

## Chapitre 3

### QUE FAIRE DE LA TURBULENCE ?

*Voyons, Monsieur, mettez-vous à la place d'un mobile qui se croit animé d'un mouvement de translation rectiligne et qui s'aperçoit qu'il a décrit une trajectoire circulaire !*

CHRISTOPHE  
(L'idée fixe du savant Cosinus)

*L'insolite étrangeté de cette curieuse bizarrerie me plonge dans une perplexité qui m'intrigue.*

Achille Talon (par GREG)

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le signaler, les équations établies dans le chapitre 1 devraient en principe permettre de venir à bout de tous les problèmes de thermoconvection. Cette possibilité reste malheureusement illusoire la plupart du temps, en raison de difficultés mathématiques extrêmes, spécialement lorsque les écoulements sont turbulents. On doit donc recourir à des approximations ou à des modèles simplificateurs.

Parler de turbulence est un exercice périlleux si l'on veut présenter les choses de façon assez claire et opérationnelle. Il faut naviguer entre Charybde et Scylla pour éviter le simplisme sans tomber dans des développements inutilisables par le non spécialiste.

Le chapitre que nous abordons maintenant se borne à présenter l'aspect général de la turbulence, et les principaux modèles utilisés pour décrire les écoulements turbulents. Il ne contient pas d'applications directes ; celles-ci viendront en leur temps dans les chapitres qui suivent.

La première partie est consacrée à notre perception expérimentale de la turbulence, qui débouche assez naturellement sur une description statistique du phénomène.

Pour conserver la structure logique des deux premiers chapitres, on applique d'abord ce traitement statistique à l'équation générale de bilan local. Ceci permet d'introduire dans un cadre très large le modèle pseudo-laminaire, basé sur la définition de diffusivités turbulentes qui jouent un rôle analogue aux diffusivités moléculaires. Nous présentons ensuite les modèles basés sur des équations d'appoint, qui sont des relations de bilans supplémentaires portant sur certaines grandeurs fluctuantes : modèles  $k-l$ ,  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$ . Les volumineux calculs qui permettent d'établir ces relations sont relégués en annexe ; ils sont en partie justifiés par l'attention particulière que nous accordons à l'interprétation des différents éléments d'un bilan en termes de sources volumiques ou surfaciques.

Bien que n'étant pas utilisées de manière directe dans le cadre de cet ouvrage, les corrélations entre grandeurs fluctuantes ainsi que les échelles de turbulence font l'objet d'une brève présentation, car elles peuvent permettre à l'ingénieur d'estimer certains ordres de grandeur.

Enfin, il nous a paru utile de regarder de près et de façon critique les problèmes de fond posés par la définition des valeurs moyennes, particulièrement dans le cas des écoulements à masse volumique variable. Ces considérations figurent également en annexe.

### 3.1. – DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Au début du chapitre 2, nous avons décrit deux expériences simples (expériences de Reynolds et de la plaque plane) qui mettent en évidence un comportement inattendu dans l'écoulement des fluides : il s'agit du mouvement turbulent, caractérisé à première vue par un brassage tout à fait désordonné des particules fluides.

Nous allons essayer maintenant d'approcher le phénomène d'un peu plus près et de le quantifier.

♣ Plaçons, par exemple, dans l'écoulement turbulent une sonde fixe mesurant la composante locale instantanée  $U_t$  de la vitesse, et supposons que les conditions aux limites soient stationnaires. Un enregistrement de  $U_t$  en fonction du temps présentera l'aspect schématisé sur la figure 3.1 : des oscillations irrégulières, mais qui se produisent autour d'une valeur moyenne  $U$  de  $U_t$ .

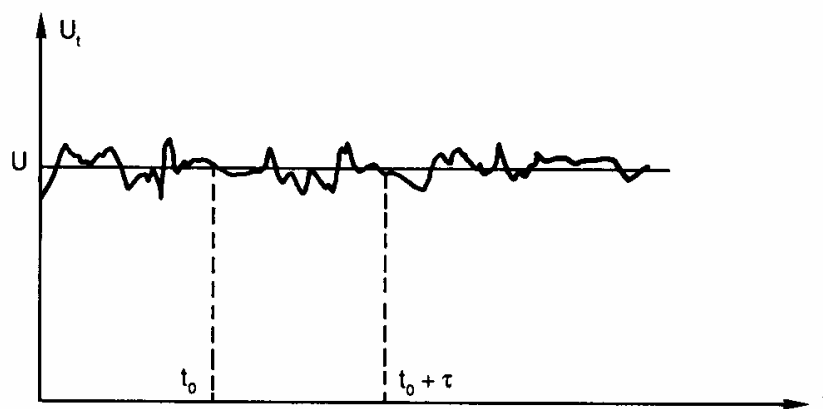


FIG. 3.1. – Enregistrement de vitesse en régime turbulent.

Plus précisément, si l'on calcule entre deux instants  $t_0$  et  $t_0 + \tau$  la fonction :

$$U = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} U_t dt \quad (3.1)$$

on constate que sa valeur est indépendante de  $t_0$  et de  $\tau$ , pourvu que l'intervalle  $[t_0, t_0 + \tau]$  contienne un assez grand nombre d'événements.

Par contre, en modifiant les conditions aux limites de telle sorte que l'écoulement devienne laminaire, l'enregistrement de  $U_t$  sera pratiquement une droite  $U_t = U = cte$ .

Les mêmes observations pourraient être faites en mesurant les autres composantes instantanées  $V_t$ ,  $W_t$  de la vitesse, la température ou la pression.

◆ Mais l'expérience dont nous venons de parler ne nous renseigne que sur l'aspect local du phénomène. Pour en avoir une vue tridimensionnelle, on peut aussi réaliser un film de l'écoulement, en ayant recours à divers moyens optiques permettant de visualiser les mouvements du fluide.

L'aspect des choses paraît alors tout différent : on voit naître au sein du fluide des paquets tourbillonnaires de molécules – appelées *bouffées de turbulence* – qui se stabilisent puis se fragmentent et se diluent dans l'écoulement, tandis que d'autres les remplacent. Leur taille, leur vitesse, leur durée de vie, leur lieu d'origine et leur fréquence d'apparition sont à première vue absolument aléatoires. Un bon exemple de ces bouffées nous est fourni dans la vie quotidienne par les rafales de vent.

♥ Un phénomène de cette nature incite finalement à remettre en question le principe du déterminisme, du moins dans son aspect pratique.

En effet, en régime laminaire, les trajectoires des particules fluides sont des courbes qui possèdent des propriétés de régularité mathématique. Deux particules infiniment voisines à un instant  $t$  restent proches à un instant  $t + \Delta t$ , si  $\Delta t$  est petit par rapport au temps de déplacement moyen dans l'écoulement (sauf éventuellement au voisinage d'une singularité). Le mouvement est déterministe comme en mécanique classique : en remontant le temps, on peut retrouver les conditions initiales, et dans l'autre sens on peut prévoir exactement l'état du système à un instant quelconque dans le futur.

Au contraire, en régime turbulent, deux particules infiniment voisines à l'instant  $t$  peuvent avoir des positions pratiquement indépendantes à  $t + \Delta t$ , et la notion de trajectoire, si elle conserve un sens physique, devient inutilisable. Il n'est alors plus possible de remonter aux conditions initiales, qui sont en partie « oubliées » par l'écoulement. Inversement, il y aura au bout d'un certain temps perte de prédictibilité déterministe, et ce d'autant plus tôt que les caractéristiques initiales de l'écoulement seront moins bien connues à petite échelle.

♠ Les écoulements turbulents présentent donc ce caractère d'avoir une structure à la fois complexe et apparemment désordonnée, voire non déterministe, ce qui ne va pas simplifier leur étude.

Les effets pratiques de la turbulence sont cependant considérables et doivent être pris en compte : ce phénomène présente en effet une diffusion importante des diverses entités physiques transportées par les molécules fluides, la chaleur en particulier. Cela se traduit par un accroissement des flux et des contraintes aux parois, ou par un mélange rapide si le fluide comporte plusieurs constituants, comme dans l'expérience de Reynolds.

### 3.2. – THÉORIE STATISTIQUE LOCALE DE LA TURBULENCE

Pour comprendre et décrire les mécanismes de la turbulence, deux grandes voies peuvent être explorées. La première s'appuie sur la non-linéarité des équations de bilans, et fait l'objet d'un court examen en Annexe (voir aussi § 3.3.1). Très séduisante dans son principe, elle se heurte malheureusement à de multiples difficultés, et ne paraît pas en mesure de donner naissance à des méthodes vraiment opérationnelles.

Il faut donc, pour disposer d'outils réellement utilisables, s'engager dans la seconde voie qui s'appuie sur une description statistique ou probabiliste. La théorie qui fut la première dans l'ordre chronologique, et qui reste la plus utilisée est la théorie statistique locale. Elle permet de construire des modèles efficaces, même s'ils sont loin d'être parfaits, en particulier au voisinage des parois.

### 3.2.1. – Équations de bilans aux valeurs moyennes

♣ En physique comme dans bien d'autres disciplines, lorsqu'on se trouve confronté à des phénomènes complexes, fluctuants, en apparence insaisissables, on a généralement recours à un traitement statistique qui permet au moins de dégager quelques lois simples ou à défaut quelques tendances. Il paraît donc légitime de procéder ainsi avec la turbulence. De surcroît, c'est un fait d'expérience que les écoulements turbulents manifestent quelques propriétés statistiques simples (ainsi l'existence de grandeurs locales moyennes comme il a été dit en 3.1), et que des écoulements turbulents réalisés dans des conditions macroscopiques identiques présentent des caractères statistiques identiques.

On postule donc que toute grandeur physique de l'écoulement peut être considérée comme une variable aléatoire, dont la valeur instantanée est la somme d'une valeur moyenne  $C$  et d'une valeur fluctuante  $c$ . Dans les équations, on sera donc amené à remplacer  $C$  par  $C + c$  :

$$C \mapsto C + c \quad (3.2)$$

Ce sera le cas en particulier de la vitesse,  $\vec{V}$  étant remplacée par  $\vec{V} + \vec{v}$  :

$$\vec{V} \mapsto \vec{V} + \vec{v} \quad (3.3)$$

◆ Voyons alors les implications de cette hypothèse dans l'équation générale (1.24) de bilan local, qui s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial(C + c)}{\partial t} + \text{div} \left\{ (C + c)(\vec{V} + \vec{v}) \right\} = q_I - \text{div} \vec{q}_S \quad (3.4)$$

Rappelons-nous tout d'abord (ch. 1) que fréquemment le terme source de surface  $\text{div} \vec{q}_S$  décrit le transfert par diffusion de la grandeur  $C$  et peut se mettre sous la forme :

$$\vec{q}_S = -D_c \overrightarrow{\text{grad}}(C + c) \quad (3.5)$$

où  $D_c$  est la diffusivité (ou coefficient de diffusion) de  $C$  dans le milieu. Restreinte à cette catégorie de situations, (3.4) s'écrit :

$$\frac{\partial(C + c)}{\partial t} + \text{div} \left\{ (C + c)(\vec{V} + \vec{v}) \right\} = q_I + \text{div} \left\{ D_c \overrightarrow{\text{grad}}(C + c) \right\} \quad (3.6)$$

♥ Dans un premier temps, on cherche à tirer de (3.6) une relation entre les valeurs moyennes, en se débarrassant autant que possible de ces termes indésirables que sont  $c$  et  $\vec{v}$ . Pour ce faire, le plus simple consiste à prendre la moyenne des deux membres de (3.6).

Nous ne considérons dans la suite que des *écoulements permanents en moyenne*, c'est-à-dire pour lesquels les conditions aux limites sont stationnaires (si elles sont variables dans le temps, la définition de la moyenne  $C$  pose quelques problèmes épineux que nous n'aborderons pas ici, cf. Annexe 3.A.2). Dans ce cas,  $C$  ne dépend ni de l'instant considéré, ni de la durée  $\tau$  sur laquelle la moyenne est calculée, de telle sorte que :

$$\frac{\overline{\partial C}}{\partial t} = 0; \quad \overline{c} = 0 \quad (3.7)$$

l'opération de moyenne étant symbolisée par la barre qui surmonte les différents termes.

Les moyennes des termes de l'équation (3.6) sont calculées en Annexe 3.A.2. On obtient ainsi *l'équation de bilan aux valeurs moyennes* pour la grandeur  $C$  :

$$\text{div}(\overrightarrow{C\bar{V}} + \overrightarrow{c\bar{v}}) = \overline{q_I} + \text{div}(D_c \overrightarrow{\text{grad} C}) \quad (3.8a)$$

♠ Comparons cette relation avec l'équation générale de bilan en régime stationnaire, qui s'écrit compte tenu de (3.5) :

$$\text{div} C\overrightarrow{V} = q_I + \text{div}(D_c \overrightarrow{\text{grad} C}) \quad (3.8b)$$

A l'évidence, (3.8a) ressemble de très près à (3.8b) pourvu que l'on transfère à droite le terme en  $\overrightarrow{c\bar{v}}$  :

$$\boxed{\text{div} C\overrightarrow{V} = q_I + \text{div}\left\{D_c \overrightarrow{\text{grad} C} - \overrightarrow{c\bar{v}}\right\}} \quad (3.9)$$

Le bilan local pour les valeurs moyennes  $C$  s'écrit donc de la même façon que pour les valeurs instantanées, à ceci près qu'il apparaît un nouveau terme exclusivement lié aux fluctuations, à savoir  $\overrightarrow{\text{div} c\bar{v}}$ . Dans l'écriture (3.9), celui-ci est interprété comme une source de surface, qui se superpose à la diffusion classique. Il manifeste donc l'existence d'un nouveau mécanisme de transfert de la grandeur  $C$ , provoqué par les fluctuations de vitesse  $\vec{v}$ . Ce mécanisme ainsi mis en parallèle avec la diffusion moléculaire (terme en  $\overrightarrow{\text{grad} C}$ ) est qualifié de *diffusion turbulente de la grandeur C*.

Le terme  $\overrightarrow{c\bar{v}}$ , qui est donc le produit des fluctuations  $c$  et  $\vec{v}$  pris en valeur moyenne, est appelé *covariance* de  $c$  et  $\vec{v}$ , ou encore *corrélation*. C'est un moment du second ordre qui caractérise le degré de dépendance (ou si l'on préfère le degré de couplage) de  $c$  par rapport à  $\vec{v}$ . En particulier, si  $\overrightarrow{c\bar{v}} = \sqrt{\overline{c^2} \overline{v^2}}$ , les grandeurs fluctuantes  $c$  et  $\vec{v}$  sont totalement corrélées, alors qu'elles sont indépendantes si  $\overrightarrow{c\bar{v}} = 0$ . Lorsque la corrélation est négligeable, le mouvement est solution de l'équation sans perturbation (3.8b).

♪ Il pourrait aussi arriver que dans un écoulement turbulent, on ait :

$$\overrightarrow{\text{div} c\bar{v}} \ll \text{div}(D_c \overrightarrow{\text{grad} C})$$

c'est-à-dire que la diffusion turbulente soit négligeable sans que  $\overline{c\vec{v}}$  soit nul pour autant. Cela est possible si  $\overline{c\vec{v}}$  est quasi uniforme : il y a bien diffusion turbulente, mais son bilan local est nul en moyenne. Ce type d'écoulement est un cas très particulier, qui rentre dans le cadre de la turbulence homogène (§ 3.4.5).

!!! Signalons enfin un point de terminologie : les moyennes utilisées dans ce chapitre (qui sont au point de vue mathématique des moyennes « mal définies », cf. annexe 3.A.2) sont souvent appelées *moyennes de Reynolds*, et dans la littérature anglo-saxonne leur application aux équations de quantité de mouvement est désignée par *Reynolds Averaged Navier – Stokes*, en abrégé **RANS**.

### 3.2.2. – Équation de bilan pour les fluctuations

Nous pouvons maintenant établir une équation qui s'interprétera comme un bilan local de la grandeur fluctuante  $c$ . Pour cela, développons l'équation (3.6) en séparant, dans les sources de volume  $q_I$ , la moyenne  $\overline{q_I}$  et la fluctuation  $q'_I$  (soit :  $q_I = \overline{q_I} + q'_I$ ).

Sachant que  $\overline{\partial C / \partial t} = 0$  (écoulement permanent en moyenne), il vient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(C\vec{V} + C\vec{v} + c\vec{V} + c\vec{v}) = \overline{q_I} + q'_I + \text{div}\left\{D_c \overrightarrow{\text{grad}}(C + c)\right\} \quad (3.10)$$

Soustrayons membre à membre l'équation aux valeurs moyennes (3.8a) et l'équation précédente. On obtient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(C\vec{v} + c\vec{V} + c\vec{v} - \overline{c\vec{v}}) = q'_I + \text{div}(D_c \overrightarrow{\text{grad}} C)$$

Soit encore, pour faire ressortir le bilan local de  $c$  :

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } c\vec{V} = q'_I + \text{div}\left\{D_c \overrightarrow{\text{grad}} c + \overline{c\vec{v}} - c\vec{v} - C\vec{v}\right\}} \quad (3.11)$$

### 3.2.3. – Le principe des fermetures en un point

Malgré ses avantages, la méthode statistique adoptée ne règle pas toutes les difficultés, loin de là. En prenant la moyenne des termes dans l'équation (3.6), nous cherchions à remplacer les termes fluctuants par des grandeurs indépendantes du temps. Cet objectif est réalisé, sauf que nous avons fait apparaître une nouvelle inconnue, la covariance  $\overline{c\vec{v}}$ , sans avoir augmenté le nombre d'équations. Le système est devenu « ouvert ».

Pour le « fermer », il faudra donc établir une relation supplémentaire (vectorielle puisque  $\overline{c\vec{v}}$  est un vecteur) pour chaque entité physique scalaire transportée (les composantes de la quantité de mouvement étant considérées comme telles). Ces relations portent le nom de « fermetures ».

Malheureusement, rien dans la théorie ne permet d'établir de telles fermetures. D'une façon ou d'une autre, celles-ci reposeront donc sur des modèles phénoménologiques, voire quelquefois sur des hypothèses franchement empiriques.

Toutes les fermetures relatives au modèle statistique local de la turbulence sont appelées *fermetures en un point*.

### 3.3. – UNE APPLICATION DE LA THÉORIE STATISTIQUE LOCALE : LE MODÈLE PSEUDO-LAMINAIRE

#### 3.3.1. – Caractérisation d'un transfert laminaire ; transition vers la turbulence

♣ Avant d'examiner quelques-unes des fermetures en un point, il paraît utile de préciser, dans le cadre du modèle statistique de la turbulence, ce que l'on entendra par régime de transfert laminaire. Celui-ci se caractérise en effet plus aisément par rapport au régime de transfert turbulent.

Physiquement, il est clair qu'un écoulement laminaire est un écoulement où les fluctuations de vitesse sont statistiquement « négligeables ».

D'une manière plus précise et plus générale à la fois, nous dirons que dans un transfert laminaire, les termes de covariance sont nuls, c'est-à-dire que d'éventuelles fluctuations  $c$  et  $\vec{v}$  ne sont pas corrélées :

$$\text{laminaire} \Leftrightarrow \overline{c\vec{v}} = 0 \quad (3.12)$$

Cela signifie qu'une fluctuation isolée, qui peut toujours survenir, ne sera pas à l'origine d'autres fluctuations, et ne sera donc pas susceptible de déclencher un mécanisme turbulent.

Alors, l'équation aux valeurs moyennes (3.9) s'identifie à l'équation générale de bilan en régime permanent (3.8b) :

$$\text{div } C\vec{V} = q_I + \text{div}(D_c \overline{\text{grad } C})$$

En particulier, si l'on considère les équations de quantité de mouvement, où  $c = \rho v_j$ , on aura en régime laminaire :

$$\overline{c\vec{v}} = \overline{\rho v_j \vec{v}} = 0 \quad (3.13)$$

soit encore, pour un fluide isochore :

$$\overline{v_j v_k} = 0 \quad \forall j, k = 1 \text{ à } 3 \quad (3.14)$$

Donc, en particulier, les moyennes quadratiques  $\overline{v_j^2}$  sont nulles. En conséquence, dans un fluide isochore en écoulement laminaire, les fluctuations de vitesse s'identifient à des fonctions de Dirac. Mais si le fluide n'est pas isochore, la condition  $\overline{\rho v_j^2} = 0$  n'implique pas que  $\overline{v_j^2}$  soit nulle.

◆ A côté de la vision purement statistique des choses, on peut aussi considérer le comportement non-linéaire engendré par le bilan de quantité de mouvement (Annexe 3.A.1).

Dans cette approche, les fluctuations sont plutôt appelées « perturbations ». Mais quelle que soit la terminologie, lorsque ces événements surviennent, c'est uniquement la viscosité moléculaire qui est en mesure de les résorber, les forces de viscosité jouant le rôle d'un frein. Cela se traduit par un pic de la dissipation  $\Phi$  dans l'équation d'énergie.

Plus précisément, si l'équation (3.11) est appliquée aux composantes de la quantité de mouvement, elle possède des solutions en  $e^{-i\omega t}$ , où  $\omega$  est généralement complexe. Si sa partie imaginaire est négative,  $e^{-i\omega t}$  diminue au cours du temps : il y a amortissement. Mais

si la partie imaginaire est positive, l'exponentielle augmente en fonction du temps, ce qui correspond à une instabilité du mouvement.

Il se trouve que les fluides usuels sont très peu visqueux, de sorte que des perturbations infimes peuvent ainsi s'amplifier et dégénérer en comportement chaotique si l'amortissement devient insuffisant, c'est-à-dire en fait si les termes non linéaires (transport de quantité de mouvement par le fluide en écoulement) deviennent suffisamment grands par rapport aux termes de viscosité. Le passage d'un type de comportement à l'autre constitue la *transition vers la turbulence*.

Or nous disposons d'un indicateur pour évaluer l'ordre de grandeur relatif du terme de transport et du terme visqueux : c'est le critère de similitude  $\Gamma_v$  (2.26), qui est le quotient du flux de référence de la source (viscosité) par le flux de référence transporté. Sachant que le nombre de Reynolds  $Re = l/\Gamma_v$ , on voit que  $Re$  mesure donc l'importance des termes non-linéaires par rapport au terme de dissipation. Ainsi, le *nombre de Reynolds critique*  $Re_c$  (§ 2.2) est le seuil au-delà duquel les termes non-linéaires s'imposent, et donc où apparaissent des parties imaginaires positives dans les exposants des termes en  $e^{-i\omega t}$ .

Il doit être bien entendu que le passage du régime laminaire au régime turbulent n'est pas un phénomène abrupt, mais une transition, comme on l'a dit plus haut, et qu'il s'étale sur une certaine plage de valeurs de  $Re$ , dont la valeur critique  $Re_c$  constitue approximativement le centre. De plus, cette valeur n'est pas universelle, car elle dépend de chaque type d'écoulement.

Dans le cadre choisi ici, cette brève analyse est sans conséquence pratique, mais elle contribue à la compréhension des mécanismes de la turbulence.

### 3.3.2. – L'idée directrice du modèle pseudo-laminaire

♣ On dispose de méthodes variées, analytiques ou numériques, pour résoudre les équations de type (3.8b) correspondant à un régime stationnaire laminaire. Par contre, les équations du genre (3.9) suscitent de sérieuses difficultés.

Mais leur rapprochement suggère que si l'on pouvait gauchir les secondes d'une façon physiquement acceptable pour les faire ressembler à (3.8b), on simplifierait leur résolution. Cela devient possible en admettant que la diffusion turbulente obéit à la loi classique de la diffusion, c'est-à-dire que  $\overline{c \vec{v}}$  est proportionnelle au gradient de la grandeur moyenne  $C$ .

On formule donc l'hypothèse :

$$\boxed{-\overline{c \vec{v}} = D_{ct} \overrightarrow{\text{grad}} C} \quad (3.15)$$

le coefficient  $D_{ct}$  étant appelé *diffusivité turbulente* de la grandeur  $C$ .

!!! Il faut bien noter qu'il y a une différence essentielle entre  $D_{ct}$  et la diffusivité moléculaire classique  $D_c$ . La seconde est une propriété intrinsèque du fluide, alors que la diffusivité turbulente définie par la relation (3.15) est essentiellement une propriété structurelle locale de l'écoulement, généralement fonction des conditions aux limites.



◆ On doit bien admettre que la formulation (3.15) est un peu réductrice. En toute généralité, il conviendrait de poser :

$$-\overline{c v_j} = D_{jk} \frac{\partial C}{\partial x_k} \quad (3.16)$$

car le coefficient  $D_{ct}$  peut dépendre de chaque direction considérée pour  $\vec{v}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} C$ . Alors,  $D_{jk}$  est un tenseur du second ordre.

♥ Revenons malgré tout à l'hypothèse (3.15), beaucoup moins difficile à mettre en œuvre. En l'intégrant dans l'équation générale aux valeurs moyennes (3.9), on obtient :

$$\boxed{\text{div } C\vec{V} = \bar{q}_I + \text{div}(D_c + D_{ct}) \overrightarrow{\text{grad}} C} \quad (3.17)$$

dont l'analogie avec (3.8b) justifie l'expression de « *modèle pseudo – laminaire* ».

### 3.3.3. – Diffusion turbulente de masse

#### 3.3.3.1. – BILAN DE MASSE TOTALE

La grandeur  $C$  est ici la masse volumique  $\rho$  du fluide, et il n'y a pas de termes sources (§ 1.3.2.1) :

$$C = \rho ; \quad q_I = 0 ; \quad \vec{q}_S = 0 \quad (\text{soit } D_c = 0)$$

Admettons pour simplifier que le fluide soit isochore (voir annexe 3.A.3 pour  $\rho \neq \text{cte}$ ). Alors les fluctuations  $\rho'$  de  $\rho$  sont nulles, d'où :

$$\overline{c v} = \overline{\rho' v} = 0$$

et il résulte de (3.9) et (3.11) les équations :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (3.18a)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (3.18b)$$

L'équation de continuité classique s'applique donc également ici à la valeur moyenne  $\vec{V}$  de la vitesse et à sa fluctuation, pour laquelle la condition à la limite associée est  $\vec{v} = 0$  sur toute surface solide fixe.

En posant :

$$\vec{V} = (U, V, W)$$

(3.18a) s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

et de même pour  $\vec{v}$  avec  $u, v, w$ .

### 3.3.3.2. – BILAN DE MASSE SUR UN CONSTITUANT A

Dans un mélange isochore, si l'on ne s'intéresse qu'à un constituant A (§ 1.3.2.2), on a :  $C = \rho_A$  (moyenne),  $c = \rho'_A$  (fluctuation), et l'équation de bilan aux valeurs moyennes (3.9) devient :

$$\operatorname{div} \rho_A \vec{V} = \bar{q}_{IA} + \operatorname{div} \left\{ D_A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_A - \overline{\rho'_A \vec{v}} \right\} \quad (3.20)$$

$D_A$  étant la diffusivité moléculaire de A dans le mélange, et  $\bar{q}_{IA}$  la valeur moyenne des sources volumiques de A (rappelons au passage que, lorsque  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ , on a aussi :  $\operatorname{div}(\rho_A \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_A$ ).

En application de (3.15), admettons que :

$$-\overline{\rho'_A \vec{v}} = D_{At} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_A \quad (3.21)$$

On introduit ainsi un coefficient  $D_{At}$  qui est la *diffusivité turbulente du constituant A dans le mélange*. D'où :

$$\boxed{\operatorname{div}(\rho_A \vec{V}) = \bar{q}_{IA} + \operatorname{div} \left\{ (D_A + D_{At}) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_A \right\}} \quad (3.22)$$

Pour un écoulement pleinement turbulent, on aura en général  $D_{At} \gg D_A$ .

### 3.3.4. – Diffusion turbulente de quantité de mouvement

#### 3.3.4.1. – VISCOSITÉ CINÉMATIQUE TURBULENTE

Passons maintenant au bilan local de quantité de mouvement. Notre point de départ reste l'équation générale aux valeurs moyennes (3.9) :

$$\operatorname{div} C \vec{V} = q_I + \operatorname{div} \left\{ D_c \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - c \vec{v} \right\}$$

En conservant l'hypothèse du fluide isochore (soit :  $\rho \equiv \bar{\rho}$ ) :

$C = \rho V_j$  (composante de  $\rho \vec{V}$  suivant la direction  $j$ )

$c = \rho v_j$  (fluctuation)

$D_c = \nu$  (viscosité cinématique)

Les forces extérieures  $\vec{F}$  ne subissent pas de fluctuations ; la pression  $p$  a une valeur moyenne  $\bar{p}$  : d'où l'équation aux valeurs moyennes pour la quantité de mouvement (§.1.3.6.5, eq. 1.70b) :

$$\operatorname{div} (V_j \rho \vec{V}) = \rho F_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \operatorname{div} \left\{ \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho \bar{V}_j - \rho \overline{v_j \vec{v}} \right\} \quad (j = 1 \text{ à } 3) \quad (3.23)$$

Les composantes  $\tau'_{jk} = -\overline{\rho v_j v_k}$  du vecteur  $-\rho \overline{v_j \vec{v}}$  qui intervient ci-dessus sont connues sous le nom de *tensions (ou contraintes) de Reynolds*. Elles jouent le même rôle que les tensions visqueuses  $\tau_{ij}$ , mais elles expriment la diffusion de quantité de mouvement à l'échelle de la turbulence.

D'après (3.18a), avec les hypothèses retenues, nous avons :  $div \vec{V} = 0$  ; dans ce cas :

$$div C\vec{V} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} C, \quad \forall C$$

En appliquant cette propriété et en divisant (3.23) par  $\rho$ , il vient :

$$\boxed{\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} V_j = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + div \left\{ \nu \overrightarrow{grad} V_j - \overline{v_j v} \right\}} \quad (3.24)$$

C'est ce que l'on appelle *l'approche RANS (Random Averaged Navier – Stokes, voir § 3.2.1)*.

### ♣ *Méthode générale*

Pour faire apparaître une diffusivité turbulente de quantité de mouvement, posons en accord avec (3.15) :

$$\boxed{-\overline{v_j v} = \nu_{tj} \overrightarrow{grad} V_j} \quad (3.25)$$

ce qui s'exprime scalairement par :

$$-\overline{v_j v_k} = \nu_{tj} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \quad (\text{sans sommation sur } j) \quad (3.26a)$$

les termes précédents étant les éléments du *tenseur des corrélations de vitesses (ou tenseur de Reynolds)*

$$R_{jk} = \overline{v_j v_k} \quad (3.26b)$$

Par analogie avec la viscosité cinématique  $\nu$ , la grandeur  $\nu_{tj}$  est appelée *viscosité cinématique turbulente suivant la direction j*, et l'équation locale aux valeurs moyennes (3.24) devient :

$$\boxed{\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} V_j = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + div \left\{ (\nu + \nu_{tj}) \overrightarrow{grad} V_j \right\}} \quad (j = 1 \text{ à } 3) \quad (3.27)$$

Enfin, dans les écoulements pleinement turbulents, la diffusion turbulente est beaucoup plus intense que la diffusion moléculaire, d'où  $\nu_{tj} \gg \nu$ .

### ◆ *Cas particulier*

Dans de nombreuses circonstances (ch. 5 et 6) on peut admettre  $V \ll U$  et  $W = 0$ , et ne considérer qu'une seule viscosité turbulente (ou une seule contrainte de Reynolds  $\tau'_k$  dans la direction  $k$ ) en posant :

$$-\overline{u v} = \nu_t \overrightarrow{grad} U \quad \text{ou :} \quad -\overline{u v_k} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\tau'_k}{\rho} \quad (3.28a)$$

soit :

$$-\overline{u^2} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial x}$$

(3.28b)

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

et (3.27) devient :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \text{div} \left\{ (V + \nu_t) \overrightarrow{\text{grad}} U \right\} \quad (3.28c)$$

### ♥ Variante de la méthode générale

La forme de l'hypothèse (3.25a) oblige à introduire, dans le cas général, trois viscosités turbulentes  $\nu_{ij}$ . Il y a là évidemment une source de complication pour les calculs.

Pour se ramener à un seul paramètre  $\nu_t$  sans opérer malgré tout une schématisation trop simpliste, on peut remplacer (3.25a) par la condition suivante :

$$-\overline{v_j v_k} = \nu_t \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.29)$$

c'est-à-dire :

$$-\overline{v_j v_k} = 2\nu_t \varepsilon_{jk}$$

les  $\varepsilon_{jk}$  étant les taux de déformations (§ 1.2.1).

Dans le cas particulier évoqué au paragraphe précédent ( $V \ll U$ ,  $W = 0$ ), les deux méthodes sont équivalentes et l'on retrouve les expressions (3.28b).

♠ Le modèle pseudo-laminaire ainsi adapté à la quantité de mouvement est rendu ensuite opérationnel par des hypothèses phénoménologiques sur  $\nu_t$ , appelées « fermetures en un point » (cf. 3.2.3).

Dans ce qui suit, nous ne considérons que l'équation en  $x$  (3.28c). L'extension des hypothèses à l'équation en  $y$  serait immédiate en cas de besoin.

### 3.3.4.2 – HYPOTHÈSE DE BOUSSINESQ (1877)

L'hypothèse la plus élémentaire, due à Boussinesq, consiste à admettre que la viscosité turbulente  $\nu_t$  est uniforme dans l'écoulement :

$$\nu_t = \text{cte} \quad (3.30)$$

d'où une simplification de l'équation (3.28c) (en négligeant  $\nu$ ) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (3.31)$$

Nous avons insisté un peu plus haut sur le fait que les diffusivités turbulentes introduites par le modèle pseudo-laminaire dépendent des propriétés locales de chaque écoulement. Le caractère assez rustique de l'hypothèse (3.30) limite donc son domaine de validité. Elle est assez convenable dans le cas des écoulements atmosphériques, et acceptable en première approximation dans quelques autres cas comme les jets libres ou les écoulements dans la partie centrale d'une canalisation,  $\nu_t$  dépendant alors des conditions aux limites (forme du tuyau ou de la buse de soufflage).

### 3.3.4.3 – SCHÉMAS DYNAMIQUES

#### ♣ *Considérations physiques*

L'une des principales difficultés en turbulence est de décrire l'écoulement au voisinage des parois, et c'est particulièrement là que la condition (3.30) se révèle inadaptée.

D'une manière générale, en physique, quand l'hypothèse d'un paramètre constant n'est plus tenable, l'étape suivante consiste à postuler qu'il dépend d'une grandeur caractéristique du phénomène étudié, et on commence souvent par le plus simple, à savoir une dépendance linéaire.

Dans le cas présent, il y a potentiellement deux candidats pour cette fonction : le gradient transversal de vitesse, et la distance à la paroi.

Sachant qu'un fluide est un milieu à la fois visqueux et très déformable, on conçoit aisément que si la contrainte de cisaillement  $\tau$  (et donc le gradient de vitesse  $\partial U / \partial y$ ) devient trop grande dans l'écoulement, les filets fluides auront tendance à s'incurver (fig. 3.2). C'est l'amorce d'un tourbillon, et par conséquent de la turbulence si l'amortissement est insuffisant. *La diffusion turbulente devrait donc augmenter avec  $\partial U / \partial y$ .*

Mais de plus, le développement d'un tourbillon sera évidemment limité par une trop grande proximité de la paroi, ou favorisé lorsqu'on s'éloigne de celle-ci (fig. 3.2). *La diffusion turbulente devrait donc augmenter aussi avec la distance  $y$  à la paroi.*

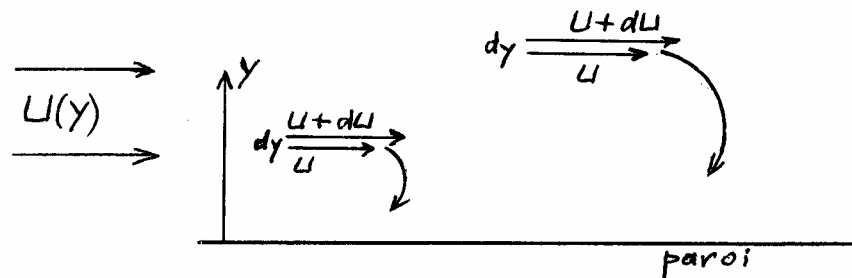


FIG. 3.2. – Amorces de tourbillons : représentation très schématique

#### ◆ *Hypothèse de Prandtl (1925)*

Historiquement, la première étape a été franchie par Prandtl, en admettant que la viscosité turbulente est proportionnelle à la valeur absolue du gradient transversal de vitesse (le signe du gradient ne change *a priori* rien au phénomène lui-même), ce qui s'écrit :

$$\boxed{\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|} \quad (3.32)$$

Dans cette expression, le coefficient de proportionnalité  $l$  possède la dimension d'une longueur, que Prandtl a appelé *longueur de mélange* en raison d'une analogie – pas très convaincante – avec la notion de libre parcours moyen en physique statistique.

Mais ceci ne fait que déplacer le problème, sans vraiment le résoudre. Si les résultats expérimentaux étaient compatibles avec la condition  $l = cte$ , la longueur de mélange pourrait

être déterminée expérimentalement dans diverses configurations. Malheureusement, la plupart du temps ce n'est pas le cas, surtout au voisinage d'une paroi.

C'est ici qu'intervient la seconde étape, avec l'hypothèse d'une longueur de mélange proportionnelle à l'ordonnée  $y$  :

$$l = K y \quad (3.33a)$$

de sorte que :

$$\nu_t = K^2 y^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.33b)$$

En admettant que  $K$  est une « vraie » constante (appelée *constante de Karman*), ce modèle est applicable dans des écoulements unidimensionnels ou faiblement bi-dimensionnels de type couche limite. Nous le retrouverons au chapitre 5.

#### ♥ *Hypothèse de Prandtl-Reichardt (1942)*

Le modèle précédent n'est pas le seul envisageable. Pour certaines catégories limitées d'écoulements (jets libres, panaches, écoulements atmosphériques), on obtient des résultats acceptables en considérant que  $\nu_t$  est simplement proportionnelle à la composante  $U$  de la vitesse, soit :

$$\boxed{\nu_t = lU} \quad (3.34)$$

où  $l$  est encore homogène à une longueur.

♠ D'autres expressions de  $l$  peuvent être utilisées, qui sont plus ou moins bien adaptées à chaque problème. Il en sera fait état dans les chapitres suivants.

Les schémas de fermeture de la forme (3.30), (3.32-33) ou (3.34) sont souvent appelés *fermetures algébriques*, pour signifier que les  $\nu_j \nu_k$  sont déterminés par des expressions algébriques qui les relient au champ des vitesses.

### 3.3.4.4. – MODÈLES BASÉS SUR DES ÉQUATIONS SUPPLÉMENTAIRES DE BILANS

#### ♣ *Principes*

Les modèles précédents sont bien utiles dans des cas relativement simples, mais ils sont très loin de répondre à tous les besoins concrets des ingénieurs autant que des chercheurs.

Il faut donc franchir une autre étape conceptuelle et, dans la mesure où l'on conserve le modèle pseudo-laminaire, accepter l'idée que la viscosité turbulente  $\nu_t$  doit être raccordée de façon plus fine à d'autres paramètres moyens de l'écoulement. Dans cette optique, le progrès essentiel réalisé au tournant des années 1970 a été d'imaginer de nouvelles grandeurs susceptibles de faire l'objet d'un bilan, et de les relier à cette viscosité turbulente.

#### ◆ *Schéma énergétique : modèle $k-l$*

La première grandeur mise en relation avec  $\nu_t$  a été l'énergie cinétique turbulente, ou plus précisément sa valeur moyenne  $k$ , définie par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_j v_j} \quad (3.35a)$$

Si l'on désigne par  $u, v, w$  les composantes du vecteur fluctuation  $\vec{v}$ ,  $k$  s'écrit :

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) \quad (3.35b)$$

Pour exprimer la viscosité turbulente, on retiendra par exemple « l'hypothèse de Prandtl – Kolmogorov » (1945) :

$$\boxed{v_t = l k^{1/2}} \quad (3.36a)$$

où le paramètre  $l$  est toujours homogène à une longueur.

Une formulation un peu plus fine à proximité d'une paroi (Norris et Reynolds, 1975) est :

$$v_t = l k^{1/2} \left\{ 1 - e^{-cte \frac{ky}{v}} \right\} \quad (3.36b)$$

Le schéma appelé « modèle  $k - l$  » requiert la résolution d'une nouvelle équation de bilan, qui porte sur l'énergie cinétique de turbulence  $k$ . Pour cette raison, il fera l'objet d'une analyse spécifique dans le § 3.4.

#### ♥ Schéma énergétique – dissipatif : modèle $k - \varepsilon$

On accède ensuite à des schémas beaucoup plus raffinés en appuyant le modèle pseudo-laminaire sur la résolution de deux équations supplémentaires de bilans. Le plus utilisé d'entre eux est le modèle  $k - \varepsilon$ , qui fait intervenir le bilan d'énergie cinétique turbulente  $k$ , et celui de la dissipation turbulente d'énergie, notée  $\varepsilon$ . Il sera lui aussi repris au parag. 3.4.

#### ♠ Schéma énergétique – fréquentiel : modèle $k - \omega$

Avec le modèle  $k - \omega$ , le bilan de la dissipation  $\varepsilon$  est remplacé par le bilan d'une grandeur  $\omega$ , identifiable à une vorticité turbulente et homogène à l'inverse d'un temps, qui s'interprète aussi comme une fréquence d'apparition (ou d'extinction) de tourbillons (§ 3.4.4).

#### 3.3.4.5 – A PROPOS DU PARAMÈTRE $l$

Il faut bien se rendre compte que, en faisant intervenir la « longueur de mélange »  $l$ , on ne résout pas le problème posé : on ne fait que déplacer la détermination de  $v_t$  à celle de  $l$ , qui est aussi une fonction de l'écoulement et non du fluide.

La variété des hypothèses envisagées montre d'ailleurs bien que cette démarche n'aboutit pas à introduire une ligne directrice dans le raisonnement. Elle permet néanmoins de progresser, et présente en outre l'intérêt de se rattacher aux concepts d'échelles de turbulence (§ 3.6).

D'une manière plus générale, le handicap majeur de tous les modèles de turbulence réside dans leur faiblesse de prédictibilité : on ne sait traiter que des catalogues de cas particuliers pour lesquels l'expérience a permis d'établir une loi phénoménologique sur  $l$  ou  $v_t$ , ou de caler certains coefficients dans les équations en  $k$ , en  $\varepsilon$  ou en  $\omega$ . Mais on n'est guère en mesure de prévoir ce qui va se passer dans des conditions pour lesquelles aucune expérience n'a été réalisée.

### 3.3.5. – Diffusion turbulente de chaleur

#### 3.3.5.1. – DIFFUSIVITÉ THERMIQUE TURBULENTE

S'agissant maintenant du problème thermique, nous noterons :

$T$  la valeur moyenne de la température  
 $\theta$  sa fluctuation.

Nous avons ici :

$C = \rho C_p T$ , enthalpie volumique

$D_c = a$ , diffusivité thermique

D'après (3.9), l'équation aux valeurs moyennes s'écrit, après division par  $\rho C_p$  :

$$\overrightarrow{div} T \vec{V} = \frac{1}{\rho C_p} (\bar{P} + \bar{\Phi}) + \overrightarrow{div} \left\{ a \overrightarrow{grad} T - \overrightarrow{\theta v} \right\} \quad (3.37)$$

avec  $q_I = P + \Phi$  pour un fluide isochore ( $P$  source volumique de chaleur,  $\Phi$  fonction de dissipation, cf. 1.57b).

Soit encore, sachant que  $\overrightarrow{div} T \vec{V} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} T$  (car  $\rho = \text{cte}$ , donc  $\overrightarrow{div} \vec{V} = 0$ ) :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} T = \frac{1}{\rho C_p} (\bar{P} + \bar{\Phi}) + \overrightarrow{div} \left\{ a \overrightarrow{grad} T - \overrightarrow{\theta v} \right\} \quad (3.38)$$

La méthode est la même que pour la masse et la quantité de mouvement. Conformément à la relation (3.15), on pose :

$$\boxed{-\overrightarrow{\theta v} = a_t \overrightarrow{grad} T} \quad (3.39)$$

Ce faisant, on définit une *diffusivité thermique turbulente*  $a_t$ , et l'équation aux valeurs moyennes (3.38) se transforme en :

$$\boxed{\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} T = \frac{1}{\rho C_p} (\bar{P} + \bar{\Phi}) + \overrightarrow{div} \left\{ (a + a_t) \overrightarrow{grad} T \right\}} \quad (3.40)$$

Là encore, en turbulence développée (c'est - à - dire pas trop près des parois), on aura :  
 $a_t \gg a$ .

#### 3.3.5.2. – HYPOTHÈSES DE CALCUL

Les hypothèses sur la diffusivité turbulente  $a_t$  ressemblent assez à celles qui ont été faites sur la viscosité turbulente. Citons en particulier :

♣ soit :  $a_t = \text{cte}$  (3.41)  
 utilisable dans les écoulements atmosphériques ou les jets libres par exemple, ou encore dans les écoulements en canalisations,



◆ soit : 
$$a_t = l_\theta \cdot l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.42)$$

acceptable dans des écoulements de couche limite. On retrouve la *longueur de mélange dynamique*  $l$  (§ 3.3.4.3) associée à un nouveau paramètre  $l_\theta$  appelé par analogie *longueur de mélange thermique*.

Dans ce schéma, de nouvelles hypothèses doivent évidemment être faites sur  $l_\theta$ . Ainsi, au voisinage d'une paroi, on peut prendre :

$$l_\theta = K_\theta y \quad (3.43)$$

♥ ou encore : 
$$\frac{a_t}{\nu_t} = cte \quad (3.44)$$

On admet donc ici que  $a_t$  est en tout point proportionnelle à la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  (§ 3.3.4). Par analogie avec le nombre de Prandtl classique  $Pr = \nu / a$  (ch. 2), le rapport  $\nu_t / a_t$  est appelé *nombre de Prandtl turbulent*  $Pr_t$  :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t} \quad (3.45)$$

Cette hypothèse est validée dans beaucoup d'applications. Voici les valeurs calées expérimentalement pour quelques cas classiques :

jet plan	$Pr_t \# 0,5$
jet axisymétrique	0,7
couche limite (voisinage d'une paroi)	0,9
canalisation circulaire	0,9
canalisation non circulaire	1 à 1,1

### 3.3.6. – Résolution du problème thermoconvectif

Dans le cadre du modèle pseudo – laminaire, le système d'équations aux valeurs moyennes que l'on doit résoudre est en définitive :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (3.18)$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \text{div} \left\{ (\nu + \nu_{tj}) \overrightarrow{\text{grad}} V_j \right\} \quad (j = 1 \text{ à } 3) \quad (3.27)$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{1}{\rho C_p} (\bar{P} + \bar{\Phi}) + \text{div} \left\{ (a + a_t) \overrightarrow{\text{grad}} T \right\} \quad (3.40)$$

avec éventuellement une équation supplémentaire pour chaque constituant  $A$  si le fluide est un mélange :

$$\text{div}(\rho_A \vec{V}) = \bar{q}_{IA} + \text{div} \left\{ (D_A + D_{At}) \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \right\} \quad (3.22)$$

Les hypothèses sur  $D_{At}$  procèdent des mêmes démarches que les hypothèses sur  $a_t$ .

### 3.4. – MODÈLES LOCAUX BASÉS SUR DES ÉQUATIONS D'APPOINT

Les différentes variantes du modèle pseudo – laminaire que nous avons examinées possèdent beaucoup de qualités, entre autres une relative simplicité. Toutefois, les résultats qu'elles fournissent ont un caractère partiel, catégoriel, et ce qui est plus grave, ils sont parfois peu satisfaisants, en particulier lorsqu'on se trouve en présence de gradients de pression.

Des modèles plus élaborés se révèlent donc nécessaires. Dans le cadre de la théorie statistique locale de la turbulence, ces modèles font appel à des équations supplémentaires de bilans portant sur certaines grandeurs moyennes. La méthode générale consistant à écrire des bilans statistiques de grandeurs transportables a été initiée par A. Favre (1965).

Les équations « d'appoint » les plus utilisées sont l'équation en  $k$  (énergie cinétique de turbulence) et l'équation en  $\varepsilon$  (dissipation).

#### 3.4.1. – Modèle à une équation dynamique d'appoint ou modèle $k - l$

Le modèle  $k - l$  fait intervenir à la fois l'hypothèse de Prandtl – Kolmogorov (3.36) reliant la viscosité turbulente  $\nu_t$  à  $k$ , et la résolution de l'équation de bilan de  $k$ . Celle-ci sera déduite d'une équation plus générale que nous allons d'abord présenter.

##### 3.4.1.1. – ÉQUATIONS DE BILANS POUR LES CORRÉLATIONS

♣ Au prix de quelques calculs un peu laborieux mais parfaitement classiques, on peut établir *une relation générale de bilan pour les corrélations*  $\overline{c v_j}$  (le détail de ces calculs figure en Annexe 3.A.4).

La méthode est la suivante : on part de l'équation aux fluctuations (3.11) que l'on adapte au cas de la quantité de mouvement. Puis (3.11) est multipliée par  $v_j$  tandis que l'équation de quantité de mouvement (3.23) est multipliée par  $c$ . On additionne membre à membre les deux nouvelles équations ainsi obtenues, et l'on en prend la moyenne.

Voici le résultat de l'opération exprimé sous forme vectorielle (en coordonnées cartésiennes, vois Annexe 3.A.4) et valable pour des écoulements isochores, permanents en moyenne (d'où  $\overline{\partial(c v_j)} / \partial t = 0$ , § 3.2.1 ♥) où  $D_c$  et  $\nu$  sont sensiblement constants :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } c v_j} &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } C}} - \overline{c \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } V_j}} & (a) \\ &+ \overline{v_j q'_{1c}} - \frac{1}{\rho} \overline{c \frac{\partial p'}{\partial x_j}} & (b) \\ &- (D_c + \nu) \overrightarrow{\text{grad } c \cdot \overrightarrow{\text{grad } v_j}} & (c) \\ &+ D_c \overrightarrow{\text{div}(v_j \text{ grad } c)} + \nu \overrightarrow{\text{div}(c \text{ grad } v_j)} & (d) \\ &- \overline{\text{div } c v_j \vec{v}} & (e) \end{aligned} \quad (3.46)$$

avec :  $p'$  fluctuation de pression ;  $q'_{1c}$  fluctuation de la source locale de  $C$ .

Nous n'avons pas *a priori* les moyens d'écrire le bilan local de la grandeur  $\overline{c v_j}$ . Mais la relation (3.46) se présente bien comme un tel bilan. Au premier membre on trouve en effet :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } c v_j} = \text{div}(c v_j \vec{V}) \quad \text{puisque} \quad \text{div} \vec{V} = 0$$

Au second membre, on reconnaît des sources de volume ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) et des sources de surface (termes en divergence :  $d$ ,  $e$ ).

L'interprétation des différentes sources est la suivante :

Le terme ( $a$ ) exprime la production volumique de  $\overline{c v_j}$  due aux gradients de  $V_j$  et de  $C$ , le premier tendant à augmenter les fluctuations de vitesse et le second les fluctuations  $c$  de la grandeur  $C$ .

Le second terme ( $b$ ) représente la contribution des fluctuations des sources internes  $q'_{Ic}$  et  $p'$  au bilan de  $\overline{c v_j}$ .

Quant à l'expression ( $c$ ), elle traduit un processus de dissipation proche de celui que décrit la fonction  $\Phi$  introduite au chapitre 1 (§ 1.3.4.2), puisque celle-ci contient également des produits de gradients.

En ce qui concerne les sources surfaciques, on reconnaît en ( $d$ ) un flux de diffusion, tributaire à la fois d'un coefficient de diffusion moléculaire ( $D_c$  ou  $\nu$ ) et d'un coefficient turbulent : dans le premier terme,  $v_j$  joue le rôle d'un coefficient de diffusion pour  $c$  et vice-versa dans le second terme.

Enfin apparaît en ( $e$ ) un terme de diffusion nouveau, qui fait intervenir une corrélation triple (ou moment du 3° ordre).

◆ Une première application de l'équation générale (3.46) concerne le cas où  $C$  est la quantité de mouvement. On obtient alors une *équation de bilan pour  $\overline{v_j v_k}$* . Dans l'hypothèse où l'on est *en convection forcée* (voir détails en Annexe 3.A.4.2) celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } v_j v_k} = & -v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } V_k} - v_k \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad } V_j} \\ & - \frac{1}{\rho} \left( v_k \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right) \\ & - 2\nu \overrightarrow{\text{grad } v_j} \cdot \overrightarrow{\text{grad } v_k} \\ & + \nu \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad } v_j v_k} \right) - \text{div} \overline{v_j v_k \vec{v}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Au point de vue physique, les corrélations  $\overline{v_j v_k}$  sont des grandeurs relativement abstraites. Mais rappelons-nous qu'en les multipliant par  $\rho$ , on retrouve les éléments  $\rho R_{jk}$  du tenseur de Reynolds (3.26b), qui sont des quantités de mouvement turbulentes (l'analogie avec le tenseur (1.30) des quantités de mouvement de l'écoulement moyen est évidente). Le système (3.47) s'interprète donc comme un bilan de quantité de mouvement moyenne de la turbulence.

♥ On peut également identifier  $C$  à l'enthalpie et obtenir un *bilan pour la corrélation  $\overline{\theta v_j}$*  (Annexe 3.A.4.3) :

$$\begin{aligned}
\overline{\vec{V} \cdot \text{grad } \theta v_j} &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \text{grad } T} - \overline{\theta \vec{v} \cdot \text{grad } V_j} \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \overline{\theta \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - (a + \nu) \overline{\text{grad } \theta \cdot \text{grad } v_j} \\
&\quad + a \overline{\text{div } v_j \text{ grad } \theta} + \nu \overline{\text{div } \theta \text{ grad } v_j} \\
&\quad - \overline{\text{div } \theta v_j \vec{v}}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$T$  désignant la valeur moyenne de la température et  $\theta$  sa fluctuation.

### 3.4.1.2. – ÉQUATION DE BILAN POUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE TURBULENCE $k$

La définition de l'énergie cinétique de turbulence a déjà été introduite au paragraphe 3.3.4.4 (relations 3.35), à savoir :

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_j v_j} = \frac{1}{2} \overline{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Il s'agit en fait d'une énergie massique (en  $\text{m}^2/\text{s}^2$ ), la véritable énergie cinétique (volumique) étant bien entendu  $\rho k = \frac{1}{2} \overline{\rho v_j v_j}$ . Les deux termes sont néanmoins proportionnels si  $\rho = \text{cte}$ , et nous conserverons dans la suite la terminologie habituelle.

Par contre, la signification physique de  $k$  est parfaitement claire :  $\rho k$  est bien l'énergie cinétique moyenne de la turbulence. Soit, en effet,  $E_c$  l'énergie cinétique totale :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho (\vec{V} + \vec{v})^2 = \frac{1}{2} \rho (\vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2) \tag{3.49a}$$

En passant aux valeurs moyennes, et sachant que  $\overline{\vec{v}} = 0$ , on obtient :

$$\overline{E_c} = \frac{1}{2} \rho \overline{\vec{V}^2} + \frac{1}{2} \rho \overline{\vec{v}^2} = \frac{1}{2} \rho \overline{\vec{V}^2} + \rho k \tag{3.49b}$$

où le premier terme représente l'énergie cinétique du mouvement d'ensemble et le second l'énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent.

Cependant, on ne peut pas utiliser directement l'équation aux fluctuations (3.11) pour établir le bilan de  $k$ , car on ne dispose d'aucun critère pour en identifier *a priori* les sources (nous avons rencontré exactement le même problème au chapitre 1 (§ 1.3.4) pour exprimer le bilan d'énergie mécanique).

Il faut donc partir des trois équations de covariance  $\overline{v_i v_j}$  (3.47) (où  $i, j = 1, 2, 3$ ), faire  $i = j$  dans chacune d'elles et additionner ensuite membre à membre (Annexe 3.A.5). On obtient alors une relation sur  $k$  qui s'interprète comme un bilan local (n'oublions pas que la répétition d'un indice dans un terme signifie « sommation sur cet indice ») :

$$\begin{aligned}
\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} k &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j} & (a) \\
&= - \overline{v \overrightarrow{\text{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j} & (b) \\
&= - \frac{1}{\rho} \overline{v \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p'} & (c) \\
&+ v \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}} k) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \overline{v_j v_j \vec{v}} & (d_1), (d_2)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Dans cette équation, on distingue bien :

♣ *Les sources de surface* qui sont les termes en divergence, c'est-à-dire les termes (d) comprenant : diffusion liée aux fluctuations de vitesse  $\operatorname{div} \left\{ \overline{v_j v_j \vec{v}} \right\}$  et diffusion moléculaire  $v \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}} k)$ .

Portons un instant notre attention sur la corrélation triple  $\operatorname{div} \left\{ \overline{v_j v_j \vec{v}} \right\}$  pour bien comprendre son origine et son interprétation. Ce terme évoque une diffusion turbulente  $\operatorname{div} c \vec{v}$ ,  $c$  représentant dans le cas présent la fluctuation d'énergie cinétique turbulente. En effet,  $v_j v_j$  (qui est une autre façon d'écrire le vecteur fluctuant  $\vec{v}^2$ ) est la valeur instantanée de l'énergie cinétique turbulente massique, somme de sa valeur moyenne  $k$  et d'une fluctuation que nous noterons  $k'$  :

$$v_j v_j = k + k'$$

d'où :

$$\overline{v_j v_j \vec{v}} = \overline{(k + k') \vec{v}} = \overline{k \vec{v}} + \overline{k' \vec{v}}$$

et comme  $k$  est déjà une moyenne,  $\overline{k \vec{v}} = k \overline{\vec{v}} = 0$  puisque la moyenne d'une fluctuation est nulle, cf. Annexe 3.A.2). Donc, finalement :

$$\overline{v_j v_j \vec{v}} = \overline{k' \vec{v}} \tag{3.51}$$

◆ *Les sources de volume* : production (a) et (c), et dissipation en chaleur (b).

La « production » (a) est le produit des contraintes de Reynolds par le cisaillement moyen dans l'écoulement, c'est-à-dire le taux de production d'énergie cinétique turbulente par l'écoulement moyen, autrement dit de l'énergie qui est transférée du mouvement moyen au mouvement turbulent.

Le terme (b), qui revêt une grande importance, est appelé « taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence », ou plus brièvement « *dissipation* », et noté  $\varepsilon$  (prononcer « *epsilon* ») :

$$\boxed{\varepsilon = v \overrightarrow{\text{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j = v \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}} \quad (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}) \tag{3.52}$$

Plus concrètement,  $\rho \varepsilon$  (en  $\text{W}/\text{m}^3$ ) s'interprète comme la puissance volumique dissipée par les fluctuations turbulentes de vitesse.

### 3.4.1.3. – RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE BILAN POUR $k$

L'équation de bilan (3.50) n'est pas utilisable en l'état, mais elle peut être résolue au prix de quelques approximations et hypothèses.

♣ Tout d'abord, la confrontation avec l'expérience montre qu'on peut souvent négliger le terme de pression  $\frac{1}{\rho} \overline{v \cdot \text{grad } p'}$ .

De plus, chez les sources surfaciques, on aura recours une fois encore au modèle de diffusion (3.15) en introduisant une *diffusivité cinétique turbulente*  $D_{kt}$  dans le terme (d<sub>2</sub>), soit compte tenu de (3.51), et puisque  $k$  représente l'énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent :

$$\frac{1}{2} \text{div } \overline{v_j v_j \vec{v}} = \frac{1}{2} \text{div } k' \vec{v} = - \text{div}(D_{kt} \overline{\text{grad } k}) \quad (3.53)$$

◆ Ensuite, comme le modèle  $k-l$  est de type pseudo-laminaire, il exige l'intervention d'une viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$ . Celle-ci est définie conformément à l'hypothèse (3.29), c'est-à-dire que l'on écrit dans le terme (a) :

$$-\overline{v_i v_j} = \nu_t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.54)$$

d'où la nouvelle forme du bilan (3.50) de  $k$ , exprimé en coordonnées cartésiennes :

$$V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \nu_t \underbrace{\left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)}_{(a)} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \underbrace{(\nu + D_{kt})}_{(d)} \underbrace{\frac{\partial k}{\partial x_i}}_{(b)} \right\} - \varepsilon \quad (3.55)$$

On reconnaît en (a) un terme proportionnel à la fonction de dissipation  $\Phi$  pour l'écoulement moyen (ch. 1, § 1.3.4.2). En effet :

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

d'où :

$$\nu_t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\nu_t}{\mu} \Phi \quad (3.56)$$

Dans ce contexte, on retiendra comme hypothèse sur  $\nu_t$  une relation du type Prandtl-Kolmogorov (3.36) reliant la viscosité turbulente et l'énergie cinétique turbulente :

$$\nu_t = l k^{1/2} \quad (3.57a)$$

où  $l$  est homogène à une longueur (certains auteurs écrivent  $\nu_t = C_\nu l k^{1/2}$  en ajoutant une constante sans dimension). En fait, cette relation est suggérée par des considérations dimensionnelles sur les échelles de turbulence, qui seront développées plus loin (§ 3.6.2).

♥ D'autre part, il semble naturel d'admettre que la dissipation  $\varepsilon$  ne dépend explicitement que de  $k$  (la source d'énergie) et de  $\nu_t$  (sa capacité de diffusion). Sachant que  $k$  s'exprime en

$m^2.s^{-2}$ ,  $\nu_t$  en  $m^2.s^{-1}$  et  $\varepsilon$  en  $m^2.s^{-3}$ , la forme de  $\varepsilon$  la plus simple qui soit compatible avec la condition dimensionnelle est :

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} \quad (3.57b)$$

où  $C_\mu$  est un coefficient sans dimension qui doit être évalué expérimentalement.

L'expérience montre que cette relation est bien vérifiée pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, à condition d'avoir une turbulence assez homogène ( $\overline{v_j^2}$  sensiblement uniforme dans l'écoulement).

Compte tenu de l'hypothèse (3.57a),  $\varepsilon$  est donc de la forme :

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^{3/2}}{l} \quad (3.57c)$$

♠ Enfin, l'expérience suggère aussi que la diffusivité  $D_{kt}$  est proportionnelle à  $\nu_t$ . On a donc, dans le terme (d) de (3.55) :

$$D_{kt} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \quad (3.58)$$

la constante de proportionnalité  $\sigma_k$  devant faire l'objet d'un calage expérimental.

L'équation en  $k$  se présente donc finalement ainsi :

$$\boxed{V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = l k^{1/2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - C_\mu \frac{k^{3/2}}{l}} \quad (3.59)$$

Bien évidemment, tout ce travail ne dispense pas de faire des hypothèses adéquates sur  $l$  et  $l_\theta$  pour fermer le système.

En définitive, le système d'équations à résoudre est celui du paragraphe 3.3.6 (équations 18, 27, 45) auquel vient s'ajouter l'équation en  $k$  (3.59) pour la détermination de  $\nu_t$ .

### 3.4.2. – Modèle « k – epsilon » ( $k - \varepsilon$ ) standard

#### 3.4.2.1 - PRINCIPE

♣ Les insuffisances du modèle  $k-l$  ont conduit à une sorte de fuite en avant qui s'est essentiellement focalisée sur l'élaboration d'une nouvelle équation de bilan couplée avec l'équation en  $k$ , et supposée apporter des éléments plus solides que les hypothèses sur le paramètre «  $l$  », ce qui a donné naissance à des modèles dits « à deux équations ». Le plus connu d'entre eux est appelé *modèle k-ε*.

Dans le modèle  $k-\varepsilon$ , le point de départ est le même que dans le modèle  $k-l$  : pour résoudre le problème dynamique, on admet l'existence d'une viscosité turbulente  $\nu_t$ , et l'on reprend l'hypothèse (3.57) :

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{v_t}$$

Mais cette fois, il n'est pas fait appel à une quelconque notion de longueur de mélange. De la relation précédente, on tire simplement :

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.60)$$

On reprend alors l'équation en  $k$  (3.55) à laquelle on adjoint une relation de bilan pour la dissipation  $\varepsilon$ .

◆ Tout d'abord, compte tenu de (3.57) et (3.60), l'équation (3.55) devient ;

$$V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = v_t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - C_\mu \frac{k^2}{v_t} \quad (3.61)$$

♥ Quant à la nouvelle équation de bilan pour la dissipation  $\varepsilon$ , elle est établie en partant du bilan relatif aux fluctuations (3.11), dont on prend le gradient, et que l'on multiplie ensuite scalairement par  $2D_c \overline{grad c}$ . Le passage aux valeurs moyennes conduit à l'équation cherchée, à condition de remplacer  $c$  par  $v_j$  et  $D_c$  par  $v$  (Annexe 3.A.7, éq. 11).

Avec cette relation, les difficultés ne sont pas aplanies pour autant, car elle n'est pas utilisable directement. De plus, la modélisation de ses termes est d'autant moins facile que leur signification physique commence à devenir passablement abstraite, même si on y reconnaît encore des sources surfaciques et volumiques.

Tout d'abord, une analyse des ordres de grandeur des différentes sources montre que les trois premières ( $b_1, b_2, c_2$ ) sont généralement négligeables. Aussi nous ne réécrivons ci-dessous que les termes conservés :

$$\begin{aligned} V_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & -v \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) - 2v^2 \overline{\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}} \quad (g_1), (g_2) \\ & - 2v \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}} - v \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_k \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \right) \quad (h_2), (h_1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dans ce qui reste, deux autres termes ne sont pas trop difficiles à traiter : ce sont ( $g_1$ ) et ( $h_1$ ), correspondant à des sources surfaciques. Le premier représente une diffusion de  $\varepsilon$  gouvernée par la viscosité moléculaire, et n'a pas besoin d'être retouché. Le second s'écrit vectoriellement :

$$v \operatorname{div} \left( \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{v}} \right)$$

Il présente une ressemblance avec le terme ( $d_2$ ) de (3.50), et peut faire l'objet d'un traitement analogue, par lequel la relation (3.51) devient :

$$v \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{v}} = \overline{\varepsilon' \vec{v}} \quad (3.64a)$$



où  $\varepsilon'$  est la fluctuation de la dissipation  $\varepsilon$ . Ainsi, on introduit une *diffusivité turbulente*  $D_{\varepsilon t}$  de  $\varepsilon$ , et on pose, de la même façon que dans (3.53) :

$$\begin{aligned} \nu \operatorname{div} \left( \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} \vec{v} \right) &= \operatorname{div} \overline{\varepsilon' \vec{v}} = - \operatorname{div} \left( D_{\varepsilon t} \overline{\operatorname{grad} \varepsilon} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_{\varepsilon t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (3.64b)$$

puis enfin on admet (comme pour  $D_{kt}$ , relation 3.58) que  $D_{\varepsilon t}$  est proportionnelle à la diffusivité turbulente  $\nu_t$  soit, en appelant  $\sigma_\varepsilon$  la constante de proportionnalité :

$$D_{\varepsilon t} = \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \quad (3.64c)$$

si bien que  $(h_1)$  s'écrit enfin :

$$\nu \operatorname{div} \left( \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} \vec{v} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (3.65)$$

Les choses se compliquent avec les sources volumiques représentées par les termes  $(g_2)$  et  $(h_2)$ . Pour les raccrocher aux grandeurs déjà définies ( $\Phi$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu_t$ ), on est amené à leur appliquer une analyse à la fois paramétrique et dimensionnelle, en remarquant que la ressemblance des bilans de  $k$  et de  $\varepsilon$  doit se retrouver dans les équations modélisées. Il sort finalement du chapeau :

$$(g_2) + (h_2) = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.66)$$

où  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$  sont de nouvelles constantes, que l'expérience seule permet d'évaluer.

♠ La forme opérationnelle finale de l'équation en  $\varepsilon$  (3.63) est donc :

$$V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.67)$$

(comme deux indices - en l'occurrence  $i$  et  $j$  - suffisent ici, l'indice  $k$  a été écarté pour éviter toute confusion avec l'énergie cinétique de turbulence).

On dispose alors d'un système de deux équations (3.61 et 3.67) à deux inconnues ( $k$  et  $\varepsilon$ ) qui permet de calculer la viscosité turbulente  $\nu_t$  à partir de (3.60). Elles sont rassemblées ci-dessous, en écriture cartésienne :

$V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \nu_t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - C_\mu \frac{k^2}{\nu_t}$	(3.68)
$V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$	

et aussi en écriture vectorielle, la trace d'un tenseur (somme des éléments de la diagonale principale) étant notée  $Tr$  :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} k = \nu_t Tr\left(2\overline{\overline{D}} \otimes \overline{\overline{grad V}}\right) + div\left\{\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right) \overrightarrow{grad} k\right\} - C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} \quad (3.69)$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \varepsilon = C_{\varepsilon 1} C_\mu k Tr\left(2\overline{\overline{D}} \otimes \overline{\overline{grad V}}\right) + div\left\{\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \overrightarrow{grad} \varepsilon\right\} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Sur une paroi, les *conditions aux limites* admises sont :

$$k = 0 ; \quad \partial k / \partial y = 0 ; \quad \varepsilon = 0 \quad (3.70a)$$

A titre d'exemple, voici les constantes adoptées dans le « modèle standard » pour un jet axisymétrique ou une couche limite :

$$C_\mu = 0,09 ; \quad \sigma_k = 1 ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 ; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad (3.70b)$$

#### 3.4.2.2. – PROCÉDURE DE RÉOLUTION

Au total, le modèle standard requiert la résolution de six équations dynamiques.

Schématiquement, l'algorithme de résolution se déroule comme suit, du moins en convection forcée, lorsque les équations dynamiques et thermique sont découplées :

- 1.- Choisir des valeurs de départ  $k_0, \varepsilon_0$ , d'où l'on tire au moyen de (3.60), la viscosité turbulente de départ  $\nu_{t0}$ .
- 2.- Avec cette viscosité, résoudre les équations dynamiques (3.18a) et (3.27) pour obtenir un champ de vitesses moyennes.
- 3.- Résoudre les équations couplées (3.68) en  $k$  et  $\varepsilon$ .
- 4.- Recalculer  $\nu_t$  par (3.60) et revenir à 2.
- 5.- Répéter l'opération jusqu'à la convergence.
- 6.- Résoudre l'équation d'énergie (3.40).

#### 3.4.3. – Variantes du modèle $k - \varepsilon$ standard

Le schéma de base, dont les grandes lignes viennent d'être présentées, ne marche pas dans toutes les situations. Faute de mieux, il a donné naissance à un nombre considérable de variantes et de sous-variantes (beaucoup d'entre elles ne se distinguent que par la valeur des constantes) destinées à améliorer ses performances dans telle ou telle catégorie d'application. Nous n'en donnerons que les idées directrices.

### 3.4.3.1. – MODÈLES À BAS NOMBRE DE REYNOLDS

Un défaut du modèle  $k - \varepsilon$  standard est qu'il surévalue le frottement et le flux de chaleur dans les écoulements de couche limite avec gradient de pression adverse.

Les modèles dits (improprement) « à bas Reynolds » essaient de corriger cet inconvénient. Ils consistent à introduire des termes correctifs pour mieux tenir compte des effets de parois. Ceux-ci prennent généralement la forme de *fonctions d'amortissement*, notées  $f_\mu$  et  $f_2$ .

La première,  $f_\mu$ , est appliquée à la viscosité turbulente, qui devient :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.71)$$

Par ricochet, dans l'équation en  $\varepsilon$ , le facteur du premier terme  $C_{\varepsilon 1} C_\mu k$ , qui s'écrivait aussi en raison de (3.60) :

$$C_{\varepsilon 1} C_\mu k = C_{\varepsilon 1} \nu_t \frac{\varepsilon}{k}$$

devient de ce fait :  $C_{\varepsilon 1} C_\mu f_\mu k$

La seconde,  $f_2$ , est appliquée au dernier terme de l'équation en  $\varepsilon$ .

Formellement, dans (3.68) l'équation en  $k$  est donc inchangée tandis que l'équation en  $\varepsilon$  est corrigée comme suit :

$$V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_{\varepsilon 1} C_\mu f_\mu k \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.72)$$

Quant à ces fonctions d'amortissement  $f_\mu$  et  $f_2$ , elles ont été ajustées (pour ne pas dire bricolées) à l'aide d'un nouveau paramètre, le « nombre de Reynolds turbulent »  $R_t$  défini par :

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (3.73)$$

L'appellation inattendue de « Reynolds turbulent » trouve une justification partielle grâce aux échelles de turbulence (§ 3.6.4) mais elle est malencontreuse, car  $R_t$  n'a rien à voir avec le nombre de Reynolds  $Re$  de l'écoulement.

Parmi les diverses fonctions d'amortissement qui ont été proposées, citons seulement comme exemples :

$$f_\mu = e^{-\frac{2,5}{(1 + R_t/50)^2}} \quad (\text{Jones et Launder}) \quad (3.74a)$$

$$f_2 = 1 - 0,22 e^{-\frac{R_t^2}{36}} \quad (\text{Hanjalic}) \quad (3.74b)$$

Mais pourquoi appelle-t-on ces modèles « bas Reynolds » ? C'est que, d'après (3.60) et (3.73) :

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} = \frac{l}{C_\mu f_\mu} \frac{\nu_t}{\nu} \quad (3.74c)$$

Avec la dernière formule, on vérifie facilement que les valeurs numériques ne dépassent guère 100, et sont donc bien inférieures à celles de  $Re$ .

Bref, tout ceci repose sur un échafaudage qui laisse un sentiment d'insatisfaction, tant du point de vue sémantique que physique, mais avec une justification de poids : les résultats sont meilleurs que ceux du modèle standard.

### 3.4.3.2. – MODÈLE « $k - \varepsilon$ RNG »

Basée sur une technique mathématique appelée *renormalisation* (d'où l'acronyme RNG : Re – Normalization Group), cette variante se caractérise en pratique, dans l'équation en  $\varepsilon$ , par un coefficient  $C_{\varepsilon 2}$  dépendant de  $k/\varepsilon$ , donc variable. Ceci permet d'amortir la turbulence dans les régions à fort taux de déformation (turbulence surévaluée par le modèle standard).

La qualité des résultats est améliorée pour l'écoulement en aval d'une marche, les zones de décollement – recollement et les écoulements tourbillonnaires.

### 3.4.3.3. - MODÈLE « $k - \varepsilon$ RÉALISABLE »

Le concept de « *réalisabilité* » introduit par Lumley signifie que le modèle doit respecter des situations asymptotiques. Par exemple,  $k$  et  $\varepsilon$  ne doivent jamais être négatifs. Ces contraintes entraînent une adaptation de l'équation en  $\varepsilon$ , de la forme :

$$V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_1 \varepsilon \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} \quad (3.75)$$

où  $C_1$  est une fonction de  $k/\varepsilon$ .

Ce modèle paraît bien adapté aux jets circulaires, couches limites avec fort gradient de pression adverse, écoulements à forte courbure et écoulements tourbillonnaires.

### 3.4.3 4. - MODÈLE AUX TENSIONS DE REYNOLDS (RSM)

Dans le modèle aux tensions (ou contraintes) de Reynolds (*Reynolds Stress Model* = *RSM*), l'équation en  $k$  est remplacée par le système d'équations (3.47) en  $\overline{v_i v_j}$  (qui représente physiquement, au facteur  $\rho$  près, un bilan de quantité de mouvement turbulente). Comme il y a 6 composantes  $\overline{v_i v_j}$  distinctes (vu la symétrie du tenseur de Reynolds), donc 6 équations, le modèle  $k - \varepsilon$  à deux équations devient ici un modèle «  $\overline{v_i v_j} - \varepsilon$  » à 7 équations dynamiques.



(LÉONARD, par Turk et de Groot)

Rappelons les équations (3.47), avec les indices  $i$  et  $j$  :

$$\begin{aligned} \overline{\vec{V} \cdot \text{grad } v_i v_j} &= -\overline{v_i \vec{v} \cdot \text{grad } V_j} - \overline{v_j \vec{v} \cdot \text{grad } V_i} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left( \overline{v_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{v_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad - 2\overline{v \cdot \text{grad } v_i \cdot \text{grad } v_j} \\ &\quad + \overline{v \cdot \text{div}(\text{grad } v_i v_j)} - \overline{\text{div } v_i v_j \vec{v}} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Dans la version Launder – Reece – Rodi :

- a) - les deux premiers termes sont conservés sans modification
- b) - le dernier terme (corrélation triple) est modélisé d'une manière analogue à (3.53), mais en tenant compte du caractère tensoriel des  $\overline{v_i v_j}$  par l'introduction d'un tenseur gradient du champ des vitesses turbulentes, analogue à  $\overline{\text{grad } \vec{V}}$  (voir ch.1):

$$\overline{\text{div } v_i v_j \vec{v}} = -\text{div} \left\{ D_S \overline{\overline{\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}}} \right\} \quad (3.77a)$$

avec un coefficient de diffusion:

$$D_S = C_S \frac{k}{\varepsilon} \quad (3.77b)$$

soit sous forme cartésienne :

$$\overline{\text{div } v_i v_j \vec{v}} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_S \frac{k}{\varepsilon} \overline{v_k v_l} \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_l} \right) \quad (3.77c)$$

- c) - les termes en  $v$  sont négligés
- d) - il faut bien se tenir à la rampe pour admettre que le terme de corrélation pression – vitesse devient (toujours pour un fluide isochore):

$$-\frac{C_1 \varepsilon}{k} \overline{v_i v_j} + C_2 \left( \overline{v_i v_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \overline{v_j v_k} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \quad (3.77d)$$

En fin de compte, en regroupant, le nouveau système déduit de (3.76) est de la forme :

$$V_k \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_k} = -\frac{C_1 \varepsilon}{k} \overline{v_i v_j} + (C_2 - 1) \left( \overline{v_i v_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \overline{v_j v_k} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_S \frac{k}{\varepsilon} \overline{v_k v_l} \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_l} \right) \quad (3.78)$$

D'autre part, l'équation en  $\varepsilon$  est aussi un peu arrangée pour faire apparaître les corrélations  $\overline{v_i v_j}$  :

$$\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} \varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left( -\overline{v_i v_j} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{v_i v_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.79)$$

avec pour constantes :

$$C_1 = 1,8 ; C_2 = 0,6 ; C_S = 0,22 ; C_{\varepsilon 1} = 1,45 ; C_\varepsilon = 0,18 ; C_{\varepsilon 2} = 1,92$$



Ce modèle a été construit pour mieux décrire les cellules contra – rotatives, mais à cause du nombre d'équations à résoudre il est assez gourmand en temps de calcul.

### 3.4.4. – Modèle « k – oméga » (k - $\omega$ )

Concurrent du modèle  $k - \varepsilon$ , le modèle  $k - \omega$  fait appel aux mêmes idées directrices, mais remplace l'équation en  $\varepsilon$  par un bilan de vorticité turbulente.

Rappelons d'abord quelques notions présentées dans le chapitre 1 (§ 1.2.1 ♦ et 1.4.1). Dans un écoulement bidimensionnel, le vecteur tourbillon  $2\vec{\Omega} = \overline{\text{rot}}\vec{V}$  a pour composantes  $(0, 0, \Omega)$ , où  $\Omega$  (oméga majuscule) est appelée *vorticité* de l'écoulement. Cette vorticité, qui s'exprime en  $s^{-1}$ , est solution d'une équation de bilan dans laquelle la pression ne figure pas (équation 1.81).

Dans un écoulement bidimensionnel turbulent, on peut considérer la vorticité instantanée comme la somme d'une moyenne  $\overline{\Omega}$  et d'une *fluctuation de vorticité*  $\omega$  (oméga minuscule), ou *vorticité turbulente*. L'équation de bilan (3.11) pour une fluctuation  $c$  et l'équation de bilan de  $\overline{c^2}$  (Annexe 3.A.6) s'appliquent donc à  $\omega$ .

Plus généralement, si l'écoulement est tridimensionnel, le vecteur tourbillon possède trois composantes non nulles :  $2\overline{\Omega} = (\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2, \overline{\Omega}_3)$ , chacune d'elles subissant une fluctuation instantanée  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Introduisons alors une *fluctuation quadratique moyenne de vorticité* :

$$\overline{\omega^2} = \overline{\omega_i \omega_i} \quad (\text{s}^{-2})$$

En remplaçant  $c$  par  $\omega$  dans le bilan de  $\overline{c^2}$  (équation (5), annexe 3.A.6), il vient :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\omega^2} = & -2 \overline{\omega_i \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\Omega_i} - 2 D_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\omega_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\omega_i} \\ & + D_{\omega} \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\omega^2} - \text{div} \overline{\omega_i \omega_i \vec{v}} \end{aligned} \quad (3.80a)$$

(il n'y a pas de source volumique  $q'_I$  pour la vorticité).

Les différents termes subissent un traitement analogue à ceux de l'équation en  $\varepsilon$ .

Mais il faut en outre postuler une relation entre  $\varepsilon$ ,  $k$  et  $\overline{\omega^2}$ , directement ou sous la forme d'une hypothèse sur la longueur de mélange  $l$  (dans 3.57a). La forme retenue (Wilcox 1992) est :

$$l = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\overline{\omega^2}}} \quad (3.80b)$$

d'où, avec (3.57a) :

$$v_t = k / \sqrt{\overline{\omega^2}} \quad (3.80c)$$

et, en conservant (3.60) :

$$\varepsilon = C_{\mu} k \sqrt{\overline{\omega^2}} \quad (3.80d)$$

Dans sa forme la plus simple, l'équation en  $\omega$  s'écrit :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\omega^2} = C_{\omega 1} \sqrt{\overline{\omega^2}} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_{\omega}} \right) \frac{\partial (\overline{\omega^2})}{\partial x_i} \right\} - C_{\omega 2} (\overline{\omega^2})^{3/2} \quad (3.81a)$$

avec  $C_{\omega 1} = 1,11$  ;  $C_{\omega 2} = 0,15$  et  $\sigma_{\omega} = 2$ .

L'équation en  $k$  est la même que dans le modèle  $k - \varepsilon$ , mais on fait apparaître  $\omega$  dans le dernier terme, ce qui donne :

$$V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = v_t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - C_{\mu} k \sqrt{\overline{\omega^2}} \quad (3.81b)$$

Le modèle  $k - \omega$  repose peut-être sur des bases un peu plus physiques que le modèle  $k - \varepsilon$ , puisque le bilan de  $\overline{\omega^2}$  est obtenu de façon analogue au bilan de  $k$ , mais il est tout aussi artificiel dans le traitement des termes de ce bilan. Néanmoins, il semble donner de meilleurs résultats dans les écoulements autour d'obstacles de forme complexe.

### 3.4.5. – Les taux de turbulence

♣ Dans une description statistique de la turbulence, on peut considérer que l'un des paramètres essentiels est la variance  $\overline{c^2}$  d'une fluctuation  $c$ . C'est en effet la grandeur la plus simple permettant de caractériser l'amplitude des fluctuations de  $C(t)$ . Elle présente en outre l'avantage d'être relativement plus accessible à la mesure que les covariances  $\overline{c v_j}$  puisqu'on l'obtient aisément à partir d'un enregistrement local de la grandeur  $C(t)$ . De plus, nous avons vu que l'on peut établir des équations de bilans pour les différentes grandeurs  $\overline{c^2}$  (l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et la vorticité turbulente  $\omega$  en font partie).

Pour évaluer ces variances par rapport aux caractéristiques moyennes de l'écoulement, on introduit un « *taux de turbulence*  $I_c$  de la grandeur  $C(t)$  » en posant :

$$I_c = \frac{\sqrt{\overline{c^2}}}{|C|} \quad (3.82a)$$

◆ Les taux de turbulence usuels sont :

- le « *taux de turbulence thermique* »

$$I_\theta = \frac{\sqrt{\overline{\theta^2}}}{|T - T^\circ|} \quad (3.82b)$$

où  $T^\circ$  est une température de référence.

- les « *taux de turbulence dynamiques* » :

$$I_j = \frac{\sqrt{\overline{v_j^2}}}{|V_j|} \quad (3.82c)$$

En fait,  $I_j$  est couramment dénommée, de façon quelque peu impropre *intensité de turbulence dans la direction j*. Elle peut varier de quelques pour cent en soufflerie jusqu'à plus de 30% dans les écoulements atmosphériques.

♥ On parle de « *turbulence homogène* » lorsque les  $\overline{v_j^2}$  sont sensiblement uniformes dans chaque direction  $j$  (autrement dit  $\partial \overline{v_j^2} / \partial x_i = 0$  ou faiblement variable). Alors, l'énergie cinétique de turbulence  $k$  est également uniforme dans l'écoulement puisque  $k = \overline{v_j v_j} / 2$  (définition 3.35).



Un paramètre assez représentatif est « l'intensité globale de turbulence » :

$$I = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{v_j v_j}}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{2k}}{|\vec{V}|} \quad (3.82d)$$

♠ La « turbulence de grille » est une turbulence « commandée », donc contrôlable, obtenue au moyen d'une grille oscillante qui vibre perpendiculairement à son plan, selon la direction de l'écoulement. Elle est le plus souvent réalisée dans une soufflerie, pour disposer d'un écoulement amont uniforme. Ses caractéristiques sont déterminées par la maille et la trame de la grille, et par sa fréquence et son amplitude de vibration.

Dans ces conditions, l'écoulement moyen est unidimensionnel. Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  standard s'applique (sauf très près des parois) et donne des solutions analytiques dans les cas les plus simples.

Un cas limite est celui d'une grille immobile (turbulence passive). L'expérience montre alors que les termes de diffusion du modèle  $k$ - $\varepsilon$  peuvent être négligés. Il reste donc seulement dans (3.68), en appelant  $x$  la direction de l'écoulement :

$$\begin{aligned} U \frac{dk}{dx} &= -\varepsilon \\ U \frac{d\varepsilon}{dx} &= -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3.83a)$$

On vérifie que ce système possède une solution de la forme :

$$k = A x^{-\frac{1}{C_{\varepsilon 2} - 1}} ; \quad \varepsilon = U \frac{A}{C_{\varepsilon 2} - 1} x^{-\frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2} - 1}} \quad (3.83b)$$

où  $A$  dépend de la grille.

La production d'énergie cinétique turbulente est nulle, et il y a donc décroissance de  $k$  lorsqu'on s'éloigne de la grille, en raison de la dissipation.

On notera que la viscosité turbulente (négligée dans le calcul mais néanmoins non nulle) est d'après (3.60) :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \approx x^{\frac{C_{\varepsilon 2} - 2}{C_{\varepsilon 2} - 1}} \approx x^{-\frac{0,08}{0,92}}$$

L'exposant de  $x$  étant petit,  $\nu_t$  décroît très lentement, et peut être considérée comme sensiblement constante.

### 3.5. – DESCRIPTION NON LOCALE DE LA TURBULENCE

#### 3.5.1. – Limites de la théorie statistique locale

Au début de ce chapitre, en présentant les données expérimentales, nous avons évoqué la structure spatiale de la turbulence caractérisée par un enchevêtrement de tourbillons plus ou moins éphémères et de dimensions très variables.

Mais la théorie statistique locale ne fait pas apparaître explicitement cet aspect des choses. Plus précisément, le phénomène se trouve doublement édulcoré par la description utilisée.

♣ D'une part, la méthode ne permet pas de savoir si les fluctuations en deux points voisins sont corrélées : la structure spatiale de la turbulence se trouve ainsi masquée.

En effet, l'existence d'une corrélation entre les fluctuations de vitesse en deux points  $A$  et  $B$  signifie qu'une même « bouffée » de turbulence englobe les deux points. La dimension de ce tourbillon dans la direction  $AB$  est donc en moyenne supérieure à la distance  $AB$ . Sans la connaissance de telles corrélations, on ne peut accéder à ce qu'on appelle « l'échelle spatiale » de la turbulence.

◆ D'autre part, en rabotant ce qui est de nature instationnaire, le passage aux valeurs moyennes camoufle les relations qui peuvent exister entre les fluctuations en un point donné à différents instants.

Car si, en un point  $A$ , les fluctuations en deux instants voisins  $t$  et  $t + \tau$  sont corrélées, c'est que la durée de vie du tourbillon qui contient  $A$  est supérieure à  $\tau$ . La méthode ne permet donc pas non plus d'accéder directement à « l'échelle des temps » de la turbulence.

♥ Les considérations qui précèdent ont des implications pratiques non négligeables. Au point de vue expérimental, tout d'abord, sur les dimensions des sondes et sur leur position.

En schématisant un peu, il est clair que si les deux extrémités d'une sonde se trouvent en deux points non corrélés, la mesure effectuée n'aura aucune valeur locale ; de même, si le temps de réponse de la chaîne de mesure est supérieur à la durée de vie d'un tourbillon, on ne pourra évidemment pas mesurer la valeur instantanée d'une fluctuation.

En outre, lorsqu'on procède à une résolution numérique des équations de bilans, il est important de connaître les ordres de grandeur des dimensions et des durées de vie des tourbillons, pour ajuster au mieux le maillage  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ .

♠ Implications pratiques également pour la modélisation ; outre ses effets sur une meilleure analyse des mécanismes turbulents, la connaissance des « échelles de turbulence » et des covariances  $\overline{c v}$  peut guider le choix de lois phénoménologiques pour les diffusivités turbulentes  $a_t$ ,  $\nu_t$  ... ou pour certains termes des équations en  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$ , et donc contribuer à améliorer les résultats des modèles.

### 3.5.2. – Coefficients de corrélation entre grandeurs fluctuantes

#### 3.5.2.1 – CORRÉLATIONS ENTRE LES FLUCTUATIONS DE VITESSE

♣ *Coefficients d'intercorrélation*

Considérons deux points  $A$  et  $B$  dans un écoulement ; soient  $v_{iA}$  et  $v_{iB}$  les fluctuations de vitesse en  $A$  et  $B$  dans la direction  $i$ .

Pour caractériser *en moyenne* l'interaction entre  $v_i$  en  $A$  à l'instant  $t$  et  $v_i$  en  $B$  *au même instant*  $t$ , on introduit le « coefficient d'intercorrélation de  $v_{iA}$  et  $v_{iB}$  », noté  $R_i(AB)$ , qui est un nombre sans dimension défini par :

$$R_i(AB) = \frac{\overline{v_{iA} v_{iB}}}{\sqrt{\overline{v_{iA}^2} \overline{v_{iB}^2}}} \quad (3.84)$$

A chacune des trois directions de coordonnées correspond un coefficient  $R_i$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) qui dépend à la fois de la direction  $AB$  et de la distance  $r$  qui sépare  $A$  et  $B$ . Généralement, la direction  $AB$  est choisie pour coïncider avec une direction de coordonnée  $j$ . On symbolisera alors par  $r_j$  la direction et la distance  $AB$ , et l'on notera pour plus de clarté :

$$R_i(AB) = R_i(A, r_j) \quad (3.85a)$$

D'une façon générale, les coefficients d'intercorrélation sont des fonctions décroissantes de  $r_j$  au voisinage de  $A$ . En  $A$ , c'est-à-dire pour  $r_j = 0$ , on a dans tous les cas d'après la définition (3.84) :

$$R_i(A, 0) = 1 \quad (3.85b)$$

et ailleurs (Annexe 3.A.2) :

$$R_i(A, r_j \neq 0) < 1 \quad (3.85c)$$

Deux exemples de variations sont donnés sur les figures 3.3 et 3.4 pour des coefficients de la forme  $R_1(A, r_1)$  et  $R_1(A, r_2)$ .

Bien entendu, quand  $r_j \rightarrow \infty$ , on doit avoir  $R_i(A, r_j) \rightarrow 0$  puisque au-delà d'une certaine distance les particules fluides en  $A$  et  $B$  n'appartiennent plus à une même bouffée de turbulence ; il ne peut donc y avoir de corrélation entre leurs paramètres fluctuants.

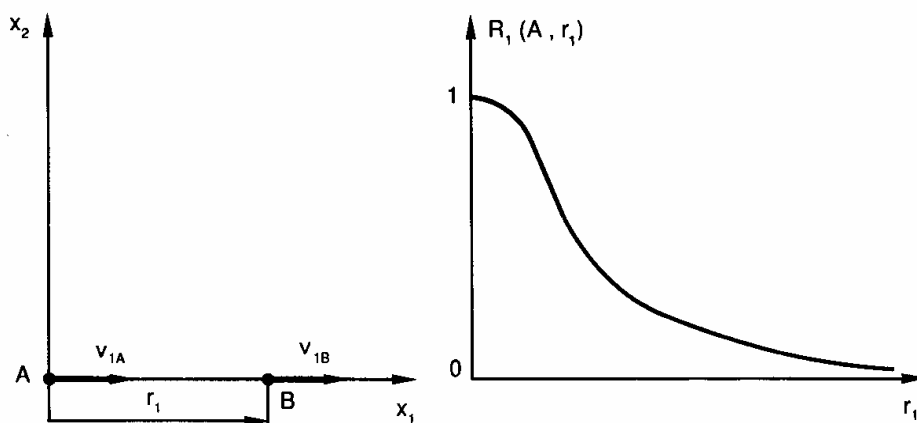


FIG. 3.3. – Coefficient d'intercorrélation de  $v_{1A}$  et  $v_{1B}$  dans la direction 1 : variation en fonction de  $r_1$

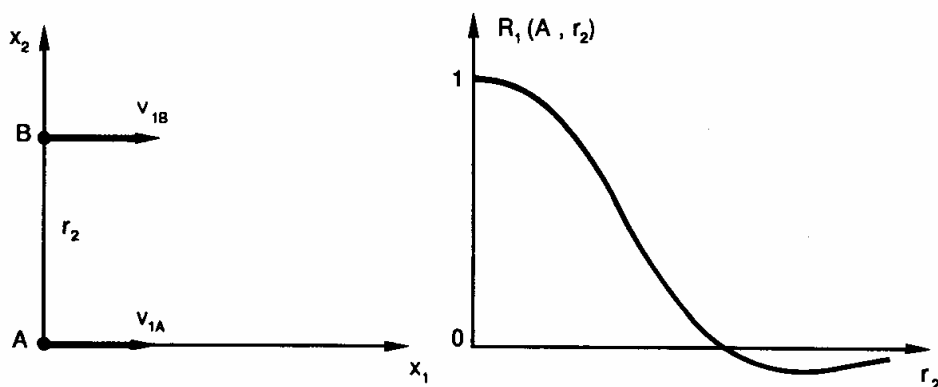


FIG. 3.4. – Coefficient d'intercorrélation de  $v_{1A}$  et  $v_{1B}$  dans la direction 2 : exemple de variation en fonction de  $r_2$

◆ *Coefficients d'autocorrélation*

Donnons-nous maintenant un point  $A$  et un intervalle de temps  $\tau$ .

Afin de caractériser en moyenne la relation entre la fluctuation  $v_{iA}$  en  $A$  à l'instant  $t$  et la même grandeur  $v_{iA}$  à l'instant  $t + \tau$ , on définit un « *coefficient d'autocorrélation de  $v_i$  en  $A$  sur la durée  $\tau$*  » :

$$R_i(A, \tau) = \frac{v_{iA}(t) \cdot v_{iA}(t + \tau)}{v_{iA}^2} \quad (3.86)$$

En chaque point  $A$ , les  $R_i(A, \tau)$  sont au nombre de trois ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ). Ce sont des nombres sans dimension, fonctions de la variable  $\tau$ .

De même que les  $R_i(A, R_j)$ , les coefficients d'autocorrélation  $R_i(A, \tau)$  sont des fonctions décroissantes de  $\tau$  (fig. 3.5). Pour  $\tau = 0$ , on a toujours  $R_i(A, 0) = 1$  d'après la définition (3.86). En outre,  $R_i(A, \tau) \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$  : il n'y a plus alors de corrélation entre  $v_{iA}(t)$  et  $v_{iA}(t + \tau)$ .

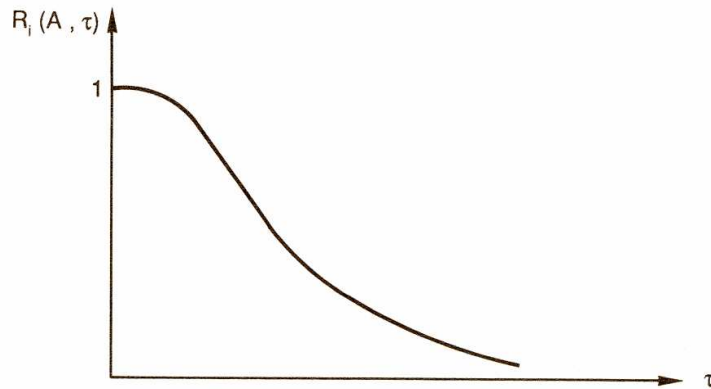


FIG. 3.5. – Coefficient d'autocorrélation de  $v_{iA}$  sur la durée  $\tau$  : variation en fonction de  $\tau$

♥ *Coefficient de corrélation spatio-temporel*

Enfin, il est parfois utile d'introduire un « *coefficient de corrélation spatio-temporel* » des fluctuations de  $v_i$  en  $A$  et  $B$  sur une durée  $\tau$ , pour relier la fluctuation  $v_{iA}$  en  $A$  à l'instant  $t$  et la fluctuation  $v_{iB}$  en  $B$  à l'instant  $t + \tau$ . On la note  $R_i(AB, \tau)$ , ou conformément à la convention (3.85a),  $R_i(A, r_j, \tau)$  :

$$R_i(A, r_j, \tau) = \frac{v_{iA}(t) v_{iB}(t + \tau)}{\sqrt{v_{iA}^2 v_{iB}^2}} \quad (3.87)$$

L'intérêt de ce paramètre est le suivant : Si l'on place deux sondes pour mesurer  $v_i$  aux points  $A$  et  $B$ , on observe que  $R_i(A, r_j, \tau)$  est maximum pour un intervalle de temps optimum  $\tau_m$  qui est le temps nécessaire à une perturbation de  $v_i$  pour se propager d'une sonde à l'autre (fig. 3.6). Ainsi, on peut évaluer expérimentalement la célérité d'une perturbation et son amortissement.

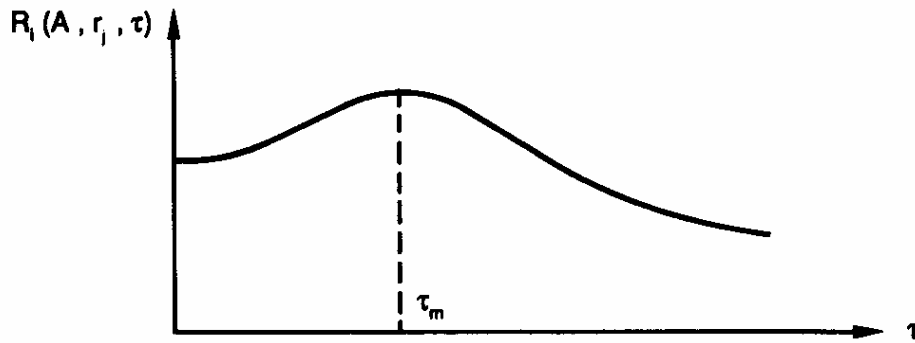


FIG. 3.6 – Coefficient de corrélation spatio-temporel de  $v_{iA}(t)$  et  $v_{iB}(t + \tau)$ .  
Exemple de variation en fonction de  $\tau$

### 3.5.2.2. – GÉNÉRALISATION À L'ENSEMBLE DES GRANDEURS FLUCTUANTES

Pour ne pas trop embrouiller l'exposé, nous avons présenté les définitions des différents coefficients de corrélation en ne retenant que les fluctuations de vitesse. Mais il va de soi que tout ce qui a été dit là s'étend aux autres grandeurs fluctuantes. Les diverses corrélations physiquement intéressantes s'expriment au moyen des quatre coefficients sans dimension ci-dessous :

♣ Coefficient d'intercorrélation de  $c$  en  $A$  et  $B$  :

$$R_c(AB) = R_c(A, r_j) = \frac{\overline{c_A c_B}}{\sqrt{\overline{c_A^2} \overline{c_B^2}}} \quad (3.88a)$$

◆ Coefficient d'intercorrélation de  $c_1$  et  $c_2$  en  $A$  :

$$R_{c_1 c_2}(A) = \frac{\overline{c_1 c_2}}{\sqrt{\overline{c_1^2} \overline{c_2^2}}} \quad (3.88b)$$

Le plus souvent,  $c_1$  ou  $c_2$  est une fluctuation de vitesse  $v_{iA}$ .

♥ Coefficient d'autocorrélation de  $c$  en  $A$  sur une durée  $\tau$  :

$$R_c(A, \tau) = \frac{\overline{c_A(t) c_A(t + \tau)}}{\overline{c_A^2}} \quad (3.88c)$$

♠ Coefficient de corrélation spatio-temporel de  $c$  en  $A$  et  $B$  sur une durée  $\tau$  :

$$R_c(A, r_j, \tau) = \frac{\overline{c_A(t) c_B(t + \tau)}}{\sqrt{\overline{c_A^2} \overline{c_B^2}}} \quad (3.88d)$$

En convection thermique (resp. massique), ces différentes grandeurs permettent de repérer les corrélations entre les fluctuations de température  $\theta$  (resp. les fluctuations de concentration), ou entre ces dernières et une fluctuation de vitesse  $v_i$ .

### 3.5.2.3. – DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS $R$

Les termes  $\overline{v_{i_A} v_{i_B}}$ ,  $\overline{v_{i_A}^2}$ ,  $\overline{v_{i_A} \theta_A}$ ,  $\overline{\theta_A^2}$ , etc., qui interviennent dans les différents coefficients  $R$ , sont déterminés par calcul statistique à partir des enregistrements expérimentaux des valeurs instantanées  $v_{i_A}(t)$ ,  $\theta(t)$ ...

Il en résulte une certaine imprécision dans les résultats, à laquelle il est assez difficile de remédier. En particulier, on obtient parfois (surtout pour les  $R_i(A, r_i)$ , c'est-à-dire dans le sens longitudinal, cf. définition (3.85a) et fig. 3.3) des coefficients de corrélation qui ne tendent pas vers zéro lorsque  $r_i$  (ou  $\tau$ ) devient grand, ce qui n'est guère justifiable physiquement. Nous en reparlerons à propos des macro-échelles de turbulence.

## 3.6. – ECHELLES DE TURBULENCE

### 3.6.1. – Approche physique

Pour présenter la notion d'échelle de turbulence il est commode de raisonner d'abord sur la structure spatiale du champ des vitesses, qui constitue l'aspect le plus important du problème, puis de généraliser ensuite à d'autres grandeurs fluctuantes.

Les structures turbulentes sont, comme nous l'avons déjà vu, de tailles très variables et constamment évolutives. C'est dans les grandes structures que s'échange l'essentiel de l'énergie cinétique (ou de la quantité de mouvement), tandis que dans les petites structures c'est la dissipation visqueuse qui est dominante.

Pour un écoulement donné, les dimensions des tourbillons sont comprises entre deux bornes : au-delà d'une certaine taille, la viscosité ne peut plus assurer la cohérence d'un tourbillon, celui-ci perd alors son individualité et devient instable ; en deçà d'une taille minimale, c'est l'énergie cinétique qui devient insuffisante pour assurer sa survie, face aux effets de la viscosité qui tendent à homogénéiser l'écoulement. Les ordres de grandeur des dimensions correspondantes sont appelés « *échelles dynamiques spatiales de turbulence* », ou plus simplement « *échelles dynamiques des longueurs* ».

Quant à l'évolution des structures turbulentes, elle peut être comparée à une sorte de cascade. Un grand tourbillon, que sa taille rend instable, franchit successivement divers échelons de la plus grande à la plus petite échelle, en se scindant à chaque étape en plusieurs tourbillons plus petits. Au cours de ces opérations de fractionnement, son énergie cinétique se trouve évidemment partagée entre les nouveaux tourbillons auxquels il a donné naissance.

Le rapport entre les plus grandes et les plus petites échelles dynamiques peut dépasser un facteur 100. Entre ces deux extrêmes, pour certaines dimensions optimales, il arrive que les tourbillons fassent preuve d'une relative stabilité et bénéficient ainsi d'une plus grande longévité.

On appelle « *turbulence développée* » ou « *établie* » une turbulence dans laquelle les échelles porteuses d'énergie et celles où se fait la dissipation sont nettement séparées.

Les mêmes considérations sont applicables aussi à la durée de vie des structures turbulentes. Elles conduisent à définir des « échelles dynamiques des temps ».

Dans l'ordre décroissant, les échelles de turbulence sont appelées *macro-échelles*, *petites échelles* et enfin *micro-échelles*.

### 3.6.2. – Macro-échelles

#### 3.6.2.1. – MACRO-ÉCHELLES DYNAMIQUES DES LONGUEURS

##### ♣ *Macro-échelles statistiques*

La connaissance des coefficients de corrélation doit en principe permettre d'estimer les échelles de turbulence. Mais malheureusement on ne dispose pas pour cela d'un critère indiscutable fourni par la théorie. Il faut donc avoir recours à des définitions conventionnelles.

##### • Échelles intégrales

La convention la plus usuelle consiste à calculer la grandeur

$$L_{i,j} = \int_0^{\infty} R_i(A, r_j) dr_j \quad (3.89)$$

appelée *échelle intégrale des longueurs* dans la direction  $j$  pour les fluctuations  $v_i$ . Son interprétation géométrique est évidente, l'aire sous-tendue par la courbe  $R_i(A, r_j)$  étant égale à l'aire du rectangle de hauteur 1 et de base  $L_{i,j}$  (fig. 3.7).

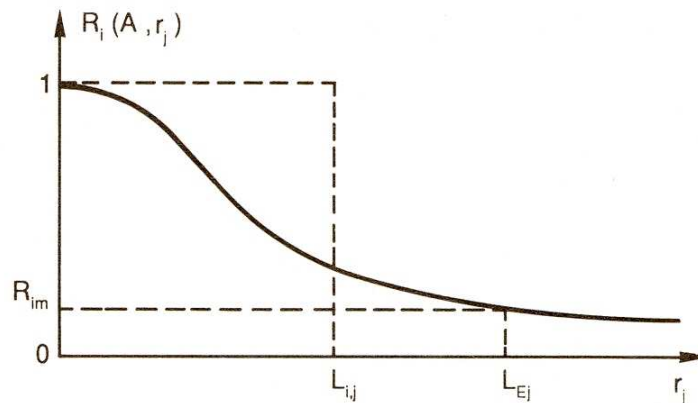


FIG. 3.7. – Échelle intégrale des longueurs  $L_{i,j}$  et échelle expérimentale  $L_{Ej}$

Si l'on s'en tient à l'ordre de grandeur, l'échelle intégrale  $L_j$  colle habituellement assez bien avec l'échelle moyenne des grands tourbillons. Cependant, son évaluation n'est pas toujours aisée, en particulier dans les cas déjà signalés (§ 3.5.2.3) où  $R_i$  ne tend pas vers zéro (ou tend trop lentement) car il faut alors décider jusqu'à quelle valeur de  $r_j$  on intègre dans l'expression (3.89).

- Échelles expérimentales

On pourrait aussi simplifier la procédure, et admettre que l'échelle des grands tourbillons est la distance  $L_{Ej}$  au-delà de laquelle le coefficient d'intercorrélation  $R_i(A, r_j)$  devient inférieur à une valeur  $R_{im}$  considérée comme un minimum significatif (fig. 3.7).

Le choix de ce minimum  $R_{im}$  est évidemment un peu arbitraire et requiert une certaine pratique. Mais il permet aussi d'évacuer l'incidence de diverses erreurs systématiques, en particulier lorsque  $R_i$  ne tend pas vers zéro pour les grandes valeurs de  $r_j$ .

Les *échelles expérimentales*  $L_{Ej}$  sont supérieures aux échelles intégrales  $L_{i,j}$  et correspondent plutôt aux plus grandes des structures turbulentes. Mais cette divergence n'est pas très gênante puisqu'on ne peut de toute façon atteindre que des *ordres de grandeur*.

A cet égard, quelle que soit la définition retenue, et sauf contre-indication manifeste, on adoptera de préférence pour macro-échelle pratique  $L$  (ou  $L_E$ ) en chaque point la plus grande des valeurs  $L_{i,j}$  (ou  $L_{Ej}$ ) ( $i$  ou  $j = 1, 2$  ou  $3$  selon la direction considérée).

◆ *Macro-échelles phénoménologiques*

Pour introduire des échelles caractéristiques de la turbulence, une procédure tout à fait différente consiste à examiner les mécanismes physiques par le biais de leur équation aux dimensions (ceci ne doit pas être confondu avec la similitude). Nous en avons déjà rencontré deux exemples qui concernent l'expression de la diffusivité turbulente dans le modèle pseudo-laminaire, sur lesquels nous allons revenir maintenant.

- **Premier point de vue** : on s'intéresse à la quantité de mouvement

Le transport de quantité de mouvement par les fluctuations de vitesse a été assimilé à un mécanisme de diffusion, caractérisé par une diffusivité turbulente  $\nu_t$ , et l'hypothèse de Prandtl (3.32) stipule que  $\nu_t$  est proportionnelle au gradient de vitesse transversal, soit :

$$\nu_t = X \left| \partial U / \partial y \right| \quad (3.90a)$$

Au point de vue dimensionnel,  $X$  est obligatoirement le carré d'une longueur, d'où :

$$\nu_t = l^2 \left| \partial U / \partial y \right| \quad (3.90b)$$

formule dans laquelle  $l$  a été appelée *longueur de mélange*.

Sachant que la diffusion turbulente de quantité de mouvement est essentiellement assurée par les grandes structures, il est alors licite d'interpréter  $l$  comme une *macro-échelle de diffusion turbulente de la quantité de mouvement*.

On doit remarquer que cette approche convient mieux à proximité des parois (où le gradient de vitesse est élevé) que dans l'écoulement général, où le gradient de vitesse moyenne tend vers zéro.

- **Second point de vue** : on s'intéresse à l'énergie cinétique

Le raisonnement est à peu près le même, mais on privilégie cette fois un rapprochement entre la viscosité turbulente et l'énergie cinétique de turbulence : c'est l'hypothèse de Prandtl-Kolmogorov (3.36a) que nous écrivons simplement ici :

$$\nu_t = L k^{1/2} \quad (3.90c)$$



L'équation aux dimensions correspondante montre que  $L$  est homogène à une longueur, qui présente alors le sens d'une *macro-échelle de diffusion de l'énergie cinétique de turbulence*.

Cette deuxième approche a une validité plus large que la précédente, car elle est mieux adaptée à la description des écoulements loin des parois, où l'énergie cinétique de turbulence atteint sa valeur maximale.

- Selon le point considéré dans l'écoulement, les ordres de grandeur de  $l$  ou  $L$  peuvent aller de l'échelle sub-millimétrique (près d'une paroi) à l'échelle décamétrique (voire hectométrique) dans les écoulements atmosphériques.

### 3.6.2.2. – MACRO-ÉCHELLES DYNAMIQUES DES TEMPS

♣ Les raisonnements qui conduisent à la définition de macro-échelles dynamiques des temps sont analogues aux précédents, en remplaçant le coefficient d'intercorrélation  $R_i(A, r_j)$  par le coefficient d'autocorrélation  $R_i(A, \tau)$ .

On atteint de cette façon, en ordre de grandeur, la durée moyenne de vie des grands tourbillons.

Les définitions (3.6.2.1 ♣) transposées aux corrélations temporelles vont donc nous donner :

- Une *échelle intégrale des temps* pour la fluctuation  $v_i$  en  $A$  :

$$\tau_{Ii} = \int_0^{\infty} R_i(A, \tau) d\tau \quad (3.91a)$$

dont la signification géométrique est identique à celle de  $L_{ij}$  (fig. 3.7).

- Une *échelle expérimentale des temps*  $\tau_{Ei}$  telle que pour  $\tau > \tau_{Ei}$ , on ait  $R_i(A, \tau)$  inférieur à un minimum significatif donné  $R_{i \min}$ .

Les problèmes soulevés par ces deux définitions sont absolument les mêmes que pour les échelles des longueurs. Là encore, la plus grande des échelles  $\tau_{Ii}$  ou  $\tau_{Ei}$  sur les trois directions d'espace ( $i = 1, 2, 3$ ) pourra être adoptée comme macro-échelle pratique des temps pour les fluctuations de vitesse en  $A$ .

♦ La notion de macro-échelle phénoménologique s'étend aussi au temps. Remarquons en effet que dans (3.90b) le quotient :

$$\frac{l^2}{v_t} = \frac{1}{|\partial U / \partial y|} = \tau_l \quad (3.91b)$$

est homogène à un temps, qui s'interprète donc dans la logique « phénoménologique » comme une *échelle des temps de la diffusion turbulente*.

La même remarque s'applique en partant de (3.90c) où :

$$\frac{L^2}{v_t} = \frac{L}{k^{1/2}} = \tau_L \quad (3.91c)$$

Certains auteurs identifient macro-échelles des temps et durées moyennes de vie des grosses structures. Disons plus prudemment que leurs ordres de grandeur sont comparables.

### 3.6.2.3. – MACRO-ÉCHELLES THERMIQUES

A côté des structures turbulentes dynamiques associées au mouvement du fluide, on peut également mettre en évidence d'autres structures, liées à la fluctuation d'une grandeur  $C$ . En thermoconvection, particulièrement, des structures thermiques prennent naissance : elles sont associées aux fluctuations  $\theta$  du champ de température, et ne coïncident pas de façon systématique avec les structures dynamiques.

Les dimensions extrêmes des structures thermiques et leurs durées de vie (ou du moins leurs ordres de grandeur) seront les *échelles thermiques de l'écoulement*. Peuvent être ainsi définies : macro-échelles thermiques des longueurs et macro-échelles thermiques des temps.

♣ Par exemple, la « *macro-échelle statistique thermique des longueurs en A dans la direction j* » est par définition :

$$L_{\theta j} = \int_0^{\infty} R_{\theta}(A, r_j) dr_j \quad (3.92a)$$

$$\text{avec } R_{\theta}(A, r_j) = \frac{\overline{\theta_A \theta_B}}{\sqrt{\overline{\theta_A^2} \overline{\theta_B^2}}} \quad (3.92b)$$

◆ Tout naturellement, si l'on fait référence aux hypothèses (3.42, 3.43) concernant la diffusion turbulente de chaleur, on aboutira à une « *macro-échelle phénoménologique de diffusion thermique turbulente* »  $l_{\theta}$  préalablement appelée « longueur de mélange thermique ».

Etant donné que  $v_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$  et  $a_t = l_{\theta} l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ , on voit que :

$$\frac{v_t}{a_t} = \frac{l}{l_{\theta}} = Pr_t \quad (3.92c)$$

où  $Pr_t$  est le nombre de Prandtl turbulent (3.45).

♥ Quant à la *macro-échelle thermique statistique des temps*, elle aura pour expression :

$$\tau_{\theta j} = \int_0^{\infty} R_{\theta}(A, \tau) d\tau$$

avec d'après (3.88c) :

$$R_{\theta}(A, \tau) = \frac{\overline{\theta_A(t) \theta_A(t + \tau)}}{\overline{\theta_A^2}} \quad (3.92d)$$

### 3.6.2.4. – UTILITÉ DES MACRO-ÉCHELLES

Les applications des macro-échelles de turbulence intéressent principalement le modèle pseudo-laminaire et la résolution numérique des équations.

Comme il a déjà été dit plus haut, une propriété importante des écoulements turbulents réside dans le fait que la diffusion turbulente est essentiellement le fait des grandes structures. Par exemple, ce sont les grands tourbillons qui transportent l'essentiel de l'énergie cinétique de turbulence, et qui assurent donc sa diffusion.

En conséquence, l'estimation d'une diffusivité turbulente, qui est l'essence du modèle pseudo-laminaire, devra être effectuée sur la base d'une échelle de longueur qui soit caractéristique des grandes structures.

Pour ce qui concerne la résolution numérique des équations intégrales de bilans, les grandes échelles de turbulence constituent un guide précieux pour l'estimation du domaine d'étude  $\mathcal{D}$ , et de la durée totale sur laquelle on opère. Ainsi, le choix d'un domaine  $\mathcal{D}$  de dimensions inférieures à  $l$  (ou  $L$ ) conduirait à des résultats non significatifs puisque le calcul serait limité à l'intérieur d'un grand tourbillon. Il en irait de même pour une simulation numérique dont la durée serait inférieure à l'échelle de temps des grands tourbillons.

### 3.6.3 – Micro-échelles

#### 3.6.3.1. – CARACTÈRES DES PETITES STRUCTURES

Si les grandes structures réalisent l'essentiel du *transport turbulent* des diverses grandeurs physiques, les petites structures assurent quant à elles l'essentiel de la *dissipation*.

Prenons, par exemple, le cas des plus petits tourbillons. A l'intérieur de ceux-ci, le mouvement est de type visqueux, c'est-à-dire gouverné par la viscosité moléculaire. En conséquence, le concept de viscosité turbulente n'a plus sa place à cette échelle et il faut revenir localement aux équations du mouvement laminaire. Et lorsqu'un petit tourbillon disparaît, c'est que toute son énergie cinétique propre (qui est, en quelque sorte, le support de son individualité) a été dissipée par viscosité.

De même, dans les petites structures thermiques, la diffusion turbulente disparaît et il ne subsiste plus que la diffusion thermique moléculaire, caractérisée par la diffusivité thermique du fluide.

#### 3.6.3.2. – MICRO-ÉCHELLES STATISTIQUES

La description non-locale de la turbulence se prête mal à l'évaluation des micro-échelles. Il faut en effet pour cela s'appuyer sur les valeurs des coefficients de corrélation au voisinage de l'origine, c'est-à-dire là où ils varient faiblement (fig. 3.3 à 3.5), ce qui entraîne évidemment des problèmes de précision des mesures, et aussi de traitement des données : sur quoi se baser exactement pour proposer une définition ?

L'idée la plus généralement retenue consiste à chercher l'intersection avec l'axe des abscisses de la parabole osculatrice à la courbe  $R_i(A, r_j)$  ou  $R_i(A, \tau)$  (c'est-à-dire la parabole de même ordonnée et de même courbure que la fonction  $R$  à l'origine). L'abscisse du point d'intersection est la « *micro-échelle de Taylor* ».

Au point de vue mathématique, il n'y a rien à dire ; mais physiquement on ne voit pas très bien à quoi raccorder les valeurs obtenues. Nous laisserons donc cette définition de côté.

#### 3.6.3.3. – MICRO-ÉCHELLES PHÉNOMÉNOLOGIQUES

L'approche phénoménologique consiste à reprendre le raisonnement du § 3.6.2.1. ♦, en l'adaptant : si dans les petites structures, l'énergie cinétique  $k$  est dissipée par la viscosité moléculaire, on admet, par analogie avec (3.90c) :

$$\nu = l_k k^{1/2} \quad (3.93a)$$

La longueur  $l_k$  définie par cette relation est une *micro-échelle de dissipation de l'énergie cinétique turbulente*, appelée « *échelle de Kolmogorov* ».

On ne peut pas dire que l'échelle de Kolmogorov est **la** dimension moyenne des plus petits tourbillons, mais elle en donne assez fidèlement l'ordre de grandeur, qui est le plus souvent de  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$  mm.

Au point de vue thermique maintenant, les plus petites structures sont celles dont l'énergie interne est entièrement dissipée par diffusion thermique moléculaire. L'analogie avec les structures dynamiques permet de déterminer leurs échelles moyennes (notées  $l_T$ ) par la relation :

$$a = l_T k^{1/2} \quad (3.93b)$$

Le rapport entre les micro-échelles dynamiques et thermiques traduit le couplage entre diffusion thermique et diffusion de quantité de mouvement, exprimé par le nombre de Prandtl :

$$l_k / l_T = \nu / a = \text{Pr} \quad (3.93c)$$

#### 3.6.3.4. – MICRO-ÉCHELLES ET SIMILITUDE

♣ Une autre voie pour aborder les échelles de turbulence consiste à raisonner en termes de similitude (voir Ch. 2). Revenons pour cela à la définition du terme de dissipation  $\varepsilon$  (3.52) :

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \quad (3.52)$$

Nous avons vu que, dans le cadre du modèle pseudo-laminaire, on a également (relation 3.57c) :

$$\varepsilon = C_\mu k^{3/2} / l \quad (3.57c)$$

avec  $C_\mu$  sans dimension,  $l$  = longueur caractéristique et  $k$  = énergie cinétique de turbulence =  $v_j v_j / 2$ .

Pour appliquer la similitude à une équation de bilan telle que (3.50) (bilan de  $k$ ), on doit faire un choix de valeurs de référence  $l^\circ$ ,  $\varepsilon^\circ$ ,  $\nu^\circ$ ,  $k^\circ$  .... En ce qui concerne  $\varepsilon^\circ$ , on se trouve face à une alternative :

- soit, d'après (3.52) :

$$\varepsilon^\circ = \nu \frac{\nu^\circ}{l^\circ} \frac{\nu^\circ}{l^\circ} \quad (3.94a)$$

où  $\nu^\circ$  est une vitesse de référence pour les fluctuations ;

- soit, d'après (3.57c) :

$$\varepsilon^\circ = (k^\circ)^{3/2} / l^\circ \quad (3.94b)$$

Plaçons-nous dans le cas de la *turbulence homogène*, où  $k$  varie peu dans l'écoulement : on prendra donc naturellement  $k^\circ = k$ . En outre, vu la définition de  $k$ , il semble acceptable de choisir comme vitesse de référence pour les fluctuations :

$$v^\circ = (k^\circ)^{1/2} = k^{1/2} \quad (3.95a)$$

$v^\circ$  étant souvent désignée comme une *échelle de vitesse de la turbulence*.

La nécessaire cohérence des deux expressions de  $\varepsilon^\circ$  entraîne :

$$v \left( \frac{v^\circ}{l^\circ} \right)^2 = v \left( \frac{k^{1/2}}{l^\circ} \right)^2 = \frac{k^{3/2}}{l^\circ}$$

d'où la longueur  $l^\circ$  compatible avec les autres grandeurs de référence :

$$\boxed{l^\circ = \frac{v}{k^{1/2}} = \frac{v}{v^\circ} \equiv l_k} \quad (3.95b)$$

Par une autre voie, on retrouve donc ici l'*échelle de Kolmogorov*  $l_k$  (3.93a).

Ajoutons ici une propriété qui retient souvent l'attention des auteurs. En éliminant  $k$  entre les relations (3.94b) et (3.95b), on obtient :

$$l_k = \left( \frac{v^3}{\varepsilon^\circ} \right)^{1/4} \quad (3.95c)$$

◆ Enfin, lorsqu'on écrit (3.50) sous forme adimensionnelle, en respectant la procédure établie au chapitre 2, on voit apparaître devant le terme  $v(\overrightarrow{\text{div grad}} k)$  un critère de similitude  $\Gamma_k = V^\circ l^\circ / v$ , où  $V^\circ$  est la vitesse de référence pour l'écoulement moyen.

Si l'on admet l'intensité globale de turbulence  $I$  (3.82d) à peu près constante dans l'écoulement,  $k^{1/2}$  et  $V$  sont dans un rapport lui-même constant. On peut donc considérer que  $v^\circ$  est représentative de l'écoulement d'ensemble, et il n'est pas illicite alors de choisir :

$$V^\circ = v^\circ = k^{1/2} \quad (3.95d)$$

d'où :

$$\boxed{\Gamma_k = V^\circ l^\circ / v = 1} \quad (3.95e)$$

!!! Cette propriété, considérée parfois comme un postulat et parfois comme un hasard, signifie simplement que, avec les grandeurs de référence choisies, la similitude vis-à-vis de la diffusion visqueuse d'énergie cinétique turbulente est automatiquement assurée à l'échelle 1 lorsqu'on est en turbulence homogène.

D'autre part, l'absence de structures turbulentes de dimensions inférieures à  $l_k$  en moyenne a pour conséquence, au voisinage d'une paroi, l'existence d'une *sous-couche visqueuse* dont l'épaisseur est en ordre de grandeur au moins égale à  $l_k$ . Nous retrouverons cette couche visqueuse au chapitre 5.

♥ Quant à la *micro-échelle des temps* associée à  $l_k$ , c'est bien entendu :

$$t_k = \frac{l_k}{v^\circ} = \frac{\nu}{k} \quad (3.96a)$$

qui représente (en ordre de grandeur) la longévité moyenne des plus petites structures dynamiques turbulentes. Celle des plus petites structures thermiques sera caractérisée à partir de (3.93b) par :

$$t_T = \frac{l_T}{v^\circ} = \frac{a}{k} \quad (3.96b)$$

### 3.6.3.5. – IMPORTANCE DES MICRO-ÉCHELLES

Les micro-échelles de turbulence présentent un intérêt essentiellement pratique. D'une part, elles donnent des indications précieuses pour le dimensionnement des sondes de mesure dans un dispositif expérimental. En effet, on conçoit que si une sonde possède des dimensions plusieurs fois supérieures à celles des petites structures, les mesures qu'elle fournira ne pourront prétendre à une valeur vraiment locale. D'un autre côté, les micro-échelles de longueur et de temps permettent aussi d'estimer les dimensions minimales du maillage à utiliser dans une résolution numérique.

### 3.6.4. – A propos du nombre de Reynolds turbulent

Nous avons rencontré sur notre route un nombre sans dimension dénommé « nombre de Reynolds turbulent » (§ 3.4.3.1.) défini par les relations (3.73) et (3.74c) :

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} = \frac{l}{C_\mu f_\mu} \frac{v_t}{\nu}$$

Avec l'aide de l'hypothèse (3.90c) et de la définition (3.95c),  $R_t$  s'écrit encore :

$$R_t = \frac{1}{C_\mu f_\mu} \frac{L k^{1/2}}{\nu} = \frac{1}{C_\mu f_\mu} \frac{v^\circ L}{\nu} \quad (3.97)$$

En faisant abstraction de la fonction d'amortissement  $f_\mu$ , on constate que  $R_t$  est construit comme un critère de similitude relatif à la diffusion turbulente de quantité de mouvement, c'est-à-dire comme un « nombre de Reynolds ». Mais vu que la fonction d'amortissement est elle-même dépendante de  $R_t$ , et qu'elle constitue un élément clé des modèles dits « à bas Reynolds », la terminologie en usage introduit un élément de confusion et s'avère inadaptée. Il aurait mieux valu donner un autre nom à ce paramètre.

### 3.6.5. – Simulation des grandes structures (SGS)

(en langage international : *LES = Large Eddy Simulation*)

La simulation des grandes structures turbulentes est une approche intermédiaire hybride qui consiste à découpler, par des techniques numériques, le calcul de l'écoulement aux macro-échelles et aux micro-échelles.

La justification de ce type d'approche réside dans l'idée suivante, déjà évoquée : les grands tourbillons produits par l'écoulement moyen sont difficiles à modéliser ; ils transportent cependant la majeure partie de l'énergie cinétique turbulente. Il faut donc de préférence les traiter directement, sans hypothèses simplificatrices. Par contre, les petits

tourbillons sont relativement plus faciles à prendre en compte, car ils sont dominés par la viscosité moléculaire.

Cette technique semble bien adaptée aux écoulements dans lesquels les macro-échelles et les micro-échelles sont assez dissemblables, comme par exemple dans le bâtiment et son proche environnement.

### 3.6.6. – Simulation numérique directe (SND)

(en langage international : *DNS = Direct Numerical Simulation*)

Comme son nom l'indique, la simulation numérique directe consiste à résoudre directement les équations de bilans en espace et en temps. C'est évidemment l'idéal auquel rêve tout mécanicien des fluides. Sauf que ce genre de calcul se révèle si complexe et si exigeant en capacité et en temps d'ordinateur qu'il reste encore réservé à des petits domaines n'excédant guère  $10^2 \text{ cm}^3$ . Il semble malgré tout que l'avenir soit là, à condition en particulier d'élaborer des techniques numériques de filtrage qui permettent d'accéder correctement et au moindre coût, soit au mouvement moyen, soit à des détails locaux.

## 3.7 – PRODUCTION D'ENTROPIE TURBULENTE

Les équations de bilans, qui ont été adaptées dans ce chapitre au traitement statistique des grandeurs turbulentes, avaient évidemment pour but la détermination des champs moyens de vitesses et de température. Mais la turbulence se traduit aussi par une production spécifique d'entropie, qu'il est intéressant d'examiner maintenant.

Revenons donc au bilan d'entropie (1.74) dans lequel n'ont été conservés que les termes dominants en convection thermique :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s \vec{V}) = \frac{\Phi}{T} + \frac{\lambda}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 + \text{div} \left( \frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \quad (3.98a)$$

soit, pour un fluide isochore :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} s = \frac{\Phi}{T} + \frac{\lambda}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 + \text{div} \left( \frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \quad (3.98b)$$

Pour la suite, il sera plus commode d'écrire cette équation sous forme cartésienne, en développant la fonction de dissipation  $\Phi$  :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho V_i \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (3.98c)$$

Comme pour toute autre grandeur turbulente, on considère que la valeur instantanée de l'entropie est la somme d'une valeur moyenne  $\bar{s}$  et d'une fluctuation  $s'$  :

$$s(t) = \bar{s} + s' \quad (3.99)$$

En introduisant maintenant les grandeurs fluctuantes (rappelons que  $\theta$  est la fluctuation de température), et en passant à la moyenne, il vient :

$$\begin{aligned} \rho(V_i + v_i) \frac{\partial(\bar{s} + s')}{\partial x_i} &= \overline{\frac{\mu}{T + \theta} \left( \frac{\partial(V_i + v_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(V_j + v_j)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(V_i + v_i)}{\partial x_j}} \\ &+ \overline{\frac{\lambda}{(T + \theta)^2} \frac{\partial(T + \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial(T + \theta)}{\partial x_i}} \\ &+ \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\lambda}{T + \theta} \frac{\partial(T + \theta)}{\partial x_i} \right)} \end{aligned}$$

Le résultat va donc faire surgir des termes contenant seulement les grandeurs moyennes de l'écoulement, et de nombreuses corrélations. Le calcul est basé sur les règles rappelées dans l'annexe 3.A.2, et ne présente aucune difficulté particulière (les termes en  $1/(T + \theta)$  et en  $1/(T + \theta)^2$  font l'objet d'un développement limité à l'ordre 1). Nous en donnons simplement le résultat, après avoir laissé de côté les corrélations qui paraissent négligeables en ingénierie classique (pour plus de détails, on se reportera par exemple à J. HERPE, thèse, 2007) :

$$\begin{aligned} V_i \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_i} &= \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} && (a), (b) \\ &+ \frac{\lambda}{T^2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\} && (c), (d) \quad (3.100) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial(\overline{v_i s'})}{\partial x_i} && (e), (f) \end{aligned}$$

Les termes (e) et (f) sont des divergences, et caractérisent donc la diffusion d'entropie turbulente (le dernier provient du membre de gauche, comme dans 3.9). La création d'entropie turbulente est représentée par (b) et (d). On retrouve enfin dans (a) et (c) la production d'entropie de l'écoulement moyen.

Comme on a souvent le choix, en ingénierie, entre plusieurs géométries, et qu'on dispose d'une certaine marge dans les conditions aux limites, l'évaluation des termes de l'équation (3.100) ouvre la voie à l'optimisation entropique d'un écoulement turbulent.



## ANNEXES AU CHAPITRE 3

### 3.A.1. – TURBULENCE ET NON-LINÉARITÉ

#### 3.A.1.1. – ORIGINE DES SOLUTIONS TURBULENTES

Quand on examine la structure d'un écoulement turbulent (§ 3.1) et que l'on regarde les équations de bilans qui sont censées le décrire (1.27, 1.37, 1.56), on est en droit de se demander si des évolutions d'apparence aussi insaisissable peuvent être solutions d'équations aux dérivées partielles dont la forme semble très classique. En particulier, ce qui paraît à première vue le plus surprenant, c'est que des phénomènes instationnaires puissent prendre naissance dans un système dont les conditions aux limites sont maintenues stationnaires.

La réponse à ces interrogations réside dans une propriété structurelle majeure de certaines équations de bilans : leur non-linéarité. Les méthodes analytiques sont actuellement insuffisantes pour obtenir les solutions complètes de ces équations, mais la résolution numérique de diverses équations différentielles non linéaires a montré dans certains cas un comportement chaotique des solutions, de même nature que ce que l'on rencontre en turbulence. Avec des problèmes simplifiés, on a pu également accéder à partir des équations de quantité de mouvement à des solutions numériques caractéristiques de la turbulence.

Voyons d'abord où se situe la non-linéarité dans les équations générales.

#### 3.A.1.2. – QU'EST-CE QU'UNE ÉQUATION LINÉAIRE ?

Il n'est peut-être pas superflu de rappeler en quoi consiste la linéarité (ou la non-linéarité) dans les systèmes différentiels que nous avons à manipuler.

Soient  $X$  et  $Y$  deux fonctions de  $x, y, z, t$ . Considérons l'équation fonctionnelle

$$F(X, Y) = G(x, y, z, t) \quad (1)$$

Cette équation sera linéaire en  $X$  et  $Y$  si, en posant :  $X = \alpha X_1 + \beta X_2$  (où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes arbitraires) le premier membre devient :

$$F(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha F(X_1, Y) + \beta F(X_2, Y) \quad (2)$$

et de même avec  $Y$ .

Dans le cas où  $G = 0$ , on dit que l'équation est linéaire homogène en  $X$  et  $Y$ . Enfin, si la propriété (2) n'est pas vérifiée, l'équation est non-linéaire.

#### 3.A.1.3 – LES ÉQUATIONS DE BILANS SONT-ELLES LINÉAIRES ?

Examinons maintenant les trois principales équations de bilan local, en regardant si elles satisfont ou non à la propriété de linéarité. Pour alléger le raisonnement, nous nous limiterons au cas d'un écoulement de fluide isochore et sans forces extérieures.

♣ En ce qui concerne l'équation de continuité,

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

il est clair qu'elle répond à la condition de linéarité. Il n'y a donc pas de problème de ce côté.

◆ Avec les hypothèses adoptées, et en la présentant sous la forme (1), l'équation de quantité de mouvement (1.37b) s'écrit :

$$F(\vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} \vec{V}} - \mu \Delta \vec{V} = - \overrightarrow{\operatorname{grad} p^*} \quad (3)$$

Posons :  $\vec{V} = \alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2$  ( $\alpha, \beta$  constantes). On voit immédiatement que l'on a :

$$F(\vec{V}) \neq \alpha F(\vec{V}_1) + \beta F(\vec{V}_2)$$

et que la propriété (2) n'est pas vérifiée. L'équation de quantité de mouvement est donc non-linéaire.

Ceci est dû à l'expression  $\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} \vec{V}}$  qui est un produit de termes contenant  $\vec{V}$ . On dit alors que la non-linéarité est quadratique.

♥ Le problème est un peu plus compliqué avec l'équation d'énergie. Sous sa forme (1.56), elle devient ici :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} T} = \Phi + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) \quad (4)$$

Tout d'abord, si la fonction de dissipation  $\Phi$  peut être négligée devant les autres termes, et si les paramètres  $\lambda$ ,  $C_p$  et  $\mu$  sont indépendants de la température, on voit que (4) est linéaire en  $T$ . En effet, la vitesse est indépendante du champ de température quand  $\mu$  est constant, et elle est déterminée par l'équation de quantité de mouvement, de telle sorte que (4) est de la forme :

$$F(T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} T} - \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) = 0$$

et satisfait visiblement à la condition (2).

Mais si  $\vec{V}$  est fonction de  $T$  (ce qui arrive lorsque  $\mu$  dépend fortement de la température, mais également en convection naturelle ou mixte), alors la linéarité de l'équation d'énergie est détruite.

Enfin, la prise en compte de la fonction de dissipation  $\Phi$  dans (4) entraîne automatiquement la non-linéarité de cette équation puisque  $\Phi$ , qui a pour expression :

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

contient des termes quadratiques.

♠ En conclusion, même dans la situation la plus simple où nous nous sommes placés, l'une des équations (quantité de mouvement) est d'une structure fondamentalement non-linéaire. De plus, la non-linéarité s'étend souvent à l'équation d'énergie, et de toute façon les trois équations se trouvent non-linéaires si le fluide n'est pas isochore.

### 3.A.1.4. – LES CONSÉQUENCES DE LA NON-LINÉARITÉ

Historiquement, la première interprétation des conséquences de la non-linéarité qui a eu cours est celle-ci : dans tout écoulement de fluide, il se produit accidentellement des instabilités de caractère aléatoire. Si elles tendent à se résorber rapidement, on ne les soupçonne pas et elles n'ont aucune influence : l'écoulement est laminaire (§ 3.3.1). Sinon, elles se développent, et c'est ce qui donne à l'écoulement son caractère turbulent. Or on s'aperçoit que lorsque le nombre de Reynolds  $Re$  est supérieur à la valeur critique  $Re_c$ , le terme non-linéaire de l'équation (3) a pour effet d'amplifier systématiquement ces instabilités.

Cependant, on admet maintenant qu'il n'est pas nécessaire de recourir à cette notion d'instabilité comme cause, ou comme explication, du mouvement turbulent. En effet, l'exploration numérique des systèmes dynamiques montre qu'un comportement d'allure chaotique peut naître spontanément au sein d'un système physique décrit par des équations non-linéaires.

D'ailleurs, une analyse plus fine montre que ce chaos n'est pas total, et qu'il existe une structure cohérente dans un écoulement turbulent. La transition laminaire-turbulent n'est pas une frontière entre mouvement ordonné et mouvement désordonné, mais constitue le passage d'une structure très ordonnée à une structure moins ordonnée. Ce passage est conditionné par l'importance des termes non-linéaires vis-à-vis des termes visqueux, c'est-à-dire par la valeur de  $Re$ .

Il faut aussi souligner que la réalisation de structures turbulentes n'est pas le monopole des systèmes gouvernés par des équations non-linéaires. En effet, des équations linéaires peuvent fort bien admettre des solutions turbulentes, pourvu que les conditions aux limites soient elles-mêmes de type turbulent, c'est-à-dire représentées par des fonctions pseudo-aléatoires (J. Bass, 1984).

*Enfin, on n'omettra pas le fait que, dans le traitement statistique de la turbulence, ce sont les termes non-linéaires qui sont à l'origine des grandeurs  $\overline{cv_i}$ ,  $\overline{v_i v_j}$  ... La raison en est que, dans l'opération de passage à la moyenne, ils sont l'objet d'une perte d'information (mais pas les autres termes : on ne perd pas d'information en moyennant une fonction linéaire !!), ce qui se traduit concrètement par l'apparition de nouvelles inconnues qui sont les corrélations.*

Toujours est-il que le problème de la turbulence est l'un des plus complexes de la physique ; malgré les espoirs que l'on peut mettre dans la simulation numérique directe, l'approche statistique reste indispensable pour un certain temps encore.

## 3.A.2. – CALCUL DES GRANDEURS MOYENNES DANS UN ÉCOULEMENT TURBULENT

### 3.A.2.1. – PROBLÈMES SOULEVÉS PAR LA DÉFINITION DE LA MOYENNE

Pour toute densité volumique  $C(t)$  dépendant du temps, on définit une moyenne  $\overline{C}$  entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + \tau$  par :

$$\overline{C(t)} = \overline{C} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} C(t) dt \quad (1)$$

expression qui généralise la définition (3.1) relative à la vitesse moyenne.

En fait, il faudrait écrire :

$$\overline{C(t)} = C(t_0, \tau) \quad (2)$$

car cette moyenne dépend évidemment de l'intervalle de temps choisi : c'est une *moyenne mobile*, mal définie au sens mathématique.

Un prolongement assez naturel de cette notion consiste à considérer que la fonction  $C(t)$  est la somme de sa moyenne et d'une *fluctuation*  $c(t)$  autour de la moyenne :

$$C(t) = C(t_0, \tau) + c(t) \quad (3)$$

où  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$

Rien n'interdit de réitérer l'opération de moyenne (1) sur l'égalité (3). Sachant que  $C(t_0, \tau)$  est indépendant de  $t$ , il vient :

$$\overline{C(t)} = C(t_0, \tau) + \overline{c(t)}$$

et compte tenu de (2), la conséquence est :

$$\boxed{\overline{c(t)} = 0} \quad (4)$$

*La moyenne de la fluctuation sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + \tau]$  est nulle.*

Malgré tout, il y a une difficulté, car d'après sa définition (3),  $c(t)$  est une fonction implicite des bornes de l'intervalle de calcul, c'est-à-dire de  $t_0$  et de  $\tau$ . La moyenne et sa fluctuation sont donc toutes les deux dépendantes de l'intervalle de temps utilisé.

Cependant, le problème se simplifie si l'on considère une classe particulière d'écoulements pour lesquels  $\overline{C(t)}$  est un opérateur stationnaire, c'est-à-dire indépendant de la durée d'intégration  $\tau$  (pratiquement, ceci implique en particulier que l'on puisse choisir  $\tau$  assez grand par rapport à la durée moyenne des fluctuations). Alors :

$$C(t_0, \tau) = C = cte \quad (5)$$

et la fluctuation  $c(t)$  devient indépendante de l'intervalle  $\tau$  (la propriété (4) restant évidemment vérifiée).

De tels écoulements sont dits *permanents (ou stationnaires) en moyenne*. Pour les réaliser, il est nécessaire (mais non suffisant) d'imposer des conditions aux limites indépendantes du temps.

En ce qui concerne les écoulements qui ne répondent pas à la définition (5), le problème reste entier. Tout ce qui suit concerne donc exclusivement les écoulements permanents en moyenne.

REMARQUE – Sachant que l'on a toujours :  $C(t) = \rho \gamma$  ( $\gamma$  densité massique de la grandeur considérée), en écoulement isochore où  $\rho = \overline{\rho} = cte$ , il vient :

$$\begin{aligned} C &= \rho \overline{\gamma} & ; & & c &= \rho \gamma' & \quad (\gamma' = \text{fluctuation de } \gamma) \\ \overline{\gamma'} &= 0 \end{aligned}$$

### 3.A.2.2. – ÉQUATION À TRAITER

Rappelons que l'équation sur laquelle vont principalement avoir lieu les calculs de moyenne est l'équation (3.6) :

$$\frac{\partial(C+c)}{\partial t} + \text{div}\{(C+c)(\vec{V} + \vec{v})\} = q_I + \text{div}\{D_c \overrightarrow{\text{grad}}(C+c)\}$$

où  $\vec{V}$  est le vecteur vitesse moyenne, et  $\vec{v}$  le vecteur fluctuation de vitesse.

En développant, on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(C\vec{V} + c\vec{V} + C\vec{v} + c\vec{v}) = q_I + \text{div}\{D_c (\overrightarrow{\text{grad}} C + \overrightarrow{\text{grad}} c)\} \quad (6)$$

La méthode consiste à prendre la moyenne des deux membres de cette équation.

### 3.A.2.3. – MOYENNE D'UNE DÉRIVÉE PAR RAPPORT AU TEMPS

♣ D'après la définition (5) des écoulements permanents en moyenne :

$$\overline{\frac{\partial C}{\partial t}} = 0 \quad (7)$$

◆  $\overline{\frac{\partial c}{\partial t}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\partial c}{\partial t} dt = \frac{1}{\tau} \{c(t_0 + \tau) - c(t_0)\} \rightarrow 0$  si  $\tau \rightarrow \infty$ , (c'est - à - dire en pratique si  $\tau$  est pris assez grand). On a donc :

$$\overline{\frac{\partial c}{\partial t}} = 0 \quad (8)$$

### 3.A.2.4. – MOYENNE D'UNE DÉRIVÉE PAR RAPPORT AUX COORDONNÉES D'ESPACE

Soit une fonction  $X = X(t, x_i)$ .

Par définition de la moyenne :

$$\overline{\frac{\partial X}{\partial x_i}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\partial X}{\partial x_i} dt$$

Les opérateurs  $\int$  et  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  portent sur des grandeurs indépendantes et peuvent être

permutés :

$$\overline{\frac{\partial X}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} X dt \right\} = \frac{\partial \overline{X}}{\partial x_i}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\overline{X}} \quad \text{pour un vecteur } \overrightarrow{X}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} X = \overrightarrow{\text{grad}} \overline{X} \quad \text{pour un scalaire } X \quad (9)$$

En particulier :

$$\overrightarrow{\text{div}} C\vec{V} = \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{C\vec{V}} = \overrightarrow{\text{div}} C\vec{V} \quad (C, \vec{V} = \text{ctes})$$

$$\overrightarrow{\text{div}} c\vec{V} = \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{c\vec{V}} = 0 \quad (\vec{V} = \text{cte}, \bar{c} = 0)$$

$$\overrightarrow{\text{div}} C\vec{v} = 0 \quad (\text{même raison})$$

$$\overline{\text{div } \vec{c} \vec{v}} = \text{div } \overline{\vec{c} \vec{v}}$$

$$\overline{\text{div} (D_c \overrightarrow{\text{grad}} C)} = \text{div} (D_c \overrightarrow{\text{grad}} C) \quad (\text{car } C = \text{cte})$$

$$\overline{\text{div} (D_c \overrightarrow{\text{grad}} c)} = \text{div} (D_c \overrightarrow{\text{grad}} \overline{c}) = 0$$

### 3.A.2.5 – ÉQUATION AUX VALEURS MOYENNES

Le passage aux valeurs moyennes dans l'équation (6) donne finalement :

$$\text{div } \overline{C \vec{V}} + \text{div } \overline{\vec{c} \vec{v}} = q_I + \text{div} (D_c \overrightarrow{\text{grad}} C)$$

Dans cette relation apparaît la *covariance*  $\overline{\vec{c} \vec{v}}$  des fluctuations  $c$  et  $\vec{v}$  (§ 3.2.1 ♠). En particulier, si  $c = \rho v_i$  (quantité de mouvement) on rencontrera dans l'équation des termes en  $\overline{v_i^2}$ , cette dernière grandeur étant la *variance* de  $v_i$ .

### 3.A.2.6 – FONCTIONS ET COEFFICIENTS DE CORRÉLATION

#### ♣ Fonctions et coefficients d'intercorrélation

Soient deux points  $A(x_i, x_j, x_k)$  et  $B(x_i, x_j + r_j, x_k)$ . On appelle *fonction d'intercorrélation des fluctuations*  $c$  en  $A$  et  $B$  la fonction :

$$F(A, r_j) = \overline{c_A(t) c_B(t)} \quad (10)$$

Si  $A$  est confondu avec  $B$  ( $r_j = 0$ ), on a :

$$F(A, 0) = \overline{c_A^2} = \text{variance de } c_A$$

Dans un écoulement permanent en moyenne, où  $\overline{C} = \text{cte}$  pour toute grandeur  $C$ , la fonction d'intercorrélation ne dépend pas du temps.

Le *coefficient d'intercorrélation* de  $c$  en  $A$  et  $B$  est un nombre sans dimension défini par :

$$R_c(A, r_j) = \frac{\overline{c_A c_B}}{\sqrt{\overline{c_A^2} \overline{c_B^2}}} \quad (11)$$

#### ◆ Fonctions et coefficients d'autocorrélation

Considérons maintenant un point  $A$  et deux instants  $t$  et  $t + \tau$ .

On désigne par *fonction d'autocorrélation* des fluctuations  $c_A$  sur une durée  $\tau$  la grandeur :

$$F(A, \tau) = \overline{c_A(t) c_A(t + \tau)} \quad (12)$$

Cette fonction caractérise en quelque sorte la « *mémoire locale* » du phénomène fluctuant.

Dans un écoulement permanent en moyenne, la fonction d'autocorrélation est indépendante du temps.

On définit un nombre sans dimension appelé *coefficient d'autocorrélation* de  $c_A$  sur la durée  $\tau$  par l'expression :

$$R_c(A, \tau) = \frac{\overline{c_A(t) c_A(t + \tau)}}{c_A^2} \quad (13)$$

♥ *Propriétés des coefficients de corrélation*

Nous allons montrer que :

$$R_c(A, 0) = 1$$

$$|R_c(A, r_j)| \leq 1$$

La première proposition est évidente puisque pour  $r_j = 0$  on a  $c_B = c_A$ , d'où  $R_c(A, 0) = 1$  d'après la définition (11).

Pour établir la seconde propriété, formons l'expression :  $c_A + \lambda c_B$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  donné.

Quel que soit  $\lambda$ , on a :

$$(c_A + \lambda c_B)^2 \geq 0$$

donc

$$\overline{(c_A + \lambda c_B)^2} \geq 0$$

soit :

$$\lambda^2 \overline{c_B^2} + 2\lambda \overline{c_A c_B} + \overline{c_A^2} \geq 0$$

Ce trinôme du second degré en  $\lambda$  est positif ou nul si son discriminant est négatif ou nul :

$$(\overline{c_A c_B})^2 - \overline{c_A^2} \overline{c_B^2} \leq 0$$

$$(\overline{c_A c_B})^2 \leq \overline{c_A^2} \overline{c_B^2}$$

d'où  $|R_c(A, r_j)| \leq 1$

On démontrerait de même que :

$$R_c(A, \tau = 0) = 1$$

$$|R_c(A, \tau)| \leq 1$$

### 3.A.3 – ÉCOULEMENTS TURBULENTS À MASSE VOLUMIQUE VARIABLE

#### 3.A.3.1. – PROBLÉMATIQUE

Pour toute densité volumique  $C$  dépendant du temps, on a :

$$C = \rho \gamma$$

où  $\gamma$  est la densité massique de l'entité physique considérée.

Si l'écoulement n'est pas isochore,  $\rho$  est variable, et les fluctuations de pression et de température vont induire des fluctuations de  $\rho$ .

La grandeur  $C$  soumise à bilan est donc maintenant le produit de deux grandeurs fluctuantes, ce qui entraîne quelques difficultés, comme nous allons le voir.

Dans ce paragraphe, nous désignerons la moyenne par le symbole  $\overline{\quad}$ , et la fluctuation par  $\prime$ .

Trois démarches peuvent être tentées.

### 3.A.3.2. – MÉTHODE « 0 »

La grandeur fluctuante dont on exprime le bilan local étant la grandeur  $C$ , la logique voudrait que l'on posât simplement :

$$\begin{cases} C = \bar{C} + C' \\ \bar{C}' = 0 \end{cases} \quad (\text{écoulement permanent en moyenne}) \quad (1)$$

soit ici :

$$\begin{cases} \rho\gamma = \bar{\rho}\bar{\gamma} + (\rho\gamma)' \\ \overline{(\rho\gamma)'} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Mais cette méthode naturelle conduit à une impasse car les grandeurs ordinairement accessibles à l'expérience ne sont pas les  $\rho\gamma$ , mais bien  $\rho$  et  $\gamma$  (c'est-à-dire  $\bar{T}$ ,  $\bar{V}$  ...) séparément. Or, on ne dispose d'aucun moyen pour isoler  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\gamma}$  à partir de la relation (2). Il faut donc y renoncer pour des raisons pratiques, ou alors développer si cela est possible des procédures expérimentales permettant d'obtenir directement les  $\bar{\rho}\bar{\gamma}$ , et considérer  $C = \rho\gamma$  comme l'inconnue dans une équation de bilan.

### 3.A.3.3. – MÉTHODE « I »

Pour lever la difficulté soulevée par la méthode « 0 », on peut envisager d'ajouter à la condition (2) deux règles supplémentaires destinées à préciser  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\gamma}$ , à savoir :

$$\begin{cases} \rho = \bar{\rho} + \rho' & \text{avec } \bar{\rho}' = 0 \\ \gamma = \bar{\gamma} + \gamma' & \text{avec } \bar{\gamma}' = 0 \end{cases} \quad (3)$$

On aura dans ce cas :

$$C = \rho\gamma = \bar{\rho}\bar{\gamma} + \bar{\rho}\gamma' + \rho'\bar{\gamma} + \rho'\gamma' \quad (4)$$

Mais alors, compte tenu de la relation (2), et puisque le terme non fluctuant de (4) est  $\bar{\rho}\bar{\gamma}$ , on devrait pouvoir écrire :

$$C = \bar{\rho}\bar{\gamma} + (\rho\gamma)' \quad (5)$$

ce qui est incompatible avec (2) car en général on a :  $\bar{\rho}\bar{\gamma} \neq \overline{\rho\gamma}$ , et par voie de conséquence  $\overline{(\rho\gamma)'} \neq 0$ .

Il y a donc contradiction entre les conditions (2) et (3). Si l'on impose les relations (3), (2) n'est pas vérifiée, et vice-versa.

Bien entendu, on peut toujours décider de postuler uniquement les conditions (3), mais cet accommodement avec la logique n'est pas récompensé, car on aboutit à des équations compliquées dont certains termes sont malaisés à interpréter.



### 3.A.3.4. – MÉTHODE « II »

Pour s'affranchir des difficultés rencontrées dans les méthodes « 0 » et « I », A. Favre a proposé d'adopter un moyen terme en posant :

$$\begin{cases} \rho \gamma = \overline{\rho \gamma} + \rho \tilde{\gamma}; & \overline{\rho \tilde{\gamma}} = 0 \\ \rho = \overline{\rho} + \rho'; & \overline{\rho'} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

On a donc sacrifié l'une des relations (3), en l'occurrence celle qui porte sur  $\gamma$ , en introduisant à la place une « *pseudo-fluctuation* »  $\tilde{\gamma}$  définie par la première équation (6), à savoir :

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\overline{\rho \gamma}}{\rho} \quad (7)$$

La moyenne de cette grandeur n'est généralement pas nulle car on a :

$$\frac{\overline{\rho \gamma}}{\rho} \neq \bar{\gamma}$$

d'où :

$$\bar{\tilde{\gamma}} = \bar{\gamma} - \frac{\overline{\rho \gamma}}{\rho} \neq 0$$

ou bien, en combinant les règles (6) :

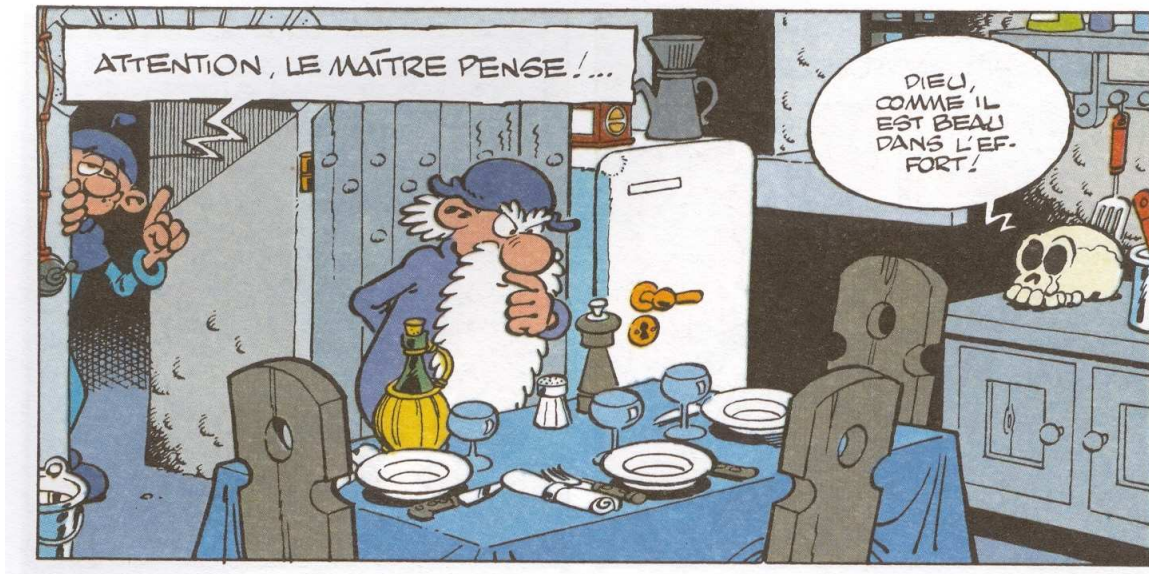
$$\overline{\rho \tilde{\gamma}} = 0 = \overline{(\overline{\rho} + \rho') \tilde{\gamma}} = \overline{\rho} \bar{\tilde{\gamma}} + \overline{\rho' \tilde{\gamma}}$$

et à nouveau :

$$\bar{\tilde{\gamma}} = - \frac{\overline{\rho' \tilde{\gamma}}}{\rho} \neq 0$$

Quoi qu'il en soit, les relations (6) sont compatibles entre elles, et n'entraînent plus aucune contradiction. Les équations de bilans aux grandeurs moyennes s'en trouvent simplifiées.

Malgré tout, il faut quand même reconnaître un caractère un peu artificiel à cette procédure, la seule méthode réellement consistante avec l'esprit de la théorie statistique étant la méthode « 0 ».



### 3.A.4. — ÉQUATIONS DE BILANS

#### POUR LES CORRÉLATIONS $\overline{cv}_j$ , $\overline{v_j v_k}$ et $\overline{\theta v_j}$

##### 3.A.4.1. — ÉQUATION EN $\overline{cv}_j$

###### ♣ Équation de départ

Notre point de départ est l'équation aux fluctuations (3.11) dans laquelle nous plaçons le terme  $\text{div } C\vec{v}$  à gauche :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } C\vec{v} + \text{div } c\vec{V} = q'_I + \text{div } \overline{c\vec{v}} + \text{div } (D_c \overrightarrow{\text{grad}} c) - \text{div } \overline{c\vec{v}} \quad (1)$$

###### ◇ Hypothèses



Les calculs sont faits dans l'hypothèse « écoulement isochore permanent en moyenne », c'est-à-dire avec :

$$\begin{aligned} \rho &= \text{cte}; & \text{div } \vec{v} &= 0; & \text{div } \vec{V} &= 0 \quad (\text{éq. 3.18}) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= 0 \quad (\text{Annexe 3.A.2.1}) & & & & (2) \\ \overline{c}, \overline{v}, \overline{q'_I} &= 0 \quad (\text{idem}). & & & & \end{aligned}$$

On admet en outre :  $D_c = \text{cte}$ ;  $v = \text{cte}$ .



### Méthode

Écrivons l'équation (1) dans le cas où  $C$  représente la quantité de mouvement suivant la direction  $j$ . On a :

$$C = \rho V_j; \quad c = \rho v_j; \quad D_c = v$$

$$q'_I = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad (3)$$

Après division par  $\rho$ , (1) devient :

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \text{div } V_j \vec{v} + \text{div } v_j \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \text{div } \overline{v_j \vec{v}} + \text{div } (v \overrightarrow{\text{grad}} v_j) - \text{div } v_j \vec{v} \quad (4)$$

Multiplions (1) par  $v_j$ , (4) par  $c$  et additionnons membre à membre. On obtient :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} v_j \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial v_j}{\partial t} \quad (a) \\ + v_j \text{div } C \vec{v} + v_j \text{div } c \vec{V} + c \text{div } V_j \vec{v} + c \text{div } v_j \vec{V} \quad (b) \\ = v_j q'_I - \frac{1}{\rho} c \frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad (c) \\ + v_j \text{div } \overline{c \vec{v}} + c \text{div } \overline{v_j \vec{v}} \quad (d) \\ + v_j \text{div } (D_c \overrightarrow{\text{grad}} c) + c \text{div } (v \overrightarrow{\text{grad}} v_j) \quad (e) \\ - v_j \text{div } c \vec{v} - c \text{div } v_j \vec{v}. \quad (f) \end{array} \right.$$

Nous allons regrouper les termes de l'équation (5) et prendre leurs valeurs moyennes.



### Calculs

Terme (a)

On voit que (a) =  $\frac{\partial}{\partial t} (cv_j)$ , donc :

$$\overline{(a)} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} cv_j} = 0 \quad (6)$$

(écoulement permanent en moyenne).

Terme (b)

$$(b) = v_j C \text{div } \vec{v} + v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C + v_j c \text{div } \vec{V} + v_j \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} c \\ + c V_j \text{div } \vec{v} + c \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j + cv_j \text{div } \vec{V} + c \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j$$

On a :  $\text{div } \vec{v} = \text{div } \vec{V} = 0$ , d'où :

$$(b) = v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C + c \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} V_j + \vec{V} (v_j \overrightarrow{\text{grad}} c + c \overrightarrow{\text{grad}} v_j)$$

Soit, en regroupant et en passant à la moyenne :

$$\overline{(b)} = \overline{v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C} + \overline{c \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j} + \overline{\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} cv_j} \quad (7)$$

Terme (c)

$$\overline{(c)} = \overline{v_j q'_I} - \frac{1}{\rho} c \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_j}} \quad (8)$$

Terme (d)

$$\overline{(d)} = \overline{v_j} \operatorname{div} \overline{c\vec{v}} + \overline{c} \operatorname{div} \overline{v_j\vec{v}} = 0 \quad (9)$$

car  $\overline{v_j} = 0$  et  $\overline{c} = 0$ .

Terme (e)

Ayant admis  $D_c = \text{cte}$  et  $v = \text{cte}$ , on a :

$$(e) = v_j \operatorname{div} (D_c \overrightarrow{\operatorname{grad} c}) + c \operatorname{div} (v \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j}) = D_c \{ \operatorname{div} (v_j \overrightarrow{\operatorname{grad} c}) - \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j} \} \\ + v \{ \operatorname{div} (c \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j}) - \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \}$$

et, en moyenne :

$$\overline{(e)} = D_c \operatorname{div} \overline{v_j \operatorname{grad} c} + v \operatorname{div} \overline{c \operatorname{grad} v_j} - (D_c + v) \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j} \quad (10)$$

Terme (f)

$$(f) = -v_j \operatorname{div} \overline{c\vec{v}} - c \operatorname{div} \overline{v_j\vec{v}} \\ = -cv_j \operatorname{div} \overline{\vec{v}} - \overline{v_j\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} - cv_j \operatorname{div} \overline{\vec{v}} - \overline{c\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j}$$

Nous avons là deux termes en  $\operatorname{div} \overline{\vec{v}}$  qui sont nuls, mais nous allons quand même en conserver un pour faciliter un regroupement :

$$(f) = -cv_j \operatorname{div} \overline{\vec{v}} - \overline{\vec{v}} \{ v_j \overrightarrow{\operatorname{grad} c} + c \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j} \} \\ = -cv_j \operatorname{div} \overline{\vec{v}} - \overline{\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} cv_j} = -\operatorname{div} (cv_j \overline{\vec{v}}) \\ \overline{(f)} = -\operatorname{div} \overline{cv_j\vec{v}} \quad (11)$$

Au total, en transférant au second membre les deux termes en  $\overrightarrow{\operatorname{grad} C}$  et  $\overrightarrow{\operatorname{grad} V_j}$ , l'équation aux valeurs moyennes s'écrit :

$$\overline{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} \overline{cv_j}} = -\overline{v_j\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} C} - \overline{c\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} V_j} \\ + \overline{v_j q'_I} - \frac{1}{\rho} \overline{c \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \\ - (D_c + v) \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} v_j} \\ + D_c \operatorname{div} \overline{v_j \operatorname{grad} c} + v \operatorname{div} \overline{c \operatorname{grad} v_j} \\ - \operatorname{div} \overline{cv_j\vec{v}} \quad (12) \equiv (3.46)$$

C'est la relation (3.46), analysée en détail au paragraphe 3.4.1.1.

En coordonnées cartésiennes, avec la convention de sommation sur les indices répétés, (3.46) prend la forme suivante :

$$V_i \frac{\partial \overline{cv_j}}{\partial x_i} = -\overline{v_j v_i} \frac{\partial C}{\partial x_i} - \overline{c v_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \\ + \overline{v_j q'_I} - \frac{1}{\rho} \overline{c \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \\ - (D_c + v) \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ + D_c \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{v_j \frac{\partial c}{\partial x_i}} + v \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{c \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{cv_j v_i} \quad (13)$$

### 3.A.4.2. — ÉQUATION EN $\overline{v_j v_k}$

Partant de l'équation (12), nous examinons maintenant le cas où  $C$  est la composante de la quantité de mouvement suivant la direction  $k$  :

$$C = \rho V_k; \quad c = \rho v_k; \quad D_c = v$$

En se limitant à la convection forcée, on a :

$$q'_i = -\frac{\partial p'}{\partial x_k}$$

Le terme  $D_c \operatorname{div} v_j \overrightarrow{\operatorname{grad}} c + v \operatorname{div} c \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_j$  devient :

$$v \{ \operatorname{div} v_j \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_k + \operatorname{div} v_k \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_j \} = v \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} v_j v_k) \quad (14)$$

Nous le laisserons sous cette forme pour bien rappeler que ce terme est en divergence, et représente donc une source de surface.

D'où l'équation de bilan de  $\overline{v_j v_k}$  (après division des deux membres par  $\rho$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \overline{v_j v_k} &= -\overline{v_j \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_k - \overline{v_k \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_j \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left( \overline{v_k \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{v_j \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right) \\ &\quad - 2v \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_k \\ &\quad + v \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \overline{v_j v_k} - \operatorname{div} \overline{v_j v_k \vec{v}} \end{aligned} \quad (15)$$

équation reprise dans le texte sous le numéro (3.47) (§ 3.4.1.1  $\diamond$ ).

En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{v_j v_k} &= -\overline{v_j v_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \overline{v_k v_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left( \overline{v_k \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{v_j \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right) \\ &\quad - 2v \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\ &\quad + v \frac{\partial^2 \overline{v_j v_k}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{v_i v_j v_k} \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.A.4.3. — ÉQUATION EN $\overline{\theta v_j}$

Nous considérons maintenant que  $C$  est l'enthalpie volumique du fluide :

$$C = \rho C_p T; \quad c = \rho C_p \theta; \quad D_c = a.$$

Admettons que les fluctuations  $q'_i$  des sources d'enthalpie soient négligeables :  $q'_i = 0$ .

En remplaçant dans (12) et en divisant par  $\rho C_p$ , on débouche sur l'équation (3.48) (§ 3.4.1.1  $\heartsuit$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \overline{\theta v_j} &= -\overline{v_j \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} T - \overline{\theta \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_j \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial p'}{\partial x_j} - (a + v) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_j \\ &\quad + a \operatorname{div} v_j \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta + v \operatorname{div} \theta \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_j \\ &\quad - \operatorname{div} \overline{\theta v_j \vec{v}}. \end{aligned} \quad (17) \equiv (3.48)$$

Donnons pour terminer la transposition de cette équation en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
 V_i \frac{\partial \overline{\theta v_j}}{\partial x_i} = & - \overline{v_j v_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \overline{\theta v_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \\
 & - \frac{1}{\rho} \overline{\theta \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - (a + v) \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \\
 & + a \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i}} + v \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\theta \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\theta v_j v_i}
 \end{aligned} \tag{18}$$

### 3.A.5. – ÉQUATION DE BILAN POUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE TURBULENCE $k$

L'énergie cinétique de turbulence est par définition :  $k = \frac{1}{2} \overline{v_j v_j}$ .

On part de l'équation de bilan aux corrélations  $\overline{v_j v_k}$  (éq. 15, annexe 3.A.4) dans laquelle on fait  $k = j$ , puis on somme sur  $j$  ( $j = 1, 2, 3$  ou  $x, y, z$ ). Il vient :

$$\begin{aligned}
 \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \overline{v_j v_j} = & - 2 \overline{v_j \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j - \frac{2}{\rho} \overline{\vec{v} \cdot \text{grad}} p' \\
 & - 2v \overrightarrow{\text{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j \\
 & + v \text{div} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \overline{v_j v_j} - \text{div} \overline{v_j v_j \vec{v}}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

En faisant intervenir  $k$  et en divisant par (2), l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} k = & - \overline{v_j \vec{v}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j - \frac{1}{\rho} \overline{\vec{v} \cdot \text{grad}} p' \\
 & - v \overrightarrow{\text{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j \\
 & + v \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} k - \frac{1}{2} \text{div} \overline{v_j v_j \vec{v}}.
 \end{aligned} \tag{2} \equiv (3.50)$$

C'est l'équation (3.50) analysée au paragraphe 3.4.1.2, et que l'on peut encore présenter en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
 V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = & - \overline{v_i v_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \overline{v_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\
 & - v \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\
 & + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{v_i v_j v_j}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

### 3.A.6. – ÉQUATION DE BILAN DE $\overline{c^2}$

L'équation de bilan de  $\overline{c^2}$  s'établit à partir de l'équation aux fluctuations (3.11) :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} (C\vec{v} + c\vec{V}) = q'_I + \text{div} \{ \overline{c\vec{v}} + D_c \overrightarrow{\text{grad}} c - c\vec{v} \} \tag{1}$$

Multiplions les deux membres par  $c$  :

$$c \frac{\partial c}{\partial t} + c \operatorname{div} C\vec{v} + c \operatorname{div} c\vec{V} = cq'_I + c \operatorname{div} \overrightarrow{c\vec{v}} + c \operatorname{div} (D_c \overrightarrow{\operatorname{grad} c}) - c \operatorname{div} c\vec{v} \quad (2)$$

En développant les termes en div, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^2}{\partial t} \frac{1}{2} + cC \operatorname{div} \vec{v} + c\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} C} + c^2 \operatorname{div} \vec{V} + c\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \\ = cq'_I + c \operatorname{div} \overrightarrow{c\vec{v}} + D_c \{ \operatorname{div} c \overrightarrow{\operatorname{grad} c} - \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \} \\ - \{ c^2 \operatorname{div} \vec{v} + c\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \} \end{aligned} \quad (3)$$

Dans cette équation,  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$  et  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  (d'après 3.18). On conserve cependant un terme  $\frac{1}{2} c^2 \operatorname{div} \vec{v}$  pour permettre un regroupement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^2}{\partial t} \frac{1}{2} + c\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} C} + c\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} = cq'_I + c \operatorname{div} \overrightarrow{c\vec{v}} + D_c \operatorname{div} c \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \\ - D_c \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \\ - \left\{ \frac{c^2}{2} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c^2} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

On voit que la dernière expression entre crochets vaut :  $\operatorname{div} \frac{c^2}{2} \vec{v}$ . De même, au premier membre :  $c\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} \frac{c^2}{2}}$ .

Passons aux valeurs moyennes. Sachant que l'écoulement est permanent en moyenne ( $\overline{\partial/\partial t} = 0$ , § 3.A.2.1) et que  $\bar{c} = 0$ , l'équation s'écrit, après multiplication par 2 :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c^2} &= \overline{cq'_I} - 2\overline{c\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} C} & (a) \\ &- 2D_c \overrightarrow{\operatorname{grad} c} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} c} & (b) \\ &+ D_c \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} c^2} & (c) \\ &- \operatorname{div} c^2 \vec{v} & (d) \end{aligned} \quad (5)$$

On a donc obtenu une relation de bilan de  $\overline{c^2}$  où apparaissent :

- des sources de volume : production (a) et dissipation (b);
- des sources de surface : diffusion moléculaire (c) et diffusion turbulente (d).

Dans (5), il suffit de faire  $c = v_j$  et  $D_c = \nu$ , ou  $c = \theta$  et  $D_c = a$  pour avoir les équations en  $\overline{v_j^2}$  ou  $\overline{\theta^2}$ .

### 3.A.7 – ÉQUATION DE BILAN POUR LA DISSIPATION $\epsilon$

On part encore de l'équation (3.11) dans laquelle on place le terme  $div C \vec{v}$  à gauche :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div(C \vec{v} + c \vec{V}) = q'_I + div \left\{ \overrightarrow{c \vec{v}} + D_c \overrightarrow{grad} c - c \vec{v} \right\} \quad (1)$$

Appliquons l'opérateur gradient à chaque membre, puis multiplions scalairement par  $2 D_c \overrightarrow{grad} c$  :

$$\begin{aligned} & 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} \frac{\partial c}{\partial t} + 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} div(C \vec{v} + c \vec{V}) \\ & \quad (a) \qquad \qquad \qquad (b) \quad (c) \qquad \qquad \qquad (2) \\ & = 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} q'_I + 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} div(\overrightarrow{c \vec{v}} + D_c \overrightarrow{grad} c - c \vec{v}) \\ & \quad (d) \qquad \qquad \qquad (f) \quad (g) \quad (h) \end{aligned}$$

On calcule terme à terme, et on prend ensuite la moyenne :

$$!! \quad (a) = D_c \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{grad} c)^2 \quad (3a)$$

La moyenne de  $\partial / \partial t$  est nulle (3.A.2.3) :

$$\overline{(a)} = 0 \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} !! \quad (b) & = 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} (C div \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} C), \text{ soit d'après (3.18) :} \\ & = 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} C) \end{aligned} \quad (4a)$$

ou avec une autre écriture qui fait apparaître les composantes:

$$\begin{aligned} (b) & = 2 D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_k \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) \\ & = 2 D_c v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_k} + 2 D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_k} \\ & \quad (b_1) \qquad \qquad \qquad (b_2) \end{aligned} \quad (4b)$$

et en moyenne :

$$\overline{(b)} = 2 D_c v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_k} + 2 D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_k} \quad (4c)$$

$$!! \quad (c) = 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} (c div \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} c)$$

et sachant que  $div \vec{V} = 0$ ,

$$(c) = 2 D_c \overrightarrow{grad} c \cdot \overrightarrow{grad} (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} c)$$



$$\begin{aligned}
&= 2 D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( V_k \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) \\
&= 2 D_c V_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} + 2 D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

et au bout du compte:

$$\overline{(c)} = D_c V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \right)^2 + 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \overline{\frac{\partial c}{\partial x_k}} \overline{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}} \quad (5a)$$

L'opération de moyenne

$$\overline{(c)} = D_c V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \right) + 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \overline{\frac{\partial c}{\partial x_k}} \overline{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}$$

va introduire ici une nouvelle grandeur :

$$\boxed{\varepsilon_c = D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} c = D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}}} \quad (5b)$$

Alors :

$$\overline{(c)} = V_k \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial x_k} + 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \overline{\frac{\partial c}{\partial x_k}} \overline{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}$$

expression dans laquelle on reconnaît le gradient de  $\varepsilon_c$  :

$$\overline{(c)} = \underbrace{\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon_c}_{(c_1)} + 2 D_c \underbrace{\overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}} \overline{\frac{\partial c}{\partial x_k}} \overline{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}}_{(c_2)} \quad (5c)$$

$$!! \quad \overline{(d)} = 2 D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} q'_I \quad (6)$$

$$!! \quad \overline{(f)} = 2 D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } c \vec{v})$$

$$\overline{(f)} = 2 D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } c \vec{v}) = 0 \quad (7)$$

car le second gradient est déjà une moyenne, tandis que,  $c$  étant une fluctuation,  $\overrightarrow{\text{grad}} c = 0$  (cf. 3.A.2.3).

$$\begin{aligned}
!! \quad \overline{(g)} &= 2 D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } D_c \overrightarrow{\text{grad}} c) \\
&= 2 D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D_c \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (8a)$$

(la notation vectorielle n'est pas bien adaptée ici).

En permutant les dérivations par rapport aux coordonnées  $j$  et  $k$  et en admettant que  $D_c = cte$  :

$$(g) = 2D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \right\}$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$(g) = D_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( 2D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \right) - 2D_c^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k}$$

et enfin :

$$(g) = D_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right] \right) - 2D_c^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \quad (8b)$$

Par passage à la moyenne, cette manipulation fait apparaître la grandeur  $\varepsilon_c$  définie par (5b) ci-dessus :

$$\overline{(g)} = D_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial x_k} \right) - 2D_c^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \quad (8c)$$

$(g_1)$ 
 $(g_2)$

$$!! \quad (h) = -2D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{c} \vec{v} \quad (9a)$$

Puisque  $\text{div} \vec{v} = 0$  (§ 3.3.3.1) :

$$\begin{aligned} (h) &= -2D_c \overrightarrow{\text{grad}} c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} c) \\ &= -2D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_k \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) \\ &= -2D_c \left\{ v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right\} \\ &= -D_c v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) - 2D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Le premier terme se transforme un peu :

$$v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) - \left( \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

où  $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \text{div} \vec{v} = 0$ . Finalement, en passant directement à la moyenne :

$$\overline{(h)} = -D_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) - 2D_c \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (9b)$$

$(h_1)$ 
 $(h_2)$

C'est fini ; il n'y a plus qu'à regrouper. L'équation de départ (2) se présente comme un bilan de  $\varepsilon_c$  si on laisse seul à gauche le terme de transport  $\overline{V \cdot grad \varepsilon_c}$  de (5c):

$$\begin{aligned}
V_k \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial x_k} &= - 2 D_c \overline{v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_k}} - 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_k}} && (b_1), (b_2) \\
&- 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}} && (c_2) \\
&+ 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial q'_I}{\partial x_j}} && (d) \\
&+ D_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial x_k} \right) - 2 D_c^2 \overline{\frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_k}} && (g_1), (g_2) \\
&- 2 D_c \overline{\frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}} - D_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v_k \frac{\partial c}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j}} \right) && (h_2), (h_1)
\end{aligned} \tag{10}$$

Dernière étape : on choisit  $c = v_i$  (donc  $C = V_i$ ) et  $D_c = \nu$ , d'où  $\varepsilon_c = \varepsilon$  (dissipation, définie par 3.52), puis on somme sur  $i$ . De plus, dès à présent, nous allons éliminer le terme (d), dont le calcul montre qu'il est négligeable en convection forcée (mais pas en convection naturelle ou mixte car il contient la flottabilité).

On obtient donc en fin de compte un *bilan de dissipation* :

$$\begin{aligned}
V_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} &= - 2 \nu \overline{v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2 \nu \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_k}} && (b_1), (b_2) \\
&- 2 \nu \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}} && (c_2) \\
&+ \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) - 2 \nu^2 \overline{\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}} && (g_1), (g_2) \\
&- 2 \nu \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \right) && (h_2), (h_1)
\end{aligned} \tag{11}$$