons de l'écoulement dans la zone proche paroi. L'avancement en temps utilise la méthode à pas de temps fractionné ("fractional step method"). Les schémas Runge-Kutta d'ordre trois explicite et Crank-Nicolson implicite évaluent les termes convectifs et diffusifs respectivement. Le maillage de taille $(N_r \times N_\theta \times N_z) = 65 \times 65 \times 65$ est un bon compromis entre le temps CPU et la précision requise. Les statistiques sont calculées en moyennant dans les directions périodiques et dans le temps. Pour plus de détails, on pourra se référer à [5, 8].

3. Résultats et discussion

Comme il existe peu de résultats dans la littérature sur le champ thermique et les transferts de chaleur dans des fluides non-newtoniens en régime turbulent, il est nécessaire de valider les présentes prédictions LES (obtenues à $Re_{MR} = 4000$) par comparaison aux résultats des écoulements isothermes, en régimes laminaire et turbulent, avant de se pencher sur le cas anisotherme qui est plus complexe. Le lecteur trouvera des validations détaillées dans la thèse de Gnambode [5]. On ne présente dans ce qui suit que quelques validations : la comparaison du champ de vitesse aux résultats DNS de Rudman et al. [6] pour $n = 0.75$ et $Re_{MR} = 3935$ et la comparaison du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt aux corrélations disponibles de la littérature. Ensuite, on analyse l'effet du nombre de Prandtl sur les statistiques pour un fluide rhéofluidifiant et un fluide rhéoépaississant.

3.1.1. Profils de vitesse et de viscosité apparente

L'évolution du profil de vitesse axiale moyenne rapportée à la vitesse de frottement, $U^+ = U / U_\tau$, où $U_\tau = (\tau_p / \rho)^{1/2}$ et τ_p est la contrainte pariétale, en fonction de la distance à la paroi, $y^+ = \rho U_\tau (r - R) / \eta_p$, est illustrée sur la figure 1. Le profil de vitesse simulé est en bon accord d'une part avec le résultat DNS de Rudman et al. [7] pour $n = 0.75$, et d'autre part, avec les lois universelles pour $n = 1$. Notons que le champ de vitesse est le même quelque soit Pr_s car le fluide est non-thermodépendant. L'intensité de la turbulence axiale, Fig.2, concorde également avec celle de la littérature. Le profil de viscosité apparente, Fig.3, montre clairement que pour $n = 1$, on retrouve le comportement newtonien (la viscosité est constante et égale à la viscosité de la paroi), et confirme qu'au centre de la conduite, la viscosité est plus grande pour le fluide rhéofluidifiant : il tend à se comporter comme un solide à l'approche du centre de la conduite, dû au faible taux de cisaillement au centre. Pour $n > 1$, on observe un comportement inverse. Ces tendances sont en accord avec les observations de [7, 8].

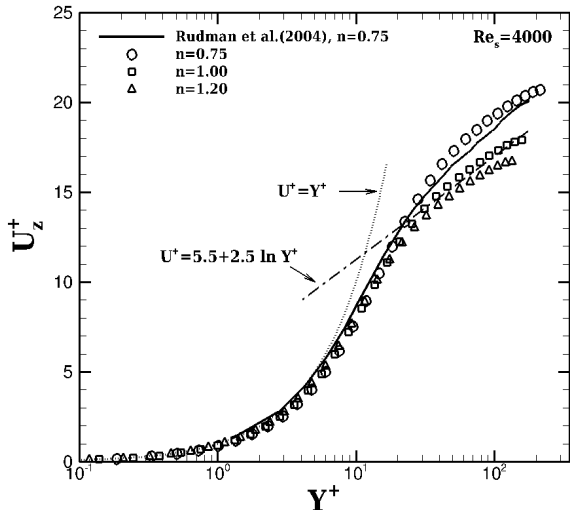


Figure 1 : Profils de vitesse axiale, $\forall Pr_s$

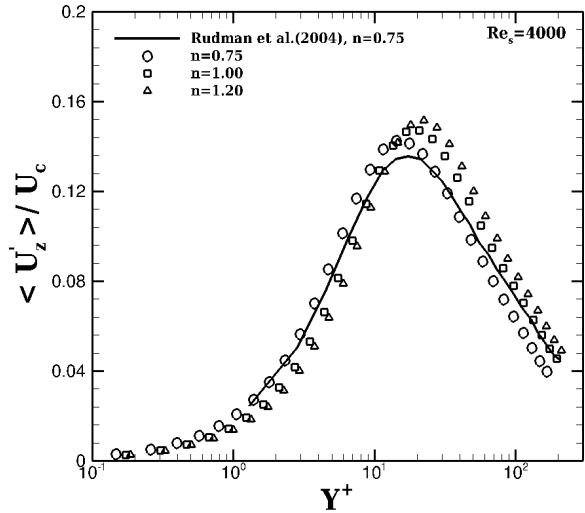


Figure 2 : RMS de vitesse axiale, $\forall Pr_s$

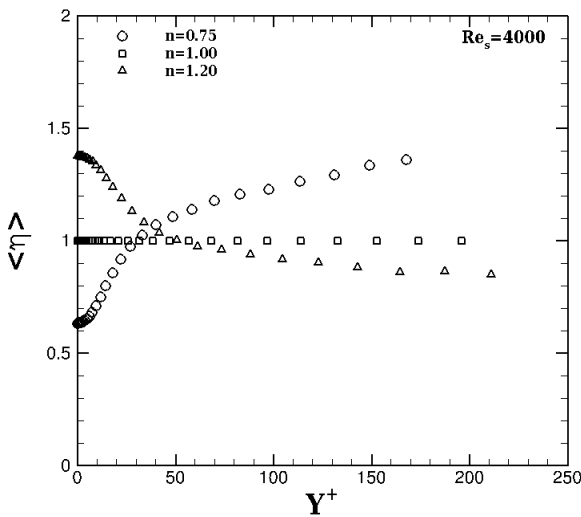


Figure 3 : Profils de la viscosité, $\forall Pr_s$

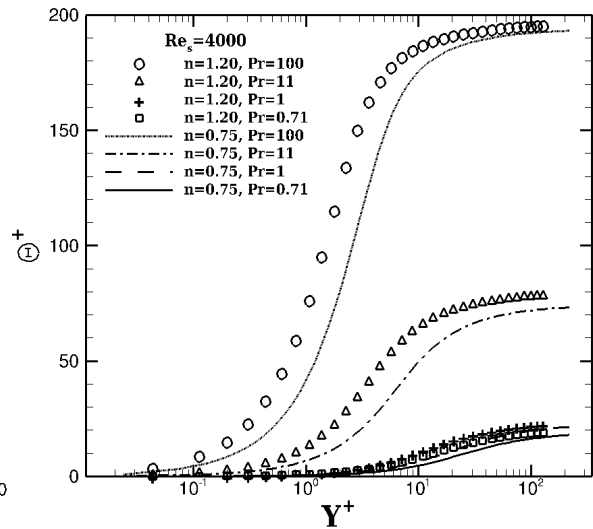


Figure 4 : Profils de température

3.1.2. Champ thermique

Le profil de Θ^+ de la température normalisée par la température de frottement $T_{ref} = \varphi_p / \rho C_p U_\tau$ suit les lois universelles pour $n=1$: la loi linéaire $\Theta^+ = Pr Y^+$ et la loi logarithmique $\Theta^+ = 7.01 + 2.88 \ln Y^+$ (non représentées ici). Lorsque le nombre de Prandtl Pr_s croît, à n fixé, on observe une forte augmentation de la température Θ^+ (Fig.4) : cela correspond à une diminution de la température réelle T au centre de la conduite car $\Theta = (T_p - T) / T_{ref}$. De plus, lorsque Pr_s croît, l'épaisseur de la zone de conduction diminue. Les transferts de chaleur vers le centre de la conduite sont donc plus importants à petit Pr_s , d'autant plus que la viscosité près de la paroi est faible. En effet, pour Pr_s donné, la température Θ^+ du fluide rhéoépaississant ($n=1,2$) est plus élevée que celle du fluide rhéofluidifiant ($n=0,75$). Cela signifie que la température réelle T du fluide rhéofluidifiant est plus élevée que celle du fluide rhéoépaississant : ceci est dû à la variation de la viscosité apparente qui est plus faible à la paroi pour le fluide rhéofluidifiant et permet un meilleur transfert par le flux de chaleur turbulent transverse.

Les valeurs de la rms des fluctuations de température, Fig.5, ainsi que le flux de chaleur turbulent axial, Fig.6, augmentent avec les valeurs croissantes de Pr_s , avec des pics qui se rapprochent de la paroi. Comme $Pr_s = K_0 / \rho \alpha R^{n-1} U_{cL}^{1-n}$, à n fixé, l'augmentation de Pr_s est due à la seule diminution de la diffusivité thermique α . Autrement dit, à n fixé, quel que soit Pr_s , la dynamique de l'écoulement et la viscosité apparente sont identiques. Ainsi, lorsque Pr_s croît, α diminue et le fluide diffuse moins bien la chaleur vers le centre de la conduite. La chaleur s'accumule dans la couche limite thermique et produit, sous l'effet des fluctuations turbulentes, des pics de chaleur intenses en proche paroi. Ceci se traduit par l'augmentation des fluctuations de température à Pr_s grand, Fig.5. Au contraire, pour Pr_s faible, la chaleur est mieux diffusée et convectée vers le centre de la conduite. Le flux de chaleur turbulent axial (Fig. 6) évolue de manière similaire car seul le champ thermique subit l'effet de Pr_s , le champ dynamique étant le même quelque soit Pr_s . Cependant, pour le fluide rhéoépaississant ($n=1,2$), après une augmentation, le pic du flux de chaleur turbulent axial diminue quand $Pr_s=100$. Cela est probablement dû à un maillage trop grossier dans la couche limite thermique car, lorsque Pr_s croît, la sous-couche de conduction diminue beaucoup. Or on sait qu'il est nécessaire qu'au moins un point de calcul soit situé dans cette zone pour modéliser correctement la couche limite. Un maillage plus fin dans le cas $Pr_s=100$, en particulier au voisinage de la paroi, aurait peut-être été nécessaire pour mieux capter les plus fines structures turbulentes et simuler avec plus de précision les champs turbulents dans ce cas.

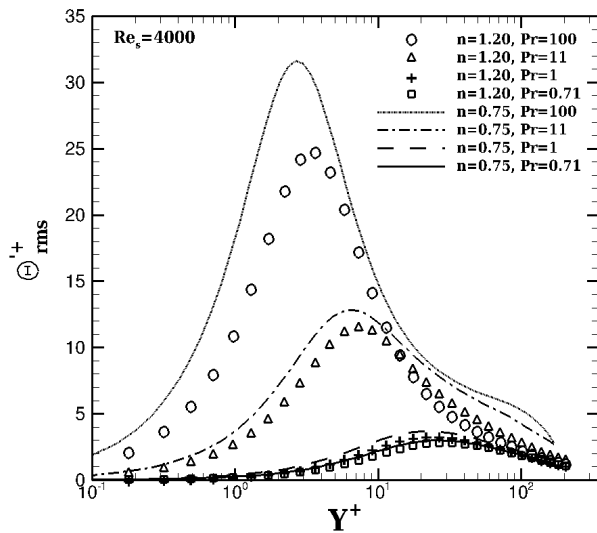


Figure 5 : RMS de température

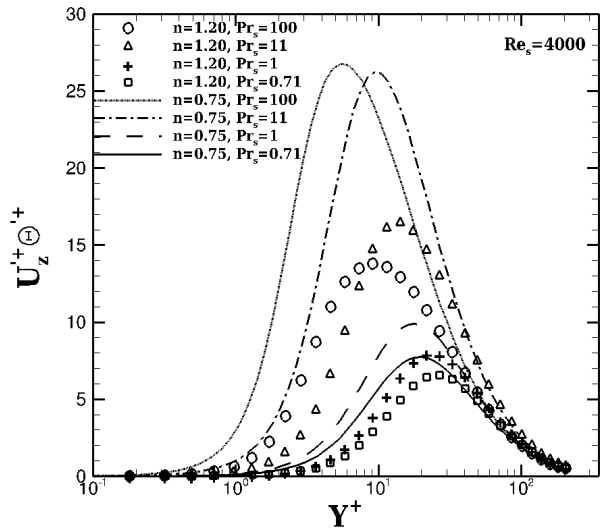


Figure 6 : Flux de chaleur turbulent axial

3.1.3. Coefficient de frottement et nombre de Nusselt

D'après le tableau 1, les prédictions pour le coefficient de frottement, défini par $f = 2\tau_p / (\rho U_b^2)$, sont proches des corrélations de Dodge, Metzner et Gomes [9] avec des écarts allant de 20 % (pour $n = 0,75$) à 15 % (pour $n = 1,2$), de celles d'Ostwald de Waele et Gomes [9] avec des écarts allant de 10 % (pour $n = 0,75$) à 2,9 % (pour $n = 1,2$) et de celles de Hanks et Ricks [10] avec des écarts allant de 11,4 % (pour $n = 0,75$) à 1,2 % (pour $n = 1,2$).

n	Présente LES	Dodge et Gomes [9]	Ostwald et Gomes [9]	Hanks et Ricks [10]
0.71	9.12	7.60	8.24	8.18
1	10.47	8.68	9.99	9.73
1.2	10.94	9.45	11.27	10.81

Tableau 1 : Coefficient de frottement $f \times 10^3$ pour $Pr_s = 1$

A n fixé, le nombre de Nusselt $Nu = hD/\lambda$, où $h = -\lambda(\partial T/\partial r)_R/(T_p - T_m)$, augmente avec les valeurs croissantes de Pr_s , tableau 2. Un bon accord est observé entre les prédictions LES et les résultats numériques de Quaresma et Lima [4] avec un écart maximal de 2%.

Pr_s	$n=0.7$	$n=1$	$n=1.2$	Quaresma et Lima [4] $n=0.7$
0.71	--	16.14	15.48	--
1	--	18.47	17.75	--
2	--	24.48	23.42	--
11	45.41	46.76	45.09	45.3
100	109.69	103.36	101.68	111.9

Tableau 2 : Influence du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt

3.1.4. Visualisations

L'effet du nombre de Prandtl sur les structures thermiques est représenté Fig.7 par les visualisations du champ de température fluctuant, dans le plan (θ, z) , à la position $y^+ \approx 15$, en utilisant la même échelle de couleur pour toutes les sous-figures. Sur l'axe vertical, θ varie entre 0 et 2π .

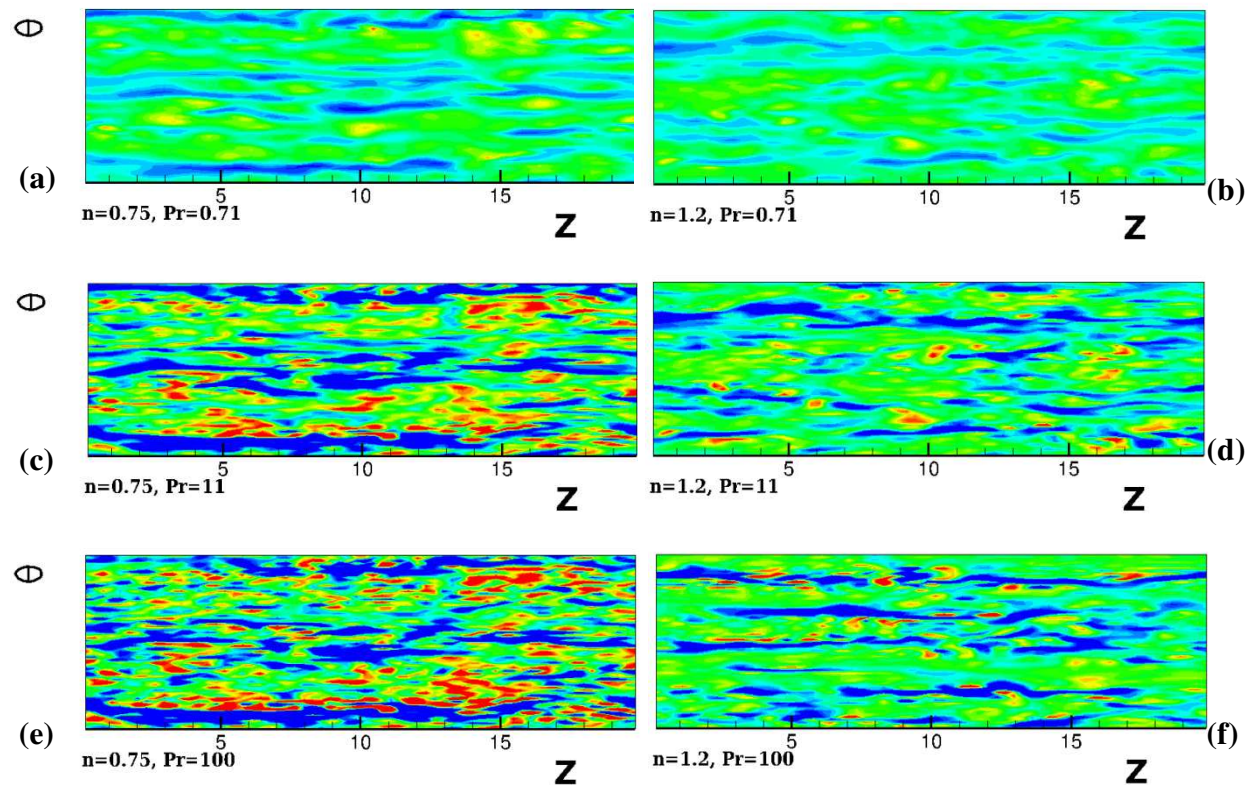


Figure 7 : Visualisations du champ de température fluctuant dans le plan (θ, z) , à la position $y^+ \approx 15$

Le champ de vitesse (non visualisé ici) est le même quelque soit Pr_s car le fluide est non-thermodépendant. Pour un faible Pr_s ($Pr_s = 0.71$), Fig.7a,b, on observe une distribution assez régulière et uniforme des fluctuations de température, avec des zones à intensité plus prononcée et plus contrastée pour le fluide rhéofluidifiant, Fig.7a. En effet, la viscosité du fluide rhéofluidifiant proche de la paroi est plus faible que celle du fluide rhéoépaississant. La chaleur est alors mieux évacuée par les fluctuations radiales. Lorsque $Pr_s = 11$, Fig.7c,d, l'intensité de ces structures thermiques est bien plus accentuée et de nouvelles structures (en

particulier des zones de température plus élevée) apparaissent. Cela est dû à l'accumulation de chaleur dans la couche limite thermique qui est transportée par les fluctuations turbulentes. L'apparition de ces structures est nettement plus marquée dans le cas $n = 0.75$, Fig.7c. Ces tendances s'accroissent avec l'augmentation de Pr_s ($Pr_s = 100$), Fig.7e,f.

4. Conclusion

Dans la présente étude, les transferts thermiques turbulents dans l'écoulement d'un fluide d'Ostwald de Waele (indice de comportement $n = 0.75$ et $n = 1.2$), dans une conduite cylindrique chauffée ont été simulés à l'aide de LES, avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien, pour $Re_s = 4000$, et différents nombres de Prandtl Pr_s . L'objectif était d'analyser l'effet de Pr_s sur le champ thermique.

Pour un indice n donné, la température du fluide diminue fortement au centre de la conduite avec les valeurs croissantes de Pr_s , et l'épaisseur de la sous-couche de conduction diminue également. Les transferts de chaleur conducto-convectifs vers le centre de la conduite sont plus importants à petit Pr_s . Pour Pr_s donné, la température T du fluide rhéofluidifiant est toujours plus élevée que celle du fluide rhéoépaississant, car la viscosité apparente est plus faible à la paroi pour $n = 0.75$ et permet un meilleur transfert turbulent transverse. Pour les deux indices de comportement, l'augmentation de Pr_s entraîne également une amplification des rms des fluctuations de températures, du flux de chaleur turbulent axial, ainsi que du nombre de Nusselt. Ces résultats montrent que les simulations LES, avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien, sont un outil d'analyse approprié pour mieux comprendre le comportement des écoulements de fluides en loi de puissance et les transferts de chaleur liés, avec un coût de calcul réduit comparé à celui des simulations numériques directes.

Références

- [1] T. Ohta et M. Miyashita, DNS and LES with an extended Smagorinsky model for wall turbulence in non-Newtonian viscous fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 206 (2014), 29-39.
- [2] V. Scirocco, R. Devienne et M. Lebouche, Ecoulement laminaire et turbulent d'un fluide pseudoplastique en conduite circulaire. Coefficient d'échange thermique, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, n°1 (1985), 91-99.
- [3] K. Kahine, V.T. Nguyen et M. Lebouche, Etude numérique de l'écoulement et du transfert de chaleur pour les fluides complexes pseudoplastiques thermodépendants, *Les cahiers de rhéologies*, 12, n°3 (1994), 89-93.
- [4] J.N.N. Quaresma et J.A. Lima, Thermally developing turbulent flow of pseudoplastic fluids within circular tubes, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 25, n°8 (1998), 1105-1114.
- [5] P.S. Gnamboe, Simulation des grandes échelles des transferts thermo-convectifs dans les écoulements turbulents d'un fluide non-newtonien en conduite cylindrique, *Université Paris-Est / Marne-la-Vallée*, thèse de Doctorat (2015).
- [6] L. Redjem-Saad, M. Ould-Rouiss et G. Lauriat, Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows: Effect of Prandtl number, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 28 (2007) 847-861.
- [7] M. Rudman, H.M. Blackburn, L.J.W. Graham et L. Pullum, Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 118 (2004), 33-48.
- [8] P.S. Gnamboe, P. Orlandi, M. Ould-Rouiss, and X. Nicolas, Large-Eddy Simulation of turbulent pipe flow of power-law fluids, *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, 54 (2015), 196-210.
- [9] F.J.A.D. Gomes, Hydraulic, Power Law models, calculation method using rational polynomial models, *Technical Meeting on software Developing in Drilling Operations, CAPER/87*, Salvador, Brazil (1987), (in Portugues).
- [10] R.W. Hanks et B.L. Ricks, Transitional and turbulent pipe flow of pseudoplastic fluids, *Journal of Hydronautics*, 9 (1975), 39-44.