

# Simulation numérique tridimensionnelle de la convection mixte au Sein d'un nanofluide remplissant une cavité différentiellement chauffée

Abdelkader BOUTRA<sup>1,2\*</sup>, Karim RAGUI<sup>1</sup>, Nabila LABSI<sup>1</sup>, Youb Khaled BENKAHLA<sup>1</sup>

1. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés, B.P. 32, El-Alia Bab Ezzouar 16111, Alger, Algérie.

2. Ecole Préparatoire aux Sciences Techniques, au lycée Emir Abdelkader, B.P. 474, Place des Martyrs, Alger, Algérie.

\* (A. BOUTRA : [aeKnad@yahoo.fr](mailto:aeKnad@yahoo.fr))

**Résumé** - La présente investigation porte sur l'étude numérique de l'écoulement tridimensionnel et du transfert thermique en mode de convection mixte au sein d'une cavité cubique, entièrement remplie d'un nanofluide (Ag-eau). Toutes les parois sont fixes à l'exception de la paroi horizontale supérieure qui est animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, de gauche à droite. Suite à ces conditions hydrodynamiques et thermiques, un gradient de température s'impose, donnant lieu à une convection mixte. La stratégie numérique utilisée consiste à résoudre les équations du problème à l'aide d'un couplage entre la méthode de Boltzmann sur réseau (LB) à temps de relaxation multiples (MRT), pour la résolution des équations du mouvement, et la méthode des différences finies pour celle de l'énergie.

L'impact des paramètres de contrôle sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique est analysé, à travers les lignes de courant, les isothermes et le nombre de Nusselt moyen. Pour se faire, le nombre de Grashof est fixé à  $10^{+4}$ , tandis que les valeurs du nombre de Richardson varient entre 0,01 et 100 et celles de la fraction volumique en nanoparticules entre 0,00 et 0,10.

**Mots clés** : nanofluide, convection mixte, cavité cubique, méthode de Boltzmann sur réseau (LB).

## Nomenclature

$C_p$	chaleur spécifique du fluide, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	$z$	coordonnée transversale, $m$
$g$	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	$X, Y, Z$	coordonnées adimensionnelles, $(x, y, z/H)$
$Gr$	nombre de Grashof, $= g \beta \Delta T H^3 \rho_f^2 / \mu_f^2$	<i>Symboles grecs</i>	
$H$	hauteur de la cavité, $m$	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2/s$
$h$	dimension de l'obstacle, $m$	$\beta$	coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$
$k$	conductivité thermique, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\varphi$	fraction volumique
$Nu$	nombre de Nusselt	$\mu$	viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$p^*$	pression motrice de fluide, Pa	$\theta$	température adimensionnelle, $(T-T_f)/(T_c-T_f)$
$P^*$	pression adimensionnelle, $= p^* / \rho v_0^2$	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $= C_p \mu_f / k$	<i>Indices et Exposants</i>	
$Ra$	nombre de Rayleigh, $= g \beta \rho_f^2 \Delta T^? H^3 C_p / \mu_f k$	$f$	fluide
$Ri$	nombre de Richardson, $= Gr / Re^2$	$nf$	nanofluide
$U, V, W$	vitesse adimensionnelles, $(u, v, w / V_p)$	$0$	référence
$V_p$	vitesse de la paroi, $m$	$s$	solide
$x$	coordonnée longitudinale, $m$		
$y$	coordonnée transversale, $m$		

## 1. Introduction

L'intensité du transfert thermique dépend principalement de la conductivité thermique et de la chaleur spécifique des fluides caloporteurs. Cependant, la conductivité thermique des fluides non métalliques est très faible. Il s'avère alors que l'ajout de particules nanométriques, telles que les particules d'oxyde métallique (oxyde de Cuivre CuO, oxyde d'Aluminium

$\text{Al}_2\text{O}_3$ , oxyde de Titane  $\text{TiO}_2$ , oxyde de Silicium  $\text{SiO}_2$ , etc.), ou des nanoparticules métalliques (Cuivre Cu, Aluminium Al, Titane Ti, Silicium Si, Argent Ag, etc.) dans un fluide tel que l'eau (la suspension est alors appelée nanofluide), fait augmenter le transfert thermique en comparaison avec le cas des fluides conventionnels (eau, huile, éthylène glycol) et ce, en modifiant de manière significative la conductivité thermique du fluide caloporteur.

Plusieurs recherches en matière de transfert thermique ont été menées au cours des dernières décennies, liées au développement de nouvelles techniques, susceptibles d'améliorer les performances thermiques. Ainsi, l'introduction d'additifs métalliques ou non métalliques aux fluides de base est l'une des techniques utilisées afin d'augmenter la conductivité thermique du mélange. Les suspensions ainsi obtenues peuvent être utilisées dans une multitude d'applications, telles que le refroidissement des réacteurs nucléaires et l'optimisation du transfert thermique au sein d'un échangeur de chaleur.

Ravnik et al. [1] ont étudié la convection naturelle au sein d'une cavité cubique différentiellement chauffée, avec et sans la présence d'une source chaude placée en bas de celle-ci et ce, pour différents types de nanofluides (Cu,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et  $\text{TiO}_3$ ). L'étude s'est focalisée sur l'influence sur le transfert thermique, de l'augmentation de la fraction volumique en nanoparticules ( $\varphi \leq 20\%$ ) et du nombre de Rayleigh ( $10^3 \leq \text{Ra} \leq 10^6$ ).

Sheremet et al. [2] ont présenté des résultats relatifs à l'écoulement tridimensionnel d'un nanofluide dans une cavité cubique, remplie d'un milieu poreux. Les auteurs ont examiné l'influence de six paramètres sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement ; les nombres de Rayleigh et de Lewis, le rapport de poussées, le paramètre du mouvement brownien, la thermophores et le rapport de forme. Les résultats sont présentés sous forme d'isothermes, de lignes de courant et d'évolution du nombre de Nusselt.

Sheikholeslami et Ellahi [3] ont effectué une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité cubique contenant un nanofluide magnétohydrodynamique, en utilisant la méthode de Lattice Boltzmann D3Q19. La paroi inférieure de la cavité est portée à une température constante et uniforme et la paroi supérieure est maintenue à une température plus faible tandis que les autres parois sont adiabatiques. Le calcul numérique était effectué pour différentes valeurs du nombre de Hartmann, de la fraction volumique en nanoparticules et du nombre de Rayleigh. Les résultats ont été présentés sous forme de lignes de courant, d'isothermes et d'évolution du nombre de Nusselt. Les auteurs ont constaté d'une part, que l'application du champ magnétique avec une force opposée à la direction de l'écoulement réduisait les courants de convection en diminuant les vitesses et d'autre part, que le nombre de Nusselt était une fonction croissante du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique en nanoparticules alors qu'il était une fonction décroissante du nombre de Hartmann.

Ravnik et Škerget [4] ont présenté une étude numérique sur la convection naturelle dans une cavité cubique inclinée munie d'un obstacle cylindrique placé en son centre et portée à une température plus élevée que celle des parois. La cavité est remplie d'un fluide chargé en nanoparticules (Cu,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et  $\text{TiO}_2$ ). L'effet du type du nanofluide, de la fraction volumique en nanoparticules (Cu,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et  $\text{TiO}_2$ ), du nombre de Richardson et de l'angle d'inclinaison de la cavité, sur le transfert thermique a été examiné. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt augmentait de façon croissante avec l'augmentation de la fraction volumique en nanoparticules. Une comparaison entre les résultats en configurations bidimensionnelle et tridimensionnelle révélait une baisse du taux de transfert thermique dans la cavité cubique. En outre, l'augmentation de l'angle d'inclinaison faisait perdre la symétrie de l'écoulement autour du cylindre et faisait augmenter le taux de transfert thermique.

Mehrizi et al. [5] ont utilisé la méthode de Boltzmann pour étudier l'effet d'une suspension de nanoparticules, sur la convection mixte dans une cavité carrée, à parois adiabatiques, munie d'orifices d'entrée et de sortie et d'obstacles chaud placés au centre de celle-ci. L'effet de la fraction volumique en nanoparticules (de 0 à 0,03) a été analysé pour différentes positions de l'orifice de sortie. L'étude a été réalisée pour des nombres de Richardson allant de 0,1 à 10 et ce, pour un nombre de Grashof supposé constant (égal à  $10^4$ ). Les résultats montrent que suite à l'addition de nanoparticules au fluide de base et à l'augmentation de la concentration, le taux de transfert thermique augmente et ce, pour les différentes valeurs du nombre de Richardson et les différentes positions de l'orifice de sortie. Ce comportement n'est pas observé, en revanche, pour un nombre de Richardson égal à 10 et une position de l'orifice de sortie bien définie.

L'objectif de notre travail consiste à étudier la convection mixte dans une cavité cubique, remplie d'un nanofluide, par le biais de la méthode de Lattice-Boltzmann (LBM) et ce, en examinant l'effet du nombre de Richardson et de la fraction volumique en nanoparticules sur la distribution de la température et sur la structure de l'écoulement au sein de la cavité.

Vu la simplicité de la programmation et la possibilité de traiter des problèmes complexes, la méthode LBM est très appropriée pour ce genre d'étude. De ce fait, un modèle numérique se basant sur un couplage entre cette méthode et la méthode des différences finies a été développé (Lallemand et Luo [6]; Mezrhab et al. [7], Guo et al. [8]).

## 2. Description du problème étudié

Comme schématisé à travers la figure 1, il s'agit en fait d'un espace confiné de forme cubique (en 3D), pour lequel les parois verticales gauche et droite sont maintenues à des températures constantes mais différentes tandis que les autres parois verticales et horizontales sont adiabatiques. La paroi horizontale supérieure est animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

La cavité est remplie entièrement d'un nanofluide de propriétés physiques et rhéologiques constantes et uniformes, à l'exception de la masse volumique dans le terme de poussée pour laquelle, l'approximation de Boussinesq est adoptée. En conséquence, les équations du mouvement et celle de l'énergie s'en trouvent être fortement couplées, à travers l'introduction de la température dans la projection verticale des équations de l'impulsion.

Le tableau 1 résume les propriétés thermophysiques du fluide de base ainsi celles des nanoparticules.

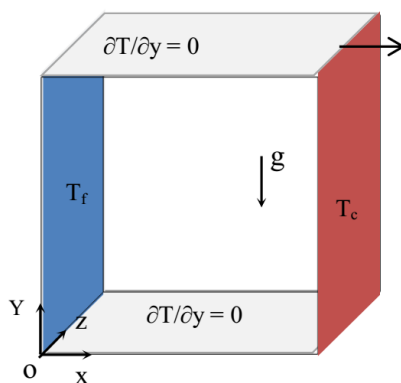


Figure 1 : Schématisation de problème physique et des conditions aux limites associées.

Propriétés physiques	Fluide de base (eau)	Ag
$C_p$ (J/kg K)	4179	235
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	997,1	10500
$k$ (W/m K)	0,613	429
$\beta$ (K) $10^6$	210	19,7

Tableau 1 : Propriétés physiques de l'eau et des nanoparticules d'Ag à  $T = 25^\circ\text{C}$

### 3. Mise en équations du problème physique

En utilisant les variables réduites suivantes :

$$X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, Z = \frac{z}{H}, U = \frac{u}{v_0}, V = \frac{v}{v_0}, W = \frac{w}{v_0}, \theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}, P^* = \frac{p^*}{\rho v_0^2}$$

$$v_0 = V_p$$

Les équations générales de conservation sont respectivement, l'équation de continuité, les équations de l'impulsion suivant X, Y et Z et l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{\mu_{nf}}{\text{Re} \rho_{nf} v_f} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] + \frac{\mu_{nf}}{\text{Re} \rho_{nf} v_f} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right] \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial Y} + \frac{\mu_{nf}}{\text{Re} \rho_{nf} v_f} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \eta_{app} \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right] + \frac{\mu_{nf}}{\text{Re} \rho_{nf} v_f} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \right] - \text{Ri} \frac{(\rho \beta)_{nf}}{\rho_{nf} v_f} \theta \quad (3)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial Z} + \frac{\mu_{nf}}{\text{Re} \rho_{nf} v_f} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right] + \frac{\mu_{nf}}{\text{Re} \rho_{nf} v_f} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right] \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) \quad (5)$$

Où, la masse volumique  $\rho_{nf}$ , la capacité calorifique,  $(\rho C_p)_{nf}$ , ainsi que le coefficient d'expansion thermique  $(\rho \beta)_{nf}$ , et la diffusivité thermique du nanofluide  $\alpha_n$  sont définis par les expressions suivantes [9] :

$$\rho_{nf} = (1 - \phi) \rho_f + \phi \rho_s \quad (6)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi) (\rho C_p)_f + \phi (\rho C_p)_s \quad (7)$$

$$(\rho \beta)_{nf} = (1 - \phi) (\rho \beta)_f + \phi (\rho \beta)_s \quad (8)$$

$$\alpha_{nf} = \frac{k}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (9)$$

La viscosité dynamique, ainsi que la conductivité thermique effective du nanofluide sont déterminées selon les modèles de Brinkman [10] et de Maxwell [11], respectivement :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (10)$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2\phi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \phi(k_f - k_s)} \quad (11)$$

#### 4. Procédure numérique et validation

La résolution numérique des équations ci-dessus est effectuée par le biais de la méthode de Boltzmann sur réseau, couplé avec la méthode des différences finies, proposées par Lallemand et Luo [6].

Nous nous proposons d'utiliser dans la présente étude le modèle à 3 dimensions D3Q19 basé sur un réseau cubique, de pas d'espace  $\Delta x = 1$  et de pas de temps  $\Delta t = 1$ , ce qui donne une échelle de vitesse  $\lambda = \Delta x / \Delta t = 1$  (Ameziani et al. [12]). Chaque motif du réseau est caractérisé par dix-neuf vitesses discrètes ( $c_i, i \in \{0, \dots, 18\}$ ).

$$c_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), & i = 1 \text{ à } 6 \\ (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1), & i = 7 \text{ à } 18 \end{cases} \quad (12)$$

En outre, un maillage  $81 \times 81 \times 81$  suivant X, Y et Z, respectivement sera adopté.

De manière à vérifier la fiabilité de nos simulations numériques quant au phénomène de convection, nous avons confronté nos résultats à ceux Tony et al. [13] et ceux de Ravnik et al. [1] (Figures 2 et 3), et ce en considérant une cavité cubique fermée et différentiellement chauffée, remplie d'air (Figure 2) ou d'un nanofluide (Figure 3). Les résultats obtenus sont très satisfaisants, étant donné le faible écart relatif observé, qui ne dépasse pas dans tous les cas 3 %. Ainsi, nous adopterons ce code pour simuler la suite des résultats.

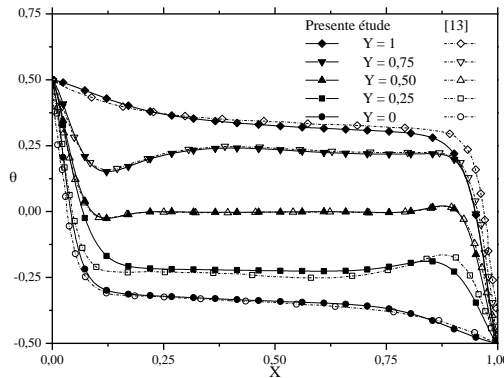


Figure 2 : Profils de température pour différents plans horizontaux Y.  $Pr = 0,71$  ;  $Ra = 10^6$  ;  $Z = 0,50$ .

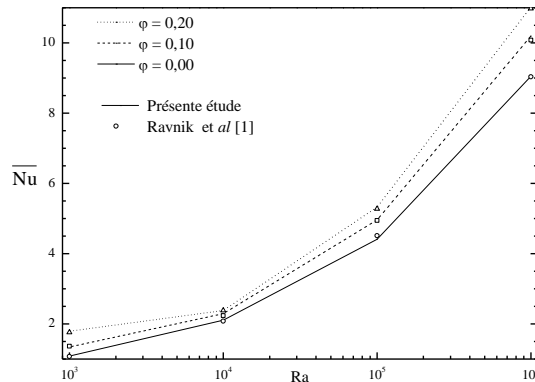


Figure 3 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $|\overline{Nu}|$  en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes fractions volumiques en nanoparticules.  $Pr = 6,20$ .

## 5. Résultats et Interprétation

### 5.1. Structure hydrodynamique et thermique

La figure 3, représente le comportement hydrodynamique (lignes de courant : colonne de gauche) et thermique (isothermes : colonne de droite) du nanofluide (Eau-Ag) pour différents nombres de Richardson (0,01 ; 1 ; et 100) et différentes valeurs de la fraction volumique ( $\phi = 0$  et 0,1).

La structure des lignes de courant est caractérisée par la présence d'une seule cellule qui occupe toute la cavité et dont le centre est d'autant plus éloigné de la paroi active que le nombre de Richardson est grand.

Lorsqu'on introduit une fraction de nanoparticules au fluide de base, nous remarquons qu'en comparaison avec le fluide de base, l'étendue de la région occupée par une cellule, correspondant à une même fonction de courant, est plus importante dans les cas des convections forcée et mixte, contrairement au cas de la convection naturelle où cette étendue est réduite.

Les isothermes de la figure 4 montrent que pour  $Ri = 0,01$ , la profondeur de pénétration du flux thermique n'est pas importante et son effet ne se fait sentir qu'au voisinage de parois actives, avec un resserrement des isothermes (en particulier au niveau de la région inférieure de la paroi gauche et supérieure de la paroi droite), impliquant une épaisseur réduite de la couche limite thermique. En effet, dans le cas d'une convection forcée dominante, les courants ascensionnels (et descensionnels), transportant le fluide chaud vers le haut de la cavité (et le fluide froid vers le bas) sont très faibles. Le mouvement de translation de la paroi, bien qu'important, n'arrive pas à entraîner dans son mouvement de grandes quantités de fluide chaud.

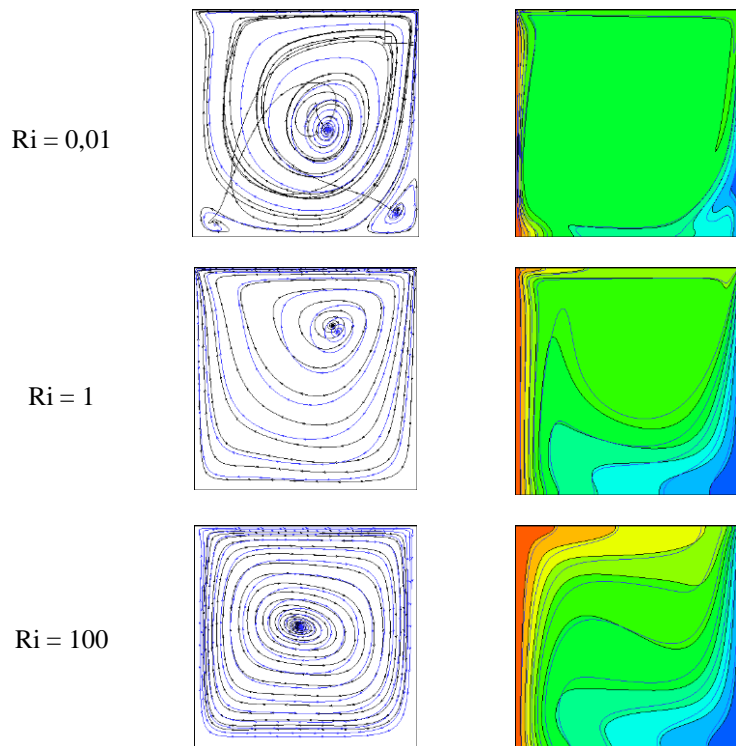


Figure 4 : Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour différents Richardson,  $X = 0,5$  ; —  $\phi = 0,1$  ; —  $\phi = 0$ .

Pour  $Ri = 1$  et  $Ri = 100$  en particulier, on note, contrairement à ce qui a été observé pour  $Ri = 0,01$ , une profonde pénétration du fluide chaud, vers la paroi droite (froide), par le haut et, inversement, celle du fluide froid par le bas étant donné les grandes quantités de fluide chaud soulevées par les courants de convection, puis entraînées par la paroi dans son mouvement.

## 5.2. Transfert thermique

La figure 5 trace l'évolution du nombre de Nusselt, moyenné le long de la paroi chaude, en fonction de la fraction volumique en nanoparticules (de  $\phi = 0$  à  $0,10$ ) et pour différents nombres de Richardson.

Quel que soit le mode de convection, le nombre de Nusselt moyen augmente de manière monotone en fonction de la fraction volumique en nanoparticules. Cette augmentation est d'autant plus importante que le nombre de Richardson est faible ( $Ri = 0,01$ ), c'est à dire en mode de convection forcée (dominante). En mode de convection naturelle dominante, en d'autres termes, lorsque l'effet d'entraînement de la paroi n'est plus dominant, d'importantes quantités de fluide chaud sont pulsées vers les régions supérieures et adjacentes à la paroi verticale chaude, sous l'effet de la poussée thermique (Figure 4), mais ne sont pas évacuées vers la paroi froide. Les gradients pariétaux de température s'en trouvent alors diminués par rapport à ceux relatifs au mode de convection forcée où les forces de poussée thermique sont négligeables, réduisant de manière importante, les quantités de fluide chaud ascendantes.

Il est intéressant de noter que la présence des nanoparticules améliore considérablement le transfert thermique. En effet, on note une augmentation maximale des échanges thermiques atteignant 37% dans le cas  $Ri = 0,1$  ; 22,5% dans le cas  $Ri = 1$  et 20% dans le cas  $Ri = 10$  et ce, pour une fraction volumique en nanoparticules  $\phi = 0,10$ .

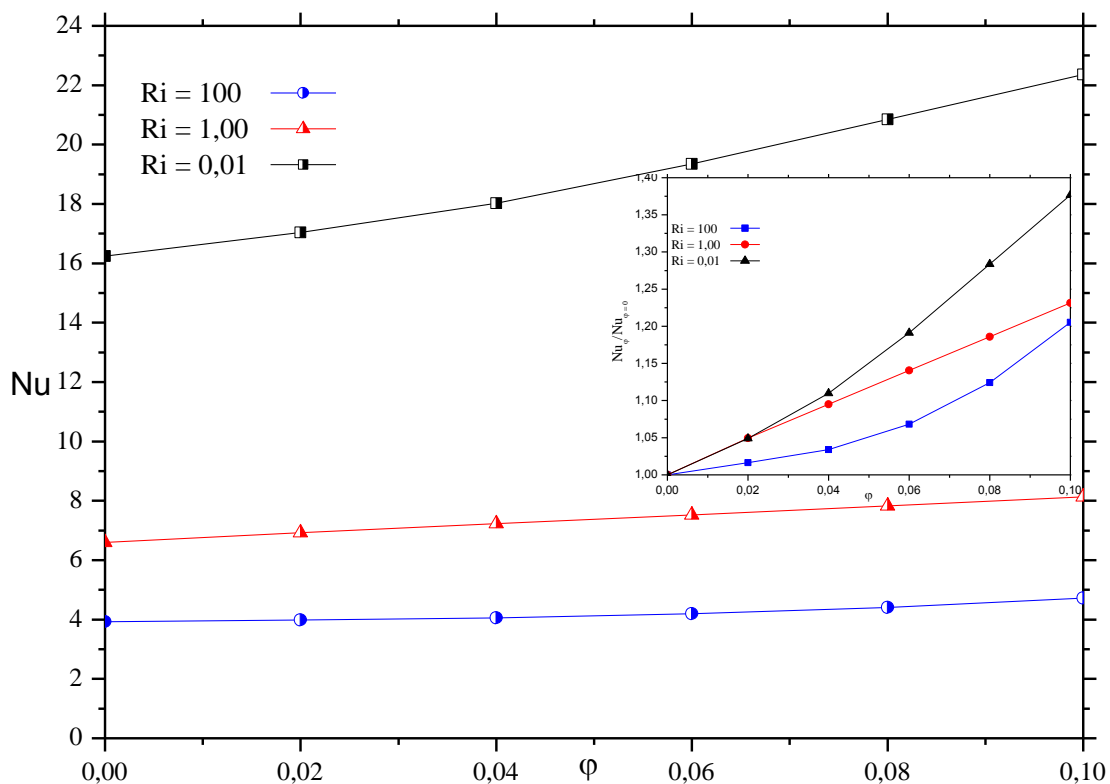


Figure 5 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de la fraction volumique pour différents nombres de Richardson.  $Gr = 10^4$ .

## Conclusion

Dans cette étude nous avons mis en évidence l'effet du mode d'écoulement et de la fraction volumique en nanoparticules sur les champs hydrodynamique et thermique de l'écoulement, au sein d'une cavité cubique remplie entièrement d'un nanofluide (eau-Ag en l'occurrence). Les résultats obtenus montrent, globalement, que la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement au sein de la cavité, subit d'importantes modifications lorsque varie la fraction volumique en nanoparticules et le nombre de Richardson. En outre, l'augmentation de la concentration du nanofluide permet d'améliorer le transfert thermique.

## Références

- [1] J. Ravnik, L. Škerget, M. Hriberšek, Analysis of three-dimensional natural convection of nanofluids by BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 34, Pages 130-154, 2010.
- [2] M.A. Sheremet, I. Pop, M.M. Rahman, Three-dimensional natural convection in a porous enclosure filled with a nanofluid using Buongiorno's mathematical model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 82, Pages 396 – 405, 2015.
- [3] M. Sheikholeslami et R. Ellahi, Three dimensional mesoscopic simulation of magnetic field effect on natural convection of nanofluid, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 87, Pages 799 – 808, 2015.
- [4] J. Ravnik, L. Škerget, A numerical study of nanofluid natural convection in a cubic enclosure with a circular and an ellipsoidal cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 89, Pages 596 – 605, 2015.
- [5] A. Abouei Mehrizi, M. Farhadi, H. Hassanzade Afroozi, K. Sedighi, A. A. Rabienataj Darz , *Mixed convection heat transfer in a ventilated cavity with hot obstacle, Effect of nanofluid and outlet port location*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Volume 39, Pages 1000 – 1008, 2012.
- [6] Lallemand P. et L.S. Luo, Hybrid finite-difference thermal lattice Boltzmann equation, *Int. J. Modern Physics B*, Volume 17 (1-2), Pages 41-47, 2003.
- [7] Mezrhab A., M. Bouzidi, P. Lallemand, Hybrid lattice Boltzmann finite-difference simulation of convective flows, *Computer and Fluids*, Volume 33, Pages 623-641, 2004.
- [8] Y. Guo, R. Bennacer, S. Shen, D. E. Ameziani, M. Bouzidi. Simulation of mixed Convection in a slender rectangular cavity with a Lattice Boltzmann Method, . *Int J Numer Meth heat and Fluid flow*, Volume 3, 227-248,2010.
- [9] A. Arefmanesh, M. Amini, M. Mahmoodi, M. Najafi, Buoyancy-driven heat transfer analysis in two-square duct annuli filled with a nanofluid, *Europ. J. Mech. B/Fluids*, Volume 33, Pages 95-104, 2012.
- [10] H.C. Brinkman, the viscosity of concentrated suspensions and solutions, *J. Chemical Physics*, Volume 20, Pages 571-581, 1952.
- [11] J.C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. II, *Oxford University Press, Cambridge, UK* , Volume 54, 1873.
- [12] D. E. Ameziani, Y. Guo, R. Bennacer, M. El Ganaoui, M. Bouzidi. Competition between Lid-Driven and Natural Convection in Square Cavities investigated with a Lattice Boltzmann Method, *Computational Thermal Sciences*, Volume 2(3), Pages 269-282,2010.
- [13] W.H. S. Tony, L. Reui-Kuo, *Three-dimensional bifurcations in a cubic cavity due to buoyancy-driven natural convection*. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Volume 54, Pages 447 – 467, 2011.