

Régulation en température d'un appareil de mesure dimensionnel : contrôle MPC et LQG par modèle réduit

Kamelia BOUDERBALA^{1,2}, Etienne VIDECOQ¹, Manuel GIRAULT¹, Hichem NOUIRA², José Antonio SALGADO², Daniel PETIT¹

¹ Institut Pprime, CNRS - ENSMA - Université de Poitiers, Département Fluides, Thermique, Combustion- ENSMA

Téléport 2, 1, avenue Clément Ader, BP 40109, F86961 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL Cedex

² Laboratoire National de métrologie et d'Essais, Laboratoire commun de métrologie LNE / CNAM
1, rue Gaston Boissier 75015 PARIS

*(auteur correspondant : kamelia.bouderbala@lne.fr)

Résumé - Dans le cadre de la résolution de problèmes de contrôle thermique multi-entrées multi-sorties en temps réel, l'utilisation de modèles réduits construits par la méthode d'identification modale développée à l'institut Pprime s'est révélée très efficace. Le contrôle par retour d'état réalisé jusqu'à présent grâce à la commande linéaire gaussienne est ici comparé au contrôle prédictif. L'étude est menée à partir d'un modèle numérique du comportement thermique d'une machine de mesure géométrique de très haute exactitude développée au Laboratoire National de métrologie et d'Essais.

1. Introduction

Les avancées technologiques réalisées ces dernières décennies ont créé un besoin grandissant en matière de précision, de stabilité, de sécurité ou d'économie d'énergie. Pour faire face à ces nouveaux besoins et pour atteindre les performances souhaitées, les différents domaines industriels font appel au contrôle.

Nous nous intéressons ici à la régulation thermique fine d'un appareil de métrologie dimensionnelle de très haute exactitude, actuellement en cours de développement au Laboratoire National de métrologie et d'Essais (LNE) [1]. Ce système thermique met en jeu plusieurs zones à réguler et actionneurs à mettre en oeuvre, ainsi que de multiples sources de chaleur perturbatrices.

Les approches de type PID n'étant pas les mieux adaptées pour les systèmes multi-entrées multi-sorties, nous avons choisi des méthodes de contrôle optimal. Parmi celles-ci on trouve la commande linéaire quadratique gaussienne [2] [3][4] et la commande prédictive [5] ; ces deux méthodes sont basées sur un modèle du système et nécessitent donc une parfaite connaissance de celui-ci.

L'application de ces méthodes à un problème de thermique requiert la modélisation du système à contrôler, cependant la modélisation thermique classique génère après discrétisation spatiale un système mathématique avec un grand nombre d'équations différentielles. La résolution de ce type de système nécessite un temps de calcul très élevé, d'où l'impossibilité de faire un contrôle en temps réel. Pour remédier à ce problème, un modèle avec un nombre réduit d'équations reproduisant parfaitement le comportement du système doit être employé.

Parmi les méthodes permettant de réduire la taille d'un modèle on trouve la méthode d'identification modale (MIM). Cette méthode développée au sein de l'institut Pprime depuis plusieurs années [6] a connu différentes applications [7], dont certaines associant la MIM à la commande LQG [8][9]. Les travaux présentés ici visent à comparer les approches de commande prédictive et de commande linéaire quadratique gaussienne.

2. Présentation de l'appareil de métrologie dimensionnelle

Le LNE développe actuellement une nouvelle machine métrologique de mesure de forme, destinée à mesurer la cylindricité, la rectitude et la circularité des étalons cylindriques avec une incertitude inférieure à 10 nanomètres. Ces étalons sont ensuite utilisés par les industriels pour étalonner leurs machines de mesure de forme.

La nouvelle machine contient des actionneurs, des moteurs d'entraînement et des interféromètres laser qui représentent des sources de chaleur non négligeables pour cette application. Les variations de température provoquent alors des déformations mécaniques qui affectent notamment la partie de la structure correspondant à la chaîne métrologique, ce qui dégrade le niveau d'incertitude obtenu.

Afin d'améliorer l'exactitude de la machine, la température doit être maintenue constante et homogène en mettant en œuvre une régulation thermique. Dans un premier temps, l'étude sera menée sur un banc de test appelé couronne (cf. figure 1). Cette couronne reproduit la structure métrologique de la machine dont la fonction est l'étalonnage in-situ des capteurs. Le but est de déterminer la meilleure méthode de contrôle ainsi que les moyens matériels de mise en œuvre permettant une régulation au centième de degré de la température de la couronne. Dans le travail présenté ici, c'est à partir d'un modèle numérique de cette couronne que des modèles réduits sont construits et des algorithmes de contrôle testés.

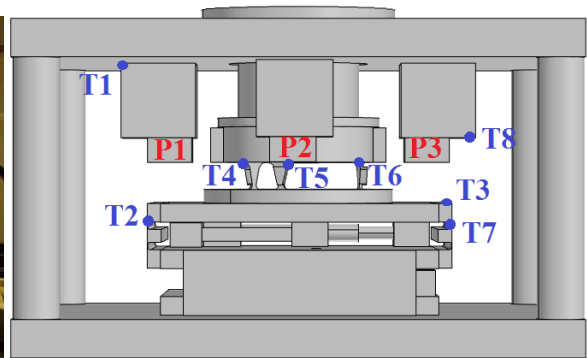


Figure 1 Couronne de la machine dimensionnelle

Figure 2 Couronne simplifiée sous COMSOL

3. Modélisation thermique et réduction de modèle

La couronne est composée de 3 matériaux différents avec des conductivités thermiques supposées indépendantes de la température, et de 4 sources de chaleur P_1, P_2, P_3, P_4 (cf. figure 2 avec P_4 diamétralement opposée à P_2). Elle est le siège de transferts de chaleur par diffusion. La couronne échange avec son environnement à la température ambiante T_a avec un coefficient de convection $h = 7 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

L'équation régissant l'évolution de la température dans le domaine Ω s'écrit :

$$\nabla \cdot (\lambda(M) \nabla T(M, t)) + p(M, t) = \rho(M) C_p(M) \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) \quad \forall M \in \Omega \quad (1)$$

Avec comme condition limite :

$$\lambda(M) \nabla T \cdot \mathbf{n} = h(T_a - T) \quad (2)$$

L'équation (1) étant impossible à résoudre analytiquement compte-tenu de la géométrie complexe de la couronne, on fait appel au logiciel de simulation numérique COMSOL basé sur la

méthode des éléments finis. La discrétisation spatiale de l'équation de la chaleur sous COMSOL s'écrit :

$$[C_a] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} - \{L\} = 0 \quad (3)$$

où C_a et K sont les matrices des capacités et conductances thermiques respectivement. L est le vecteur des sollicitations et T le vecteur des températures nodales.

Ce système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{T}(t) &= AT(t) + Bu(t) \\ y^{md}(t) &= CT(t) \end{cases}$$

où $u(t) = [P_1, P_2, P_3, P_4]^T$ est le vecteur des entrées, A est la matrice d'état, B est la matrice d'entrée et C la matrice de sortie permettant d'extraire du champ de température $T(t)$ un vecteur d'observables $y^{md}(t)$. Le maillage de ce système obtenu sous COMSOL est constitué de $N = 502873$ noeuds. Pour une simulation type des transferts thermiques dans la couronne, le temps de calcul est d'environ 4h30.

Ce modèle n'est par conséquent pas adapté au contrôle en temps réel, une réduction du modèle s'impose donc. La méthode d'identification modale (MIM) qui repose sur la représentation d'état modale du système est utilisée ici.

En introduisant le changement de variable $T(t) = Mx(t)$ où M est la matrice des vecteurs propres de A dans l'expression de la représentation d'état précédente, on obtient une nouvelle représentation d'état du système écrite dans la base modale.

On va chercher un modèle réduit de forme similaire constitué d'un nombre d'équations différentielles $n \ll N$ défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y^{mr}(t) &= Hx(t) \end{cases} \quad (4)$$

où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état diagonale, $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ la matrice d'entrée et $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ la matrice de sortie, q est le nombre de températures à observer, p le nombre d'entrées et n l'ordre du modèle réduit.

Les composantes de ce modèle sont identifiées en minimisant le critère quadratique (5) de manière à avoir $y^{mr}(t) \approx y^{md}(t)$ par des méthodes telles que l'optimisation par essaim particulaire [10] et la méthode des moindres carrés ordinaires.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{1}{N_{obs} \times N_{tps}} \sum_{i=1}^{N_{obs}} \sum_{j=1}^{N_{tps}} (y_i^{mr}(t_j, u, F, G, H) - y_i^{md}(t_j, u))^2} \quad (5)$$

où N_{obs} est le nombre d'observables, N_{tps} le nombre de pas de temps. Dans cette étape d'identification du modèle réduit, le vecteur d'entrée u est connu, il est classiquement constitué d'échelons successifs sur chacune des entrées.

Le système obtenu étant de faible dimension n , le contrôle en temps réel peut désormais être envisagé.

4. Contrôle optimal

Le modèle obtenu par la méthode d'identification modale est un système MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) linéaire, commandable et observable. Ce système est soumis à des perturbations qui peuvent intervenir et le faire dévier de sa trajectoire initiale. Pour ramener le système vers une trajectoire désirée et améliorer ses performances on fait appel à la commande.

Pour les systèmes MIMO, les méthodes de commande les plus adaptées sont les méthodes basées sur une représentation d'état du système. La commande optimale qui repose sur la minimisation d'un critère de performance éventuellement sous contraintes a fait son apparition dans les années 60. Dans l'étude numérique qui suit, une comparaison sera faite entre deux méthodes issues de la commande optimale, la commande linéaire quadratique gaussienne et la commande prédictive. On considère que $P_1 = 0$, P_3 est une perturbation et P_2 et P_4 sont des commandes, le modèle réduit (4) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Fx(t) + G_c u_c(t) + G_p u_p(t) \\ y^{mr}(t) &= Hx(t) \end{cases} \quad (6)$$

avec $u_c = [P_2, P_4]^T$ et $u_p = P_3$.

On appelle $z(t)$ la partie de $y^{mr}(t)$ correspondant aux températures à contrôler. On a donc

$$z(t) = H_z x(t) \quad (7)$$

avec H_z une sous-matrice de H .

4.1. Commande linéaire quadratique gaussienne

La commande LQG s'applique à des systèmes dont l'état est bruité et pas directement mesurable, ce qui a fait d'elle et depuis son apparition l'une des méthodes les plus répandues dans le domaine industriel. Cette méthode repose sur le principe de séparation qui stipule que la solution du problème de commande optimale se décompose en deux parties.

4.1.1. Régulateur linéaire quadratique (LQR)

Le régulateur linéaire quadratique a pour objectif de stabiliser le système tout en satisfaisant une fonction de coût permettant de minimiser l'erreur de sortie :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u_c^T(t) R u_c(t)] dt. \quad (8)$$

$Q = H_z^T H_z$, $R = \text{diag}(l^2)$. En agissant sur l , on agit sur l'amplitude de commande ce qui nous permet de limiter l'énergie consommée.

La loi de commande optimale unique permettant de minimiser la fonction de coût ci-dessus est donnée par [2] [3] :

$$u_c(t) = -K_r x(t), \quad (9)$$

où $K_r = R^{-1} G_c^T P$, P étant la solution semi-définie de l'équation de Riccati :

$$PF + F^T P + Q - (1/l^2) P G_c G_c^T P = 0. \quad (10)$$

L'équation (9) montre que pour le calcul de la commande, il est nécessaire de connaître l'état du système. L'état n'étant pas accessible par des mesures directes, on fait appel à un estimateur capable de donner l'état du système à partir des informations disponibles.

4.1.2. Filtre de Kalman

Un filtre de Kalman est un système dynamique qui permet d'identifier l'état d'un système dans le temps en utilisant ses entrées, sorties et les covariances des bruits gaussiens qui affectent le système. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Fx(t) + G_c u_c(t) + G_p P_3(t) \\ y(t) &= Hx(t) + w \end{cases} \quad (11)$$

où w est le bruit de mesure des températures. On définit σ_m et σ_P comme étant les écarts types des bruits w et P_3 a priori gaussiens, centrés et décorrélés dans le temps. On appelle α le rapport σ_m/σ_P .

L'équation du filtre de Kálmán s'écrit [2] :

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + G_c u_c + K_f (y - H\hat{x}) \quad (12)$$

Le premier terme du second membre de cette équation est utilisé pour prédire l'état du système, le second terme est un terme de correction grâce auquel on peut corriger les écarts éventuels entre l'état estimé \hat{x} et l'état actuel x . La correction se fait par le biais d'une matrice K_f appelée gain de Kálmán donnée par :

$$K_f = \frac{1}{\alpha^2} S H^T, \quad (13)$$

où S est la solution de l'équation de Riccati :

$$S F^T + F S - \frac{1}{\alpha^2} S H^T H S + G_p G_p^T = 0 \quad (14)$$

Une fois l'état du système estimé, il peut être utilisé dans le calcul de la commande obtenue avec le correcteur LQR.

4.1.3. Synthèse LQG

Le principe consiste à remplacer $x(t)$ par $\hat{x}(t)$ dans l'équation (9) et à injecter cette commande dans (12). L'état estimé \hat{x} est d'abord calculé, ensuite vient le calcul de la commande.

4.2. Commande prédictive

La commande prédictive ou Model Predictive Control (MPC) [5] est apparue à la fin des années 70, elle repose sur l'utilisation d'un modèle pour prédire le comportement du système et ainsi choisir la meilleure commande au sens d'un certain coût en respectant certains critères. Les futures sorties pour un horizon déterminé N_p appelé horizon de prédiction sont prédites à chaque instant t en utilisant le modèle du système. Le modèle utilisé dans la prédiction est un modèle d'état discret obtenu après discrétisation temporelle du modèle continu (4), il est donné par :

$$\begin{pmatrix} z(t+1) \\ \vdots \\ z(t+N_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H\mathcal{F} \\ \vdots \\ H\mathcal{F}^{N_p} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} H\mathcal{F}G_c\Delta t \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_p} H\mathcal{F}^i G_c\Delta t \end{pmatrix} u_c(t-1) \\ + \begin{pmatrix} H\mathcal{F}G_c\Delta t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_p} H\mathcal{F}^i G_c\Delta t & \cdots & H\mathcal{F}G_c\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_c(t) \\ \vdots \\ \Delta u_c(t+N_p-1) \end{pmatrix}$$

Avec : $\Delta u_c(t) = u_c(t) - u_c(t-1)$ et $\mathcal{F} = (I - F\Delta t)^{-1}$, où Δt est le pas de temps de contrôle. Ce système s'écrit :

$$Z(t) = \Psi x(t) + \Gamma u_c(t-1) + \Theta \Delta U_c(t) \quad (15)$$

Les sorties prédites dépendent donc des entrées du système et des futures actions de contrôle qui sont à calculer et à envoyer au système. Ces actions de contrôle sont calculées en optimisant

le critère quadratique donné par l'équation (16) qui permet de minimiser l'écart entre la sortie du système et une trajectoire de référence $z_{ref}(t)$.

$$J = \sum_{j=1}^{N_p} [z(t+j) - z_{ref}(t+j)]^2 + \lambda [\Delta u_c(t+j-1)]^2 \quad (16)$$

En remplaçant l'expression de la sortie dans l'expression du critère de performance on obtient une fonction quadratique convexe, son minimum est obtenu en annulant son gradient par rapport à $\Delta U_c(t)$. Il en résulte le vecteur des commandes futures donné par :

$$\Delta U_c(t) = (\Theta^T \Theta + \lambda I)^{-1} \Theta^T [z_{ref}(t) - \Psi x(t) - \Gamma u_c(t-1)] \quad (17)$$

Selon la philosophie de la commande prédictive seules les composantes de $\Delta U_c(t)$ correspondant au premier pas de temps sont appliquées au système.

Dans le cas où les états du système ne sont pas observables, il est impératif d'utiliser un filtre de Kálmán pour les estimer.

5. Comparaison des deux méthodes de contrôle

La MIM a été utilisée dans la construction d'une série de modèles réduits d'ordre 1 à 10. La figure 3 montre l'évolution du critère défini par (5) en fonction de l'ordre du modèle réduit. A partir de cette figure, le modèle réduit d'ordre 7 a été choisi pour le reste de l'étude.

La perturbation P_3 est donnée par la figure 4, son écart type σ_P est égal à 4,32W. Le vecteur y^{mr} est composé des températures T_1 à T_8 dont les positions sont illustrées en figure 2. Ces observables sont bruités avec un signal d'écart type $\sigma_m = 0,001^\circ\text{C}$. $z = [T_5, T_6]^T$ est le vecteur des températures à contrôler et Δt le pas de temps du contrôle fixé à 10s.

Le comportement du système est observé pendant 20h. Durant les 10 premières heures (soit $N_t = 3600$ pas de temps) le système est soumis à la perturbation et le contrôle lui est appliqué. A la fin de ces 10h, il ne sera soumis qu'à la perturbation. Ceci permet de mieux visualiser les effets du contrôle.

Les figures 5 et 7 montrent que les approches LQG et MPC ont permis le rejet de la perturbation P_3 , c'est-à-dire la quasi-disparition de l'effet de la perturbation sur les températures à contrôler. Les températures obtenues avec les deux approches sont tout à fait similaires.

Le même modèle réduit ayant été utilisé pour la simulation des températures et pour la boucle de rétroaction (estimation de l'état et calcul des commandes), l'écart-type σ_z sur les températures à contrôler atteint l'écart-type σ_m du bruit de mesure, soit $0,001^\circ\text{C}$ (cf. Tableau 1).

On constate également sur les figures 5 et 7 l'effet important de la perturbation dans le cas non-contrôlé, avec un écart-type σ_z presque 50 fois plus grand que dans le cas contrôlé (cf. Tableau 1).

Pour le LQG comme pour le MPC, le réglage des paramètres du régulateur nécessite une grande attention. Pour le LQG, on a fixé $l = 3.10^{-4} \text{ K.W}^{-1}$ et pour le MPC, $\lambda = 10^{-5} \text{ K.W}^{-1}$. La faible valeur de ces paramètres autorise une large amplitude et des variations rapides des commandes, comme le confirment les figures 6 et 8. On remarque également que les commandes sont différentes dans les deux approches mais que leur combinaison donne des résultats similaires.

Par rapport à la commande LQG, la commande MPC requiert le réglage d'un paramètre supplémentaire, le nombre N_p de pas de temps définissant l'horizon de prédiction, ici fixé à 100.

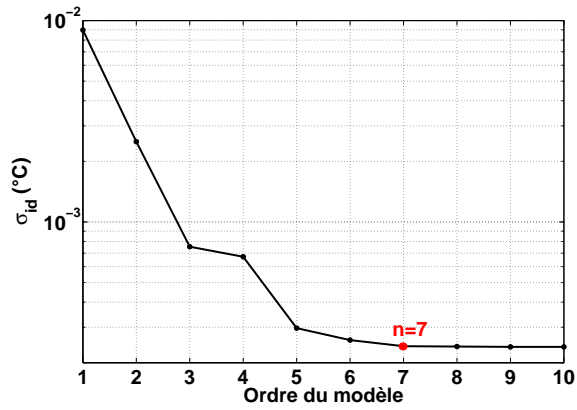


Figure 3 Evolution de σ_{id} en fonction de n

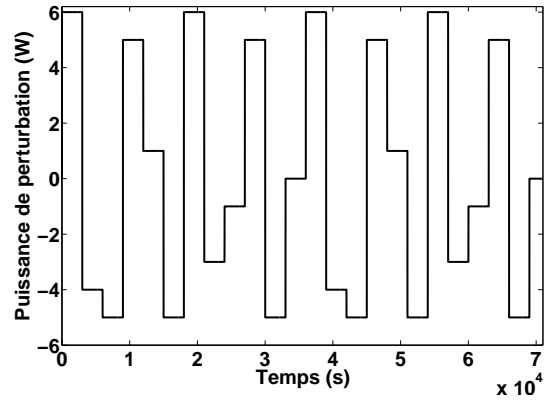


Figure 4 Perturbation sur P_3

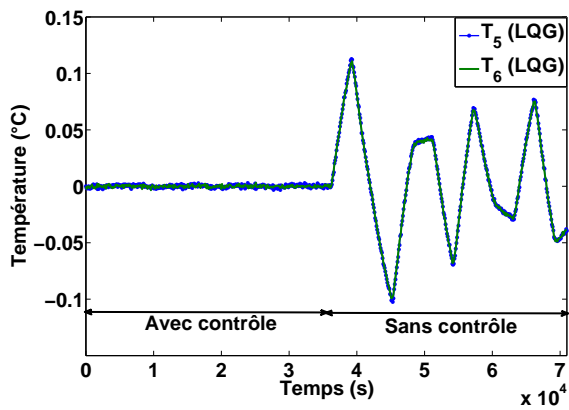


Figure 5 Evolution de T_5, T_6 avec le LQG

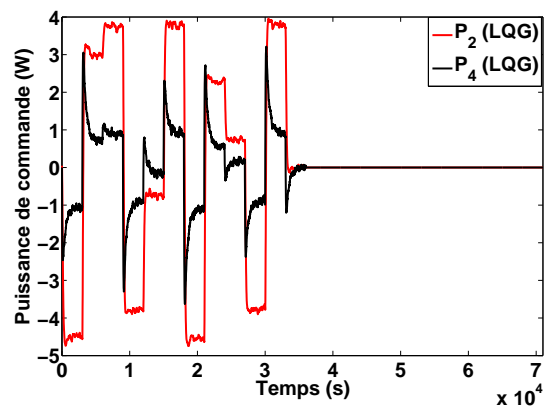


Figure 6 Commande issue du régulateur LQG

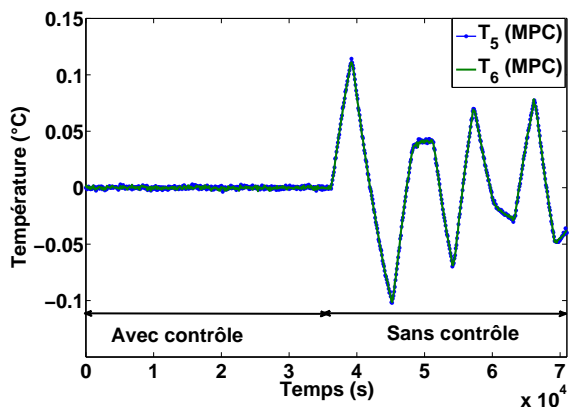


Figure 7 Evolution de T_5, T_6 avec le MPC

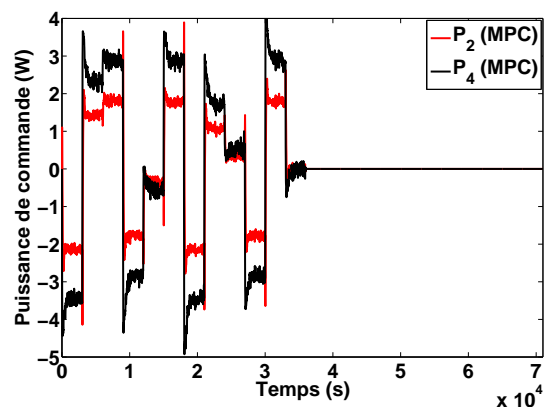


Figure 8 Commande issue du régulateur MPC

	$\sigma_z = \left(\frac{1}{2 \times N_t} \sum_{j=1}^{N_t} (T_5^2(t_j) + T_6^2(t_j)) \right)^{1/2} \quad (^\circ\text{C})$
Sans contrôle	0,0475
Avec contrôle LQG	0,0011
Avec contrôle MPC	0,0010

Tableau 1 *Ecart quadratique moyen entre les sorties désirées et les sorties obtenues*

6. Conclusion

Dans cette étude numérique, nous avons présenté la simulation d'une régulation thermique fine de l'organe fondamental d'une machine de mesure géométrique. Une première étape de modélisation thermique et de réduction de modèle a été menée, suivie de l'application de deux méthodes de contrôle : la commande linéaire quadratique gaussienne et la commande prédictive. Les deux approches ont fourni des résultats très similaires avec des écarts de température de l'ordre de grandeur du bruit introduit sur les températures simulées.

Références

- [1] A. Vissiere, H. Nouira, M. Damak, O. Gibaru, J–M David *Concept and architecture of a new apparatus for cylindrical form measurement with a nanometric level of accuracy*, Meas.Sci.Technol 23–9 (2012)
- [2] B.D.O. Anderson et J.B Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, (1971).
- [3] D.S. Naidu, *Optimal control systems*, CRC Press LLC , (2003).
- [4] B.N. Datta, *Numerical Methods for Linear Control Systems – Design and Analysis*, Elsevier Academic Press, San Diego , (2004).
- [5] E.F. Camacho et C. Bordons, *Model Predictive Control*, Springer-Verlag, London, (2007).
- [6] M. Girault, D. Petit, E. Videcoq, *Identification of Low–Order Models and their use for solving inverse Boundary Problems*, H.R.B. Orlande, O. Fudym, D. Maillet, R.M. Cotta(Eds), Thermal Measurements and Inverse Techniques,CRC Press (2011).
- [7] E. Videcoq, D. Petit et A. Piteau, *Experimental modelling and estimation of time varying thermal sources*, Int. J. of Thermal Sciences, 42-3 (2003), 255-265.
- [8] E. Videcoq, M. Girault et D. Petit, *Low order modelling and closed loop thermal control of a ventilated plate subject to a heat source disturbance*, Journal of Physics : Conference Series, 395, (2012).
- [9] M. Girault et E. Videcoq, *Temperature regulation and tracking in a MIMO system with a mobile heat source by LQG control with a low order model*,Control Eng. Practice, 21-3 (2013), 333-349.
- [10] M. Clerc, *L'optimisation par essais particuliers – versions paramétriques et adaptatives*,Hermes science Lavoisier, Paris, (2005).

Remerciements

Les auteurs remercient l'EMRP (European Metrology Research Program). L'EMRP est financé par les pays participant à EURAMET (European Association of National Metrology Institutes) et par l'Union Européenne.