

Evaluation et analyse de l'entropie générée par un écoulement anisotherme

Jean-Marc AVELLANEDA^{1*}, Quentin NICOLAU¹, Marc DAUMAS¹, Pierre NEVEU¹,
Françoise BATAILLE¹

¹PROMES CNRS, Rambla de la thermodynamique, Tecnosud, 66100 Perpignan

* (auteur correspondant : jean-marc.avellaneda@promes.cnrs.fr)

Résumé - Afin d'optimiser les récepteurs solaires des centrales thermodynamiques à concentration, il importe de comprendre les écoulements turbulents convectifs fortement anisothermes. L'analyse de l'entropie générée est un moyen d'investigation puis d'optimisation de leur performance. La présente étude envisage cette problématique dans le cadre simplifié de la couche limite laminaire située au-dessus d'une plaque à température différente de l'écoulement. Le fluide à vitesse et température fixées dans la zone d'écoulement libre, subit en proche paroi et dans la couche limite les effets thermiques et visqueux qui sont générateurs d'entropie. Nous étudions l'influence des paramètres thermiques (température de paroi et écart de température entre la paroi et l'écoulement libre) sur l'importance et la composition de la génération d'entropie locale et totale dans la couche limite.

Nomenclature

T_∞ Température de l'écoulement libre, K

T_w Température de paroi, K

ΔT Ecart de température $T_w - T_\infty$, K

U_∞ Vitesse de l'écoulement libre, $m.s^{-1}$

f Solution de l'équation de Blasius (7)

u, v Composantes de la vitesse, $m.s^{-1}$

x, y Coordonnées cartésiennes, m

Ec Nombre d'Eckert $U_\infty^2 / (C_p \Delta T)$

Pr Nombre de Prandtl ν / α

Re_x Nombre de Reynolds local $U_\infty x / \nu$

X_{ch} Indice : conduction horizontale

X_{cv} Indice : conduction verticale

X_f Indice : frottement visqueux

Symboles grecs

α Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$

η Variable de similarité (5)

θ Température adimensionnée (8)

μ Viscosité dynamique, $Pa.s$

ν Viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$

τ Paramètre thermique $(T_w / (T_w - T_\infty))$

Φ Facteur intervenant dans le terme de dissipation visqueuse de l'énergie, s^{-2} (11)

ψ Fonction courant, $m^2.s^{-1}$

Taux d'entropie générée

\dot{S}_{gen}''' Taux volumique, $W.K^{-1}.m^{-3}$

\dot{S}_{gen}'' Taux surfacique, $W.K^{-1}.m^{-2}$

\dot{S}_{gen}' Taux linéique, $W.K^{-1}.m^{-1}$

S_3, S_2, S_1 : Taux adimensionnés associés respectivement à chacun des taux ci-dessus

1. Introduction

L'optimisation des récepteurs solaires de centrales solaires thermodynamiques à concentration suppose de maximiser l'échange de chaleur entre le fluide caloporteur et les parois exposées au rayonnement solaire concentré, tout en minimisant les pertes d'énergie par frottement visqueux. Cet optimum peut être recherché en employant les techniques de minimisation de l'entropie générée durant le processus d'échange [1], la perte de puissance utile étant directement liée au taux de production d'entropie du fait des irréversibilités.

L'optimum entropique peut être recherché à l'aide d'une méthode variationnelle [2]. La connaissance du champ d'entropie au sein de l'écoulement permet de connaître les lieux et paramètres à optimiser.

Les récepteurs solaires sont le siège d'écoulements turbulents fortement anisothermes et asymétriques complexes [3][4][5] et il est utile d'effectuer une analyse du champ d'entropie dans une configuration plus abordable en premier lieu. La théorie de la couche limite [6][7] offre un cadre idéal pour une première approche.

Après avoir rappelé les équations gouvernant la couche limite laminaire, nous dérivons les expressions de la production d'entropie et étudions son importance, sa composition relative entre facteurs thermiques et visqueux ainsi que sa dépendance en fonction du rapport entre la température de paroi et l'écart de température entre la paroi et l'écoulement libre.

2. Equations gouvernant l'écoulement

Nous considérons dans la présente étude l'écoulement stationnaire 2D d'un fluide incompressible formant une couche limite laminaire au-dessus d'une plaque plane isotherme (Figure 1). En dehors de la couche limite, dans la zone d'écoulement libre, la vitesse du fluide U_∞ est constante et uniforme ainsi que sa température T_∞ . La plaque plane présente une température de surface uniforme et constante T_w , supposée supérieure à T_∞ . Les propriétés thermo-physiques du fluide sont considérées constantes et indépendantes de la température. Le terme de dissipation visqueuse est négligé dans l'équation de l'énergie.

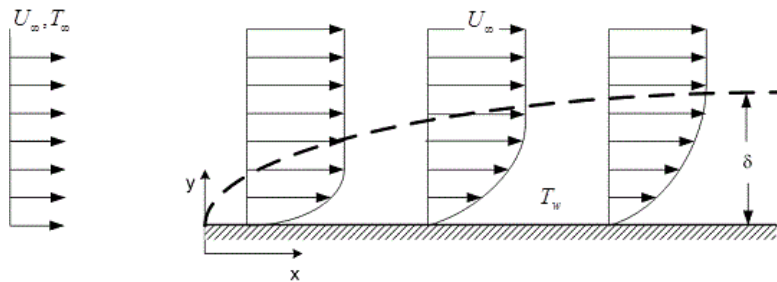


Figure 1 : géométrie de l'écoulement

Dans cette configuration, les équations de Navier-Stokes prennent une forme simplifiée [8], ν étant la viscosité cinématique et α étant la diffusivité thermique :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0, v(x,0) = 0, T(x,0) = T_w \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = U_\infty, \lim_{y \rightarrow \infty} T(x,y) = T_\infty \end{aligned} \quad (4)$$

Après introduction d'une fonction de courant ψ telle que $u = \partial\psi/\partial y$ et $v = -\partial\psi/\partial x$, l'équation de continuité (1) est respectée et le système différentiel (2) et (3) peut être ramené à un jeu d'équations à une seule variable adimensionnée η , en appliquant la méthode de similarité :

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (5)$$

$$\psi = f(\eta) \sqrt{\nu x U_\infty} \quad (6)$$

En injectant (5) et (6) dans (2), on aboutit à l'équation de Blasius :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (7)$$

De même, en définissant une température adimensionnée $\theta(\eta)$ et en l'injectant dans (3), on aboutit à la seconde équation différentielle à résoudre, Pr étant le nombre de Prandtl :

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} \quad (8)$$

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' = 0 \quad (9)$$

Les conditions aux limites (4), traduites en terme de conditions sur les fonctions f et θ aboutissent à :

$$\begin{aligned} f(0) = 0, f'(0) = 0, \theta(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\eta) = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

La résolution de (7), (9) et (10) permet de déterminer les fonctions f et θ , d'où l'on peut tirer $u(x, y)$, $v(x, y)$ et $T(x, y)$, en utilisant les relations (5), (6) et (8).

3. Calcul et composition du taux de génération d'entropie

Le taux local volumique de génération d'entropie \dot{S}_{gen}''' dépend du gradient de température ∇T et du terme de dissipation visqueuse de l'équation de l'énergie $\mu\Phi$ [1] :

$$\dot{S}_{gen}''' = \frac{k(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{\mu}{T} \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (11)$$

En utilisant les relations (8), (5) et (6) et en retenant pour le calcul de Φ le terme majoritaire $(\partial u/\partial y)^2$, l'équation (11) permet d'aboutir à l'expression du taux volumique de génération d'entropie [$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$] :

$$\dot{S}_{gen}''' = \frac{k\theta'^2}{(\tau - \theta)^2} \frac{U_\infty}{\nu x} \left(\frac{\eta^2}{4\text{Re}_x} + 1 \right) + \frac{\mu U_\infty^3}{\Delta T (\tau - \theta) \nu x} f''^2 \quad (12)$$

Cette formulation, adaptée aux situations à forts gradients thermiques, fait apparaître le rapport adimensionnel τ , qui constitue un paramètre thermique essentiel de la configuration d'écoulement étudiée :

$$\tau = \frac{T_w}{\Delta T} \quad (13)$$

Afin de produire une expression adimensionnée S_3 du taux local de production volumique d'entropie, le facteur $\nu^2/(kU_\infty^2)$ est appliqué à l'équation (12) :

$$S_3 = \frac{\theta'^2}{\text{Re}_x(\tau - \theta)^2} \left(\frac{\eta^2}{4\text{Re}_x} + 1 \right) + \frac{\text{Pr Ec}}{\text{Re}_x(\tau - \theta)} f''^2 \quad (14)$$

S_3 est la somme de trois termes, représentant successivement et respectivement le taux de production d'entropie : par conduction dans la direction horizontale $S_{3,ch}$, par conduction dans la direction verticale $S_{3,cv}$ et enfin par frottement visqueux $S_{3,f}$:

$$S_{3,ch} = \frac{\theta'^2}{\text{Re}_x(\tau - \theta)^2} \left(\frac{\eta^2}{4\text{Re}_x} \right), \quad S_{3,cv} = \frac{\theta'^2}{\text{Re}_x(\tau - \theta)^2}, \quad S_{3,f} = \frac{\text{Pr Ec}}{\text{Re}_x(\tau - \theta)} f''^2 \quad (15)$$

L'intégration de \dot{S}_{gen}''' dans la direction verticale entre $y = 0$ et $y = \infty$ permet d'exprimer le taux surfacique de production d'entropie \dot{S}_{gen}'' [$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$] puis sa valeur adimensionnée S_2 à l'aide du facteur $\nu/(kU_\infty)$:

$$\dot{S}_{gen}'' = \frac{kU_\infty}{\nu} \left(\frac{\Omega_{ch}}{4\text{Re}_x} + \Omega_{cv} + \text{Pr Ec } \Omega_f \right) \text{Re}_x^{-1/2} \quad (16)$$

$$S_2 = \left(\frac{\Omega_{ch}}{4\text{Re}_x} + \Omega_{cv} + \text{Pr Ec } \Omega_f \right) \text{Re}_x^{-1/2} \quad (17)$$

Les termes Ω_{ch} , Ω_{cv} et Ω_f dépendent du paramètre τ et sont le résultat de l'intégration de fonctions de η :

$$\Omega_{ch} = \int_0^\infty \frac{\theta'^2 \eta^2}{(\tau - \theta)^2} d\eta, \quad \Omega_{cv} = \int_0^\infty \frac{\theta'^2}{(\tau - \theta)^2} d\eta, \quad \Omega_f = \int_0^\infty \frac{f''^2}{\tau - \theta} d\eta \quad (18)$$

Enfin, l'intégration de \dot{S}_{gen}'' entre deux points d'abscisses a et b aboutit au taux de production d'entropie par unité de largeur de plaque \dot{S}_{gen}' [$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$] pour la couche limite située entre ces deux abscisses (exprimées au travers des nombres de Reynolds longitudinaux $\text{Re}_a = U_\infty a/\nu$ et $\text{Re}_b = U_\infty b/\nu$). Son expression adimensionnée S_1 est obtenue en divisant \dot{S}_{gen}' par la conductivité thermique k :

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{k}{2} (\text{Re}_a^{-1/2} - \text{Re}_b^{-1/2}) \Omega_{ch} + 2k (\text{Re}_b^{1/2} - \text{Re}_a^{1/2}) (\Omega_{cv} + \text{Pr Ec } \Omega_f) \quad (19)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (\text{Re}_a^{-1/2} - \text{Re}_b^{-1/2}) \Omega_{ch} + 2 (\text{Re}_b^{1/2} - \text{Re}_a^{1/2}) (\Omega_{cv} + \text{Pr Ec } \Omega_f) \quad (20)$$

Tout comme S_3 , S_1 est la somme de termes relevant de la conduction horizontale $S_{1,ch}$, de la conduction verticale $S_{1,cv}$ et du frottement visqueux $S_{1,f}$:

$$S_{1,ch} = \frac{1}{2} (\text{Re}_a^{-1/2} - \text{Re}_b^{-1/2}) \Omega_{ch}, \quad S_{1,cv} = 2 (\text{Re}_b^{1/2} - \text{Re}_a^{1/2}) \Omega_{cv}, \quad S_{1,f} = 2 (\text{Re}_b^{1/2} - \text{Re}_a^{1/2}) \text{Pr Ec } \Omega_f \quad (21)$$

Les équations (14), (17) et (20) permettent d'analyser le comportement et la composition de la production d'entropie en fonction des variables dynamiques et thermiques.

4. Résultats

Les résultats ci-dessous sont présentés pour $\text{Pr} = 1$. Les fonctions $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$ (Figures 2 et 3), solutions des équations (7), (9) et (10) ont été obtenues à l'aide d'un solveur de type Runge-Kutta [9] et correspondent aux valeurs de la littérature [10] :

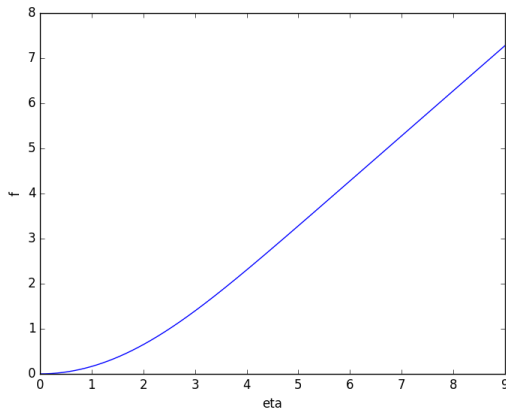


Figure 2 : $f(\eta)$, solution de $f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$

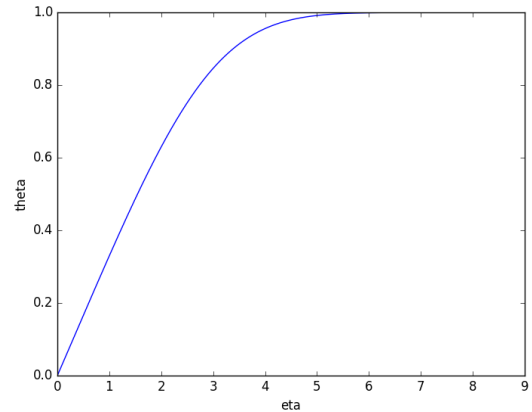


Figure 3 : $\theta(\eta)$ solution de $\theta'' + \frac{1}{2} f \theta' = 0$

4.1. Taux de production d'entropie

Le taux de production volumique d'entropie locale S_3 en fonction de la variable adimensionnelle η (Figure 4), pour $\text{Pr} = 1$, $\text{Ec} = 0,01$ et $\tau = 2$ est non nul à la paroi, présente un maximum aux alentours de $\eta = 1,6$ puis décroît vers une valeur nulle en fin de couche limite, lorsqu'est atteinte la zone d'écoulement libre. Ce taux est une fonction décroissante du nombre de Reynolds local Re_x : le taux de production d'entropie augmente lorsque l'on se rapproche du bord d'attaque. Ce comportement est confirmé par le calcul de l'entropie totale S_1 entre deux nombres de Reynolds longitudinaux « glissants », de $\text{Re}_a > 0$ glissant et démarrant d'une valeur donnée à $\text{Re}_b = \text{Re}_a + \Delta_{\text{Re}}$, l'écart Δ_{Re} étant fixé (Figure 5) : plus on s'éloigne du bord d'attaque, moins l'entropie produite est importante.

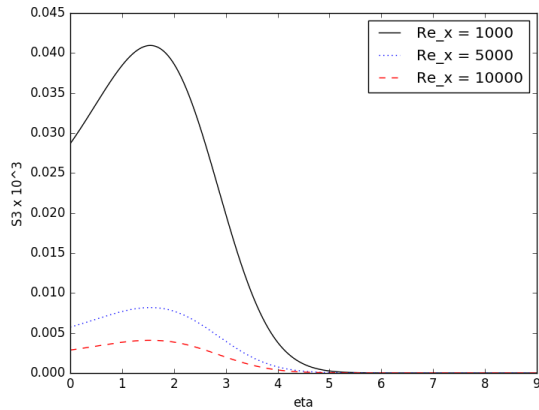


Figure 4 : *taux local d'entropie produite $S_3(\eta)$*

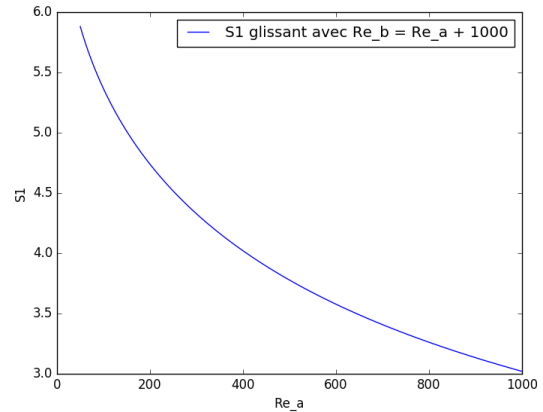


Figure 5 : *entropie totale S_1 produite entre Re_a et $Re_a + 1000$*

La composition de S_3 montrant l'importance relative des termes de conduction dans la direction horizontale, de conduction dans la direction verticale et de frottement visqueux (14 et 15) est présentée ci-dessous, pour deux valeurs du nombre de Reynolds local (Figures 6 et 7), la seconde visant à examiner le comportement asymptotique du modèle de la couche laminaire vers les petits nombres de Reynolds. La part majoritaire provient de la conduction de la chaleur dans le sens vertical. La contribution du gradient de la température dans le sens horizontal, bien que beaucoup plus faible, prend du poids lorsque l'on se rapproche du bord d'attaque : elle contribue à décaler le maximum du taux de production d'entropie vers des η plus élevés. Quant à la génération d'entropie par frottement visqueux, sa contribution relative est faible et peut même être dépassée par le terme de conduction horizontale près du bord d'attaque.

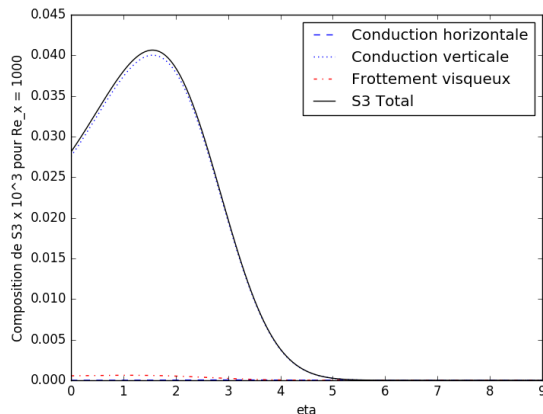


Figure 6 : *composition du taux local de production d'entropie pour $Re_x = 1000$*

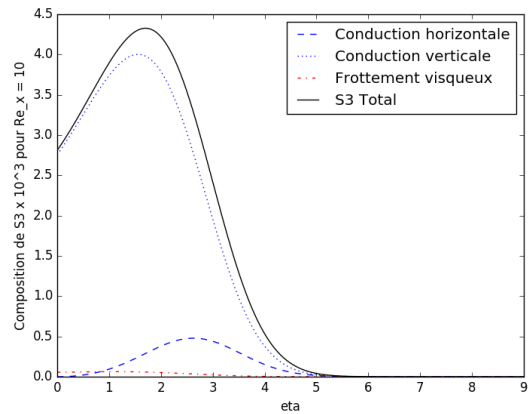


Figure 7 : *composition du taux local de production d'entropie pour $Re_x = 10$*

4.2. Influence du paramètre thermique adimensionnel τ

Les facteurs Ω_{ch} , Ω_{cv} et Ω_f (18) intervenant dans le calcul de S_2 (17) et de S_1 (20) dépendent du paramètre adimensionnel τ (Figure 8) et sont tous décroissants. Pour des écarts de températures entre la paroi et l'écoulement libre petits par rapport à la température de paroi

(τ grand), le facteur Ω_f est majoritaire et dès que $\tau > 3,62$ environ, c'est Ω_{ch} qui est majoritaire.

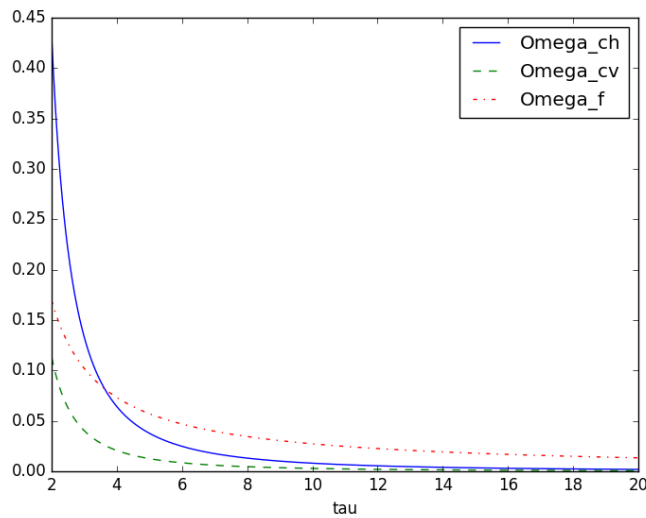


Figure 8 : facteurs Ω_{ch} , Ω_{cv} et Ω_f en fonction de τ

La contribution relative des termes de conduction horizontale $S_{1,ch}$, de conduction verticale $S_{1,cv}$ et de frottement visqueux $S_{1,f}$ dans l'entropie générée (Figures 9 et 10) dépend des facteurs Ω_{ch} , Ω_{cv} et Ω_f mais également des facteurs en Re_a , Re_b , Pr et Ec (21). Nous supposons les bornes d'intégration a et b ainsi que le nombre de Prandtl fixés. Quant au nombre d'Eckert, il varie en fonction de τ dès lors que l'on considère que U_∞ et T_w sont fixées, ΔT étant variable. Le terme lié à la conduction horizontale est négligeable relativement aux deux autres termes. La contribution de la conduction verticale est plus importante que celle du terme visqueux pour $\tau < 14,4$ environ, puis la situation est inversée.

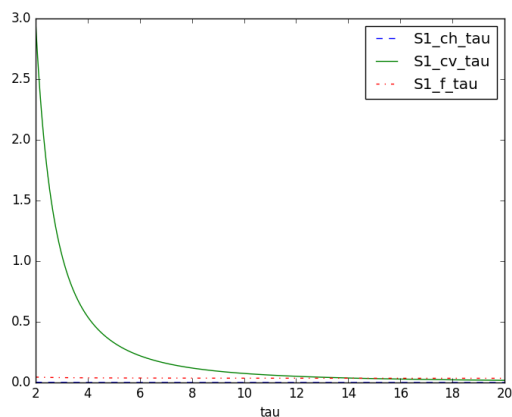


Figure 9 : termes constitutif de S_1 , en fonction de τ pour $Re_a = 1000$ et $Re_b = 2000$

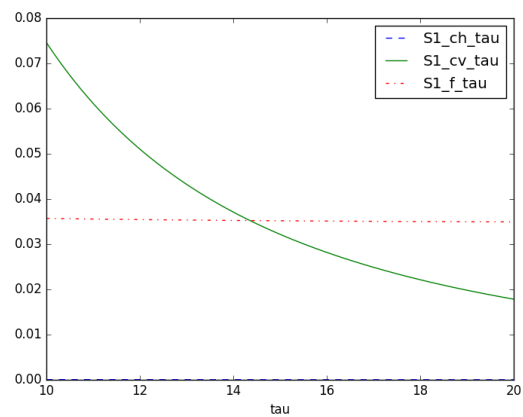


Figure 10 : zoom pour $\tau = 10$ à $\tau = 20$

5. Conclusion et perspectives

L'approximation de la couche limite laminaire permet d'exprimer de façon simple le taux de production d'entropie au-dessus d'une plaque plane portée à une température constante différente de celle de l'écoulement qu'elle cisaille. L'analyse des différents termes contributeurs à cette entropie générée, d'origine conductive ou visqueuse, fait apparaître, en complément des nombres de Prandtl, d'Eckert et de Reynolds, un paramètre adimensionnel thermique : le rapport de la température de la paroi à l'écart entre les températures de la paroi et celle de l'écoulement libre. Ce paramètre influence directement les contributions relatives de la génération d'entropie par conduction et par frottement visqueux. La prise en compte de la turbulence ainsi que l'introduction de contraintes énergétiques créant des conditions de minimisation de l'entropie générée, constitueront les prochaines étapes de ce travail d'analyse du champ d'entropie généré par un écoulement fortement anisotherme.

Références

- [1] A. Bejan, *Entropy Generation Minimization*, CRC Press (1996).
- [2] Q. Li, X. Yuan, P. Neveu, G. Flamant, L. Luo, A novel optimization approach to convective heat transfer enhancement for solar receiver, *Chemical Engineering Science*, 116 (2014) 806–816.
- [3] F. Aulery, A. Toutant, Ye Zhou, F. Bataille, Energy transfer process of anisothermal wall-bounded flows, *Physics Letters A*, 379(24–25):1520 – 1526, (2015).
- [4] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Ye Zhou, Turbulent kinetic energy spectrum in very anisothermal flows, *Physics letter A*, Vol 376, Issue 45, p. 3177-3184, (2012).
- [5] A. Toutant, F. Bataille, Turbulence statistics in a fully developed channel flow submitted to a high temperature gradient, *International Journal of Thermal Sciences* 74, 104-118, (2013).
- [6] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill (1979).
- [7] A. Malvandi, F. Hedayati, D.D. Ganji, Thermodynamic optimization of fluid flow over an isothermal moving plate, *Alexandria Engineering Journal*, 52, 277–283, (2013).
- [8] S. Kakaç, Y. Yener, *Convective Heat Transfer*, CRC Press (1995).
- [9] J. Kierzenka, L.F. Shampine, A BVP Solver Based on Residual Control and the Matlab PSE, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27-3, 299-316, (2001).
- [10] Y.Çengel, J. Cimbala, *Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications*, McGraw-Hill (2006).