

Etude de l'influence des couches limites sur les caractéristiques de la convection thermosolutale en géométrie annulaire horizontale poreuse

Ahmed Ja¹, Abdelkhalek Cheddadi^{1*}

¹Equipe de Recherche en Systèmes Thermiques et Ecoulements Réels
Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Mohammed V University in Rabat, Morocco

*(auteur correspondant: cheddadi@emi.ac.ma)

Résumé - La convection thermosolutale dans un espace annulaire cylindrique horizontal, rempli d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire, a été numériquement étudiée. Les équations gouvernant le problème ont été discrétisées par la méthode des Différences Finies Centrées en utilisant le schéma ADI. Dans le cas d'un espace annulaire de grand rapport de rayons, une transformation conforme est adoptée. Les nouvelles équations décrivant l'écoulement au niveau de la couche-limite ont été résolues par la méthode Keller-Box. Lorsque le nombre de Lewis augmente, une diminution de l'intensité de l'écoulement est notée, due au frottement imposé par la paroi solide sur la couche limite dynamique. Les deux approches numériques montrent que l'augmentation du nombre de Lewis rend la couche limite thermique de plus en plus épaisse, conduisant à une diminution du taux de transfert de chaleur, alors que la couche limite solutale devient plus mince, ce qui favorise le taux de transfert solutal.

Nomenclature

D	Diffusivité massique, m^2s^{-1}
g	Accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
K	Perméabilité du milieu poreux, m^2
Le	Nombre de Lewis
N	Rapport de flottabilité
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
r	Coordonnée radiale adimensionnelle
R	Rapport de rayons
Ra	Nombre de Darcy-Rayleigh
\overline{Sh}	Nombre de Sherwood moyen
T, S	Température et concentration adimensionnelles
u, v	Vitesses adimensionnelles dans la direction radiale et tangentielle

Symboles grecs

α	Diffusivité thermique, m^2s^{-1}
β	Coefficient d'expansion, K^{-1}
ψ	Fonction de courant adimensionnelle
ρ	Densité, $kg.m^{-3}$
ν	Viscosité cinématique, m^2s^{-1}
φ	Angle polaire, rd

Indices / Exposants

i	Cylindre interne
o	Cylindre externe
n	Nombre d'itérations
T	Thermique
S	Solutal

1. Introduction

La convection naturelle a fait l'objet de nombreuses études au cours des dernières décennies, en raison de ses diverses applications dans de nombreux dispositifs technologiques et industriels, comme l'isolation thermique, le transport de produits chimiques dans des réacteurs chimiques à lit garni, le stockage souterrain de déchets nucléaires, le dessalement de l'eau de mer...

Dans de nombreux travaux, la convection naturelle thermosolutale a été investiguée pour différentes configurations: la cavité carrée [1], la cavité annulaire verticale [2-4] et la cavité annulaire horizontale [5]. Ces auteurs ont particulièrement traité l'influence des paramètres adimensionnels, à savoir, le nombre de Rayleigh, Ra , le nombre de Lewis, Le , le rapport de

flottabilité, N , sur l'intensité de l'écoulement et le transfert thermique et solutal. D'autre part, diverses études ont été rapportées dans la littérature sur le problème de la convection thermique / thermosolutale au niveau des couches limites poreuses. Les deux études [6-7] ont présenté les solutions de similarité des équations gouvernantes pour un écoulement autour d'un cylindre horizontal immergé dans un milieu poreux infini. La méthode numérique utilisée dans ces deux investigations est basée sur un schéma numérique de Différences Finies efficace et précis décrit dans [8]. Pour la même configuration, la méthode Keller Box a été utilisée dans [9] pour étudier les caractéristiques de la convection thermosolutale. Cette méthode, appelée "box-scheme", a été développée pour la première fois par [10] pour obtenir une précision d'ordre élevé. Dans [11], la méthode a été détaillée pour l'écoulement à deux dimensions.

La présente étude est consacrée à l'analyse des caractéristiques de la convection thermosolutale dans un espace annulaire horizontal rempli d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire, sous l'effet de la variation du nombre de Lewis. Une étude de l'effet de la paroi solide sur l'écoulement au niveau de la couche limite adjacente à un seul cylindre chaud a été menée dans un but de comparaison et d'analyse des phénomènes présents. Dans cet objectif, les équations décrivant la convection thermosolutale dans un espace annulaire sont transformées pour décrire la convection thermosolutale dans l'écoulement de la couche limite autour d'un cylindre chaud. La résolution des nouvelles équations utilise la méthode Keller Box. D'autre part, la méthode des Différences Finies Centrées est employée pour discrétiser les équations d'origine dans l'ensemble de l'espace annulaire. Une comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes a été menée pour de grands rapports de forme géométriques de l'espace annulaire.

2. Formulations mathématiques et modèles numériques

2.1. Cavité horizontale annulaire

Le modèle physique est constitué d'une cavité annulaire horizontale délimitée par deux cylindres coaxiaux, imperméables et isothermes de rayon interne et externe r_i et r_o respectivement. La Fig.1 illustre le modèle et le système de coordonnées. La température et la concentration imposées sur la paroi interne T_i , S_i et externe T_o , S_o sont considérées constantes et uniformes telles que $T_i > T_o$ et $S_i > S_o$. Le fluide binaire est considéré incompressible, newtonien et satisfaisant l'approximation de Boussinesq:

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_o) - \beta_S(S - S_o)] \quad (1)$$

2.1.1. Formulation mathématique et conditions aux limites

Les équations gouvernant le problème sont l'équation de Darcy et les équations de conservation de l'énergie et des espèces chimiques, définies en forme adimensionnelle par la formulation de la fonction de courant comme suit :

$$\nabla^2 \psi = -Ra \left[\sin \varphi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] + N \left[\sin \varphi \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right] \quad (2)$$

$$\left(\vec{v} \cdot \nabla \right) T = \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\left(\vec{v} \cdot \nabla \right) S = Le^{-1} \nabla^2 S \quad (4)$$

Où T et S sont respectivement la température et la concentration, la fonction de courant Ψ est définie par : $u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, avec u et v les composantes radiale et tangentielle de la

vitesse. Les trois paramètres qui apparaissent dans les Eq.(2-4) sont le nombre de Darcy-Rayleigh, $Ra = \frac{g\beta_T\Delta T K r_i}{\nu\alpha}$, le rapport de flottabilité, $N = \frac{\beta_S\Delta S}{\beta_T\Delta T}$ et le nombre de Lewis, $Le = \frac{\alpha}{D}$.

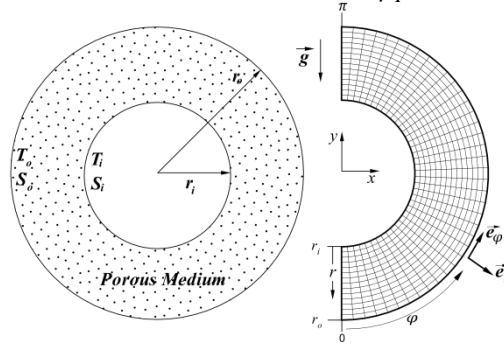


Figure 1 : Schéma du problème et système de coordonnées.

Les conditions aux limites sont définies en forme adimensionnelle par :

$$r = 1 : T = 1, S = 1 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \forall \varphi \quad (5)$$

$$r = R : T = 0, S = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \forall \varphi \quad (6)$$

En tenant compte de la symétrie du problème, seul le demi-espace est considéré dans cette étude, et deux conditions aux limites supplémentaires sont introduites:

$$\varphi = 0 \text{ ou } \pi : \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \forall r \quad (7)$$

Où R est le rapport de rayons défini par: $R = \frac{r_o}{r_i}$.

L'approximation de Boussinesq Eq.(1) peut être écrite en forme adimensionnelle comme suit:

$$\rho = -S - NT \quad (8)$$

Les taux de transfert thermique et solutal peuvent être exprimés par les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens, définis respectivement par les expressions suivantes:

$$\overline{Nu} = -\frac{1}{\pi} \ln R \int_0^\pi \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} d\varphi \text{ et } \overline{Sh} = -\frac{1}{\pi} \ln R \int_0^\pi \left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=1} d\varphi \quad (9)$$

2.1.2. Procédure numérique

Les équations (2-4) ainsi que les conditions aux limites (5-7) ont été numériquement discrétisées avec la méthode des Différences Finies Centrées et résolues par le schéma Alternating Direction Implicit (ADI). Pour assurer une solution stationnaire, la convergence du processus itératif est obtenue lorsque le critère suivant est satisfait dans chaque nœud de la grille: $\frac{\chi_{i,j}^{n+1} - \chi_{i,j}^n}{\chi_{i,j}^n} \leq 10^{-8}$, où χ se réfère à T , S , et ψ , l'exposant n indique le nombre d'itérations et les indices (i, j) représentent un nœud de la grille.

Une étude rigoureuse de l'effet de la taille de la grille sur la précision du calcul montre qu'un maillage de $91 \times 111 (r, \varphi)$ est suffisant pour une cavité de rapport de rayon $R = 2$, alors que, pour $5 \leq R \leq 20$ un maillage plus raffiné $111 \times 401 (r, \varphi)$ est nécessaire.

2.2. Approximation de couche limite

Cette section se rapporte à l'étude des couches limites dynamique, thermique et solutale à proximité de la paroi chaude du cylindre interne horizontal et imperméable, où le système annulaire a été approché selon une perspective locale par un seul cylindre immergé dans un

milieu poreux infini. La Fig. 2 représente le modèle d'écoulement et le système de coordonnées physiques. La surface du cylindre est maintenue à une température et une concentration constantes et uniformes T_i et S_i . Suffisamment éloignée de la paroi solide, le milieu poreux est à T_∞ et S_∞ , avec $T_i > T_\infty$ et $S_i > S_\infty$.

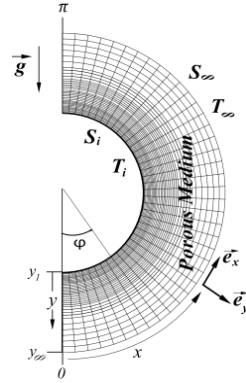


Figure 2: Diagramme schématique du domaine d'un seul cylindre.

2.2.1. Equations

Le système de coordonnées cylindriques (r, φ) est transformé en coordonnées cartésiennes $(x = r\varphi, y = r)$ dans l'étude des phénomènes de couche limite [9]. Les coordonnées x et y sont respectivement mesurées sur la circonférence du cylindre horizontal du point le plus bas pour x et selon la normale à la paroi pour y . La paroi est imperméable (vitesse normale nulle). Dans la présente situation, toutes les approximations adaptées à l'écoulement dans l'espace annulaire restent valables. Les équations (2-4), ainsi que les conditions aux limites (5-7) sont exprimées dans les nouvelles coordonnées en utilisant la transformation suivante [9]:

$$\varphi = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{y}{r} Ra^{1/2}, \quad \text{et} \quad f(\varphi, \eta) = \frac{\psi}{\alpha \varphi Ra^{1/2}} \quad (10)$$

Où φ est la coordonnée tangentielle adimensionnelle, η est la variable de pseudo-similarité, $f(\varphi, \eta)$ est une nouvelle fonction adimensionnelle inconnue.

A l'aide de ces variables, les équations de base Eqs.(2-4) peuvent être transformées pour décrire le problème considéré au niveau des couches limites sous forme adimensionnelle comme suit:

$$f'' = \frac{\sin \varphi}{\varphi} (T' + NS') \quad (11)$$

$$T'' + fT' = \varphi \left(f' \frac{\partial T}{\partial \varphi} - T' \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \quad (12)$$

$$\frac{1}{Le} S'' + fS' = \varphi \left(f' \frac{\partial S}{\partial \varphi} - S' \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \quad (13)$$

Les nouvelles conditions aux limites sont définies par:

$$T = 1, S = 1 \text{ et } f = 0 \text{ pour } \eta = 0, \forall \varphi \quad (14)$$

$$T = 0, S = 0 \text{ et } f' = 0 \text{ pour } \eta \rightarrow \infty, \forall \varphi \quad (15)$$

Les autres quantités physiques d'intérêt sont les nombres locaux de Nusselt et Sherwood et le coefficient local de frottement, qui sont obtenus comme suit:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Ra}} = -T'(\varphi, 0), \quad \frac{Sh}{\sqrt{Ra}} = -S'(\varphi, 0) \text{ et } C_f(\varphi, 0) = \frac{f''(\varphi, 0)}{\sqrt{Ra}} \quad (16)$$

2.2.2. Méthode Keller Box

Les équations 10-12 sont réduites à un système d'équations différentielles de premier ordre, et le système obtenu est numériquement résolu par l'utilisation d'un maillage non-uniforme, de pas $\Delta\varphi = 0.01$ dans la direction $-x$ et avec un pas amplifié de 1% entre deux positions consécutives pour la direction $-\eta$ à partir de $\Delta\eta_1 = 0.001$. À chaque itération, le même critère de convergence adopté pour le cas de l'espace annulaire est utilisé.

3. Résultats et discussion

3.1. Comparaison entre les méthodes ADI et Keller Box

La présente section a pour but d'illustrer la similitude des paramètres caractérisant la convection thermosolutale, à savoir la vitesse adimensionnelle et les taux de transfert thermique et solutal locaux, calculés par les deux méthodes ADI et Keller Box (KB). L'objectif principal de cette comparaison est d'évaluer l'influence de la paroi externe sur le comportement de l'écoulement près de la paroi interne dans le cas de la cavité annulaire. Fig.3. illustre la différence relative de la vitesse tangentielle sur le cylindre interne et du nombre de Nusselt local (sur la même paroi) obtenues par les deux méthodes, $\zeta = \frac{|v(KB) - v(ADI)|}{v(KB)}$. Pour les positions $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, cette figure montre que lorsque le rapport de rayons de l'espace annulaire est important $R \geq 10$, la vitesse tangentielle et le nombre de Nusselt local sur la paroi interne ont le même ordre de grandeur que ceux de la couche limite ($\zeta = 5,36\%$ et $\zeta = 3,89\%$ pour $R = 20$, respectivement pour la vitesse tangentielle et le nombre de Nusselt local). Ce qui indique que, la partie sommitale mise à part, l'écoulement dans l'espace annulaire au voisinage du cylindre interne est faiblement affecté par la présence de la paroi externe. Pour les positions sommitales $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$, en raison de la forte convection dans cette zone, le processus de comparaison entre les deux méthodes n'est plus valide. Le principe de base de la théorie de la couche limite ne peut plus être appliqué, limitant *de facto* la validité de notre étude aux positions $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$.

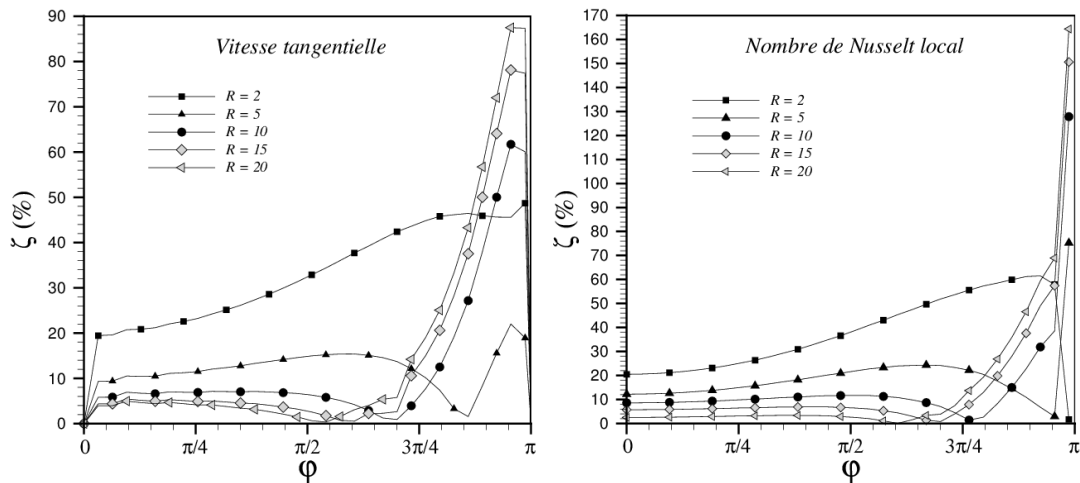


Figure 3: Comparaison entre les méthodes Keller Box et ADI pour $Ra = 50$, $N = 1$ et $Le = 1$

3.2. Effet du nombre de Lewis

L'influence du nombre de Lewis sur les caractéristiques de la convection thermosolutale a été investiguée pour une cavité de rapport $R = 2$ et pour le cas du rapport de flottabilité $N = 1$. La figure 4.a.b représente les résultats obtenus par la méthode ADI lors de la variation du nombre de Lewis :

(a) Pour les faibles valeurs du nombre de Lewis ($Le \ll 1$), le zoom dans la Fig. 4 montre que Ψ_{max} et \overline{Nu} augmentent légèrement avec l'accroissement de Le . Dans cette situation, l'écoulement est monocellulaire caractérisé par une cellule de sens de rotation antihoraire (dans le demi-espace de gauche) occupant la totalité du demi-espace considéré (voir Fig.5). La déformation des isothermes montre que le transfert de chaleur est dominé par le mode de convection (voir la représentation pour $Le = 0.1$). Cependant, la stratification des isoconcentrations indique que le transfert solutal est dominé par la diffusion. La forme des

isodensités montre que le gradient de densité est relativement élevé sur la partie inférieure (resp. supérieure) de la paroi interne (resp. externe), similaire à celui observé à partir des isothermes. Dans les zones de faible gradient thermique, le gradient de densité est contrôlé par le gradient solutal.

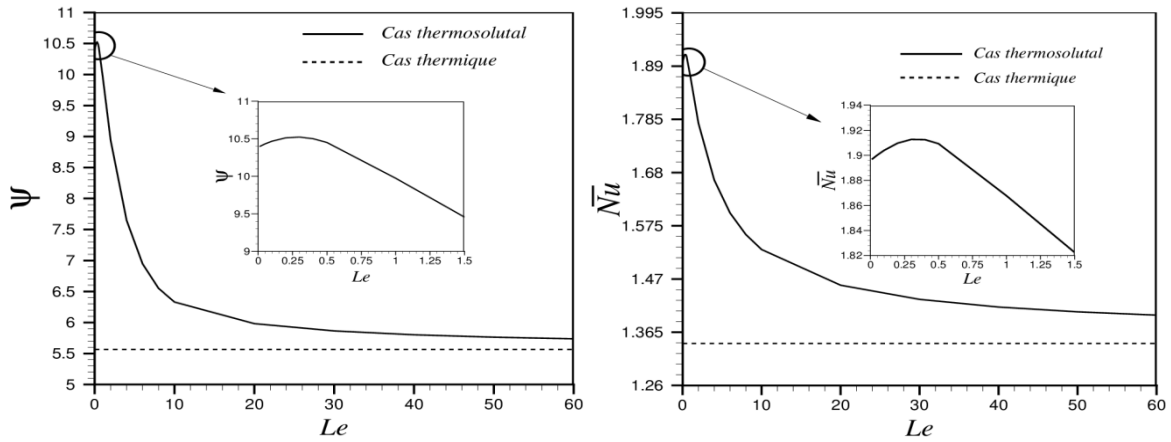


Figure 4: Variation de l'intensité de l'écoulement et le taux de transfert thermique moyen en fonction du nombre de Lewis pour $Ra = 50$, $N = 1$ et $R = 2$

(b) Pour les nombre de Lewis élevés ($Le \gg 1$), Fig. 4 montre que Ψ_{max} et \overline{Nu} diminuent progressivement avec l'augmentation de Le . A une valeur très élevée ($Le = 60$) l'intensité de l'écoulement Ψ_{max} et le taux de transfert thermique \overline{Nu} tendent vers les valeurs caractérisant la convection purement thermique ($N = 0$ et $Le = 1$) avec des écarts de 3.06% et 4.15% respectivement. La forme des isoconcentrations montre que le transport du soluté est dominé par le mode convectif ($\alpha \gg D$), caractérisé par de fortes distorsions au centre de la cavité (cf. par exemple $Le = 10$). Aux valeurs très élevées ($Le = 60$), les gradients solutaux sont limités à la couche limite au niveau des parois actives, tandis que la concentration au centre de la cavité reste constante, $S = 0.5$. Par conséquent, le gradient solutal dans la zone centrale est nul, et seule la force de volume thermique agit dans cette large zone. A partir de la forme des isodensités, il semble que le gradient de densité soit généralement contrôlé par le gradient thermique dans la zone centrale de la cavité et par le gradient solutal au niveau des couches limites près des parois actives.

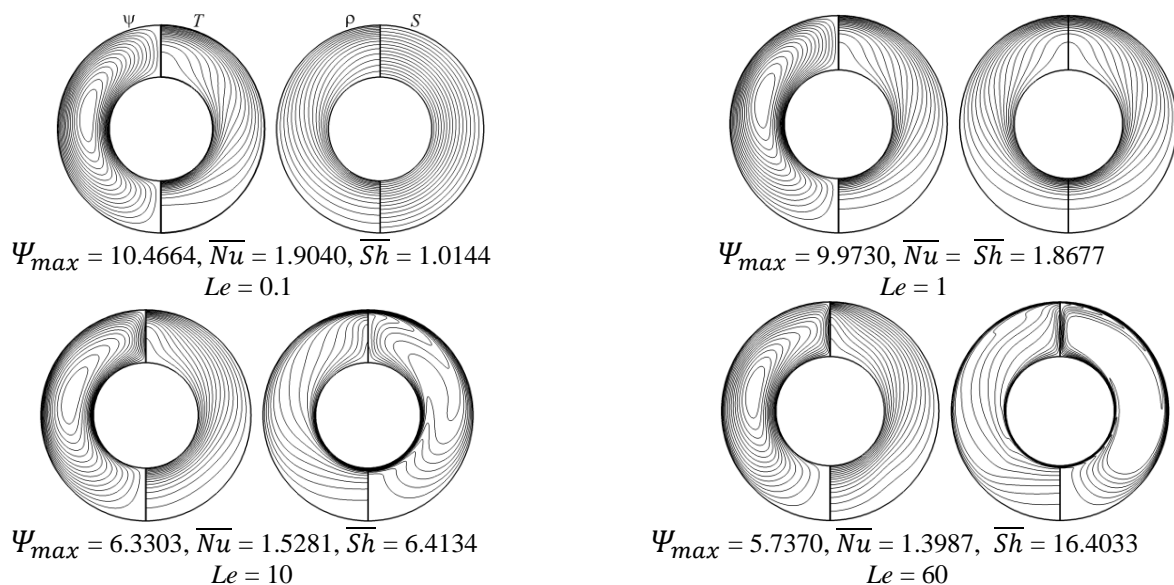


Figure 5 : Lignes de courant, isothermes, isodensités et isoconcentrations pour $Ra = 50$, $N = 1$, $R = 2$

Ces résultats obtenus pour la cavité annulaire sont examinés en termes d'épaisseurs de couches limites dynamique, thermique et solutale pour la configuration cylindre seul (voir Fig.6). Pour $Le \leq 1$ le gradient de f près de la paroi chaude augmente avec l'accroissement de Le , améliorant l'intensité de l'écoulement et le transfert de chaleur. Ce qui est en bon accord avec la légère augmentation de Ψ_{max} et \overline{Nu} observée dans la même gamme de Le , pour l'espace annulaire (voir Fig.4). A l'opposé, pour le cas $Le \geq 1$, les gradients de f et de T décroissent progressivement avec l'accroissement de Le , ce qui défavorise l'intensité d'écoulement et le taux de transfert thermique, comme dans le cas de l'espace annulaire. Ces deux remarques peuvent être interprétées en se basant sur l'effet de la force de freinage appliquée par la paroi solide sur la couche limite adjacente. La Fig.7.a représente la variation du coefficient de frottement local $C_f(\varphi,0)$ le long de la paroi pour différentes valeurs de Le . Il apparaît que C_f augmente avec l'accroissement de Le . Pour un faible nombre de Lewis, l'amplitude des effets visqueux n'est pas suffisante pour vaincre ceux de la convection thermosolutale ($N = 1$). Contrairement au cas $Le \geq 1$, où le coefficient de frottement est d'ordre plus important. On observe dans ce cas une diminution de l'intensité de l'écoulement et du taux de transfert thermique (voir Fig.7.b). Cependant, la Fig.6 illustre que le gradient solutal augmente progressivement avec l'accroissement de Le , impliquant une couche limite solutale plus mince, améliorant le taux de transfert solutal (voir Fig.7.c).

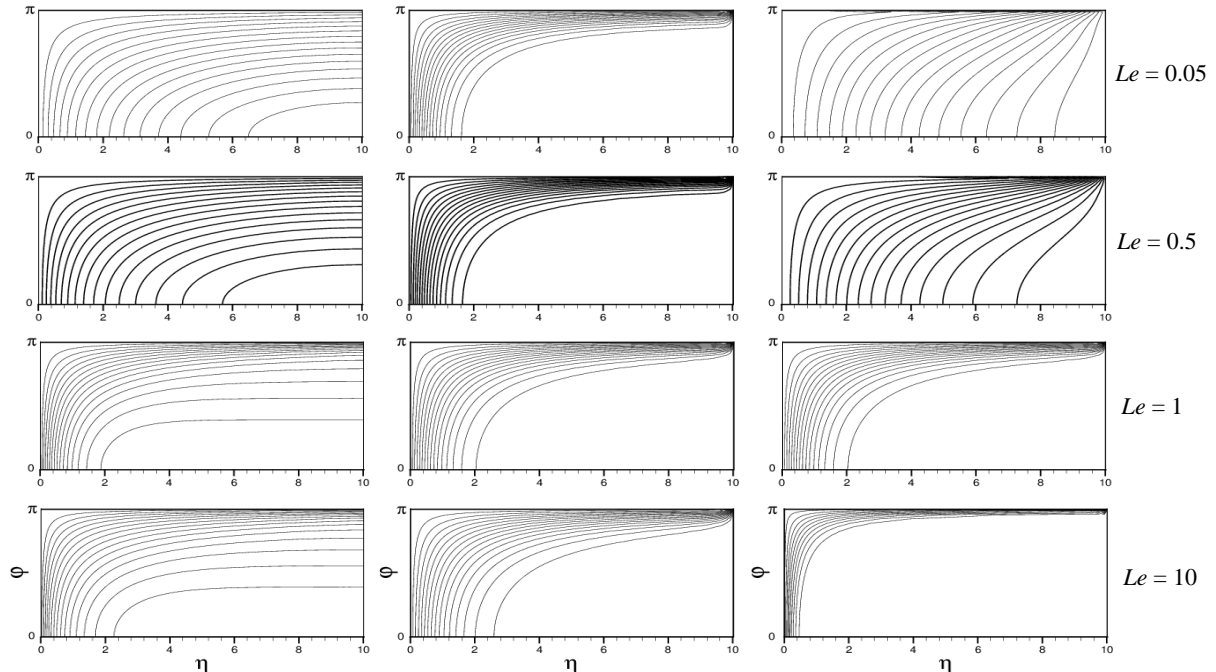


Figure 6 : Lignes de courant (gauche), isothermes (centre), et isoconcentrations (droite), pour $Ra = 50$, $N = 1$ et $\eta_{max} = 10$.

4. Conclusion

Ce papier présente une étude numérique comparative de la convection thermosolutale dans un espace annulaire horizontal rempli d'un fluide binaire (méthode ADI) et autour d'un cylindre horizontal chaud immergé dans un milieu poreux saturé (méthode Keller box). L'étude a permis à travers l'analyse des couches limites dynamique, thermique et solutale au voisinage de la paroi du cylindre interne, de montrer qu'une légère augmentation de Ψ_{max} et \overline{Nu} a lieu pour les valeurs $Le \leq 1$, suivie d'une diminution progressive avec l'accroissement du nombre de Lewis, $Le \geq 1$, en raison de l'effet de la paroi solide (effets visqueux) sur la couche limite adjacente, tandis que le taux de transfert solutal augmente progressivement avec l'augmentation du nombre de Lewis.

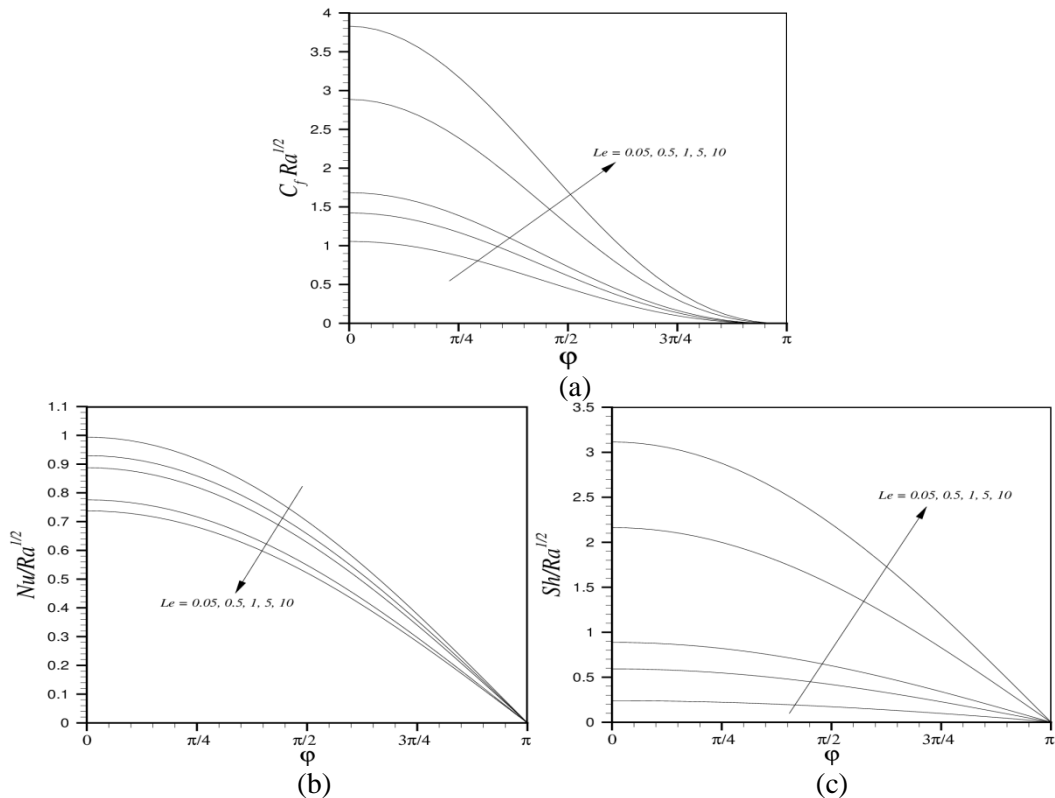


Figure 7 : Variation des paramètres locaux (a): C_f , (b): Nu et (c): Sh pour différents nombre de Lewis pour $N = 1$.

Références

- [1] M. Bourich, A. Amahmid, M. Hasnaoui, Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration, *Energy Conversion and Management*, 45 (2004), 1655–1670.
- [2] H. Beji, R. Bennacer and R. Duval, Double-diffusive natural convection in a vertical porous annulus, *Num. Heat Transfer, Part A*, 36 (1999), 153-170.
- [3] M. Marcoux, M. C. Charrier-Mojtabi, M. Azaiez, Double-diffusive convection in an annular vertical porous layer, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 42 (1999), 2313-2325.
- [4] J. C. Kalita and A. K. Higher order compact simulation of double-diffusive natural convection in a vertical porous annulus, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 5-3 (2011), 357–371.
- [5] A. Ja, J. Belabid, A. Cheddadi, Heat and Mass Transfer in a Saturated Porous Medium Confined in Cylindrical Annular Geometry, *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*, 9-4 (2015), 525-529.
- [6] J. H. Merkin, Free convection boundary layers on axisymmetric and tow-dimensional bodies of arbitrary shape in a saturated porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 22 (1979), 1461-1462.
- [7] I. Pop, M. Kumari and G. Nath, Free convection about cylinders of elliptic cross section embedded in a porous medium, *Int. J. Eng Sci.* 30-1 (1992), 35-45.
- [8] H. B. Keller and T. Cebeci. Accurate numerical methods for boundary-Layer Flows. II: two dimensional Turbulent flows, *AIAA Journal*, 10-9 (1972), 1193-1199.
- [9] K. A. Yih, Coupled heat and mass transfer by natural convection adjacent to a permeable horizontal cylinder in a saturated porous medium, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 26-3 (1999), 431–440.
- [10] H. B. Keller, A new difference scheme for parabolic problems, *Proceedings 2nd Symposium on the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, (1971), 327–350.
- [11] H. B. Keller, Numerical methods in boundary-layer theory, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 10 (1978), 417-433.