

**LE COEFFICIENT h REVISITE
OU COMMENT REPRESENTER LES TRANSFERTS DE CHALEUR
ENTRE UN FLUIDE EN REGIME ETABLI
ET UNE PAROI NON ISOTHERME EN REGIME TRANSITOIRE**

- La généralisation d'un coefficient d'échange $h(x,t)?$
- Une admittance généralisée $H(\omega, p)?$
- Une impédance généralisée $Z(\omega, p) = 1/H(\omega, p)?$

Alain Degiovanni – Benjamin
Rémy

LEMTA – ENSEM – NANCY



INTRODUCTION

$$\varphi_s = h (T_s - T_{ref})$$

à l'interface solide-fluide en régime permanent

h

coefficient d'échange ($1/h$ est une résistance)

φ_s et T_s densité de flux et température du surface

T_{ref}

température de référence

$$T_1 - T_2 = r\varphi$$

dans un tube de flux en régime permanent

En régime transitoire

$$T_1(t) - T_2(t) = r(t) \varphi(t) \quad !!!$$

$$\varphi_s(t) = h(t) (T_s(t) - T_{ref})$$



I - LE PROBLEME GENERIQUE

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{u(y)}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$\lambda, a, u(y)$ indépendant de x et t

en $x = \pm \infty$ $T = T_e$ et $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

en $y = e$ $T = T_e$ ou $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

ou autres conditions

en $y = 0$ $-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varphi_0(x, t)$

ou $T = T_0(x, t)$

à $t = 0,$ $T = T_e$

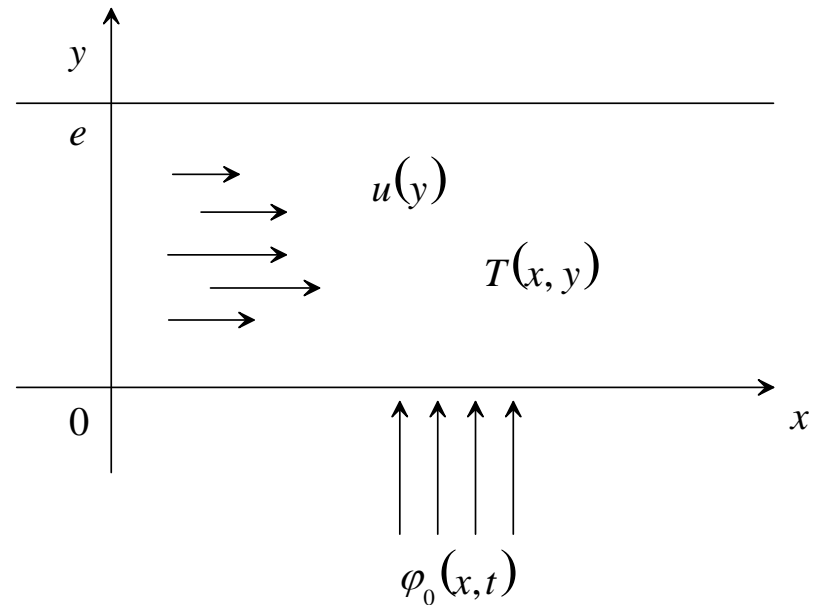


Figure 1

I – LA SOLUTION

Après une double transformée : $\theta(\omega, y, p) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (T(x, y, t) - T_e) \exp(-i\omega x) \exp(-pt) dx dt$

le problème devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \left(\frac{u(y)}{a} i\omega + \omega^2 + \frac{p}{a} \right) \theta$$

soit la solution générale :

$$\begin{bmatrix} \theta(\omega, 0, p) \\ \Phi(\omega, 0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\omega, p) & B(\omega, p) \\ C(\omega, p) & D(\omega, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\omega, e, p) \\ \Phi(\omega, e, p) \end{bmatrix}$$

si on fixe la condition en $y = e$:

$$T = T_e \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \theta(\omega, 0, p) &= \frac{B(\omega, p)}{D(\omega, p)} \Phi(\omega, 0, p) \\ \theta(\omega, 0, p) &= Z_T(\omega, p) \cdot \Phi(\omega, 0, p) \end{aligned}$$

$$\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \theta(\omega, 0, p) &= \frac{A(\omega, p)}{C(\omega, p)} \Phi(\omega, 0, p) \\ \theta(\omega, 0, p) &= Z_\varphi(\omega, p) \cdot \Phi(\omega, 0, p) \end{aligned}$$

La forme générale : $\theta(\omega, 0, p) = Z(\omega, p) \cdot \Phi(\omega, 0, p)$

soit : $(T(x, 0, t) - T_e) = \hat{r}(x, t) \otimes \varphi(x, 0, t)$

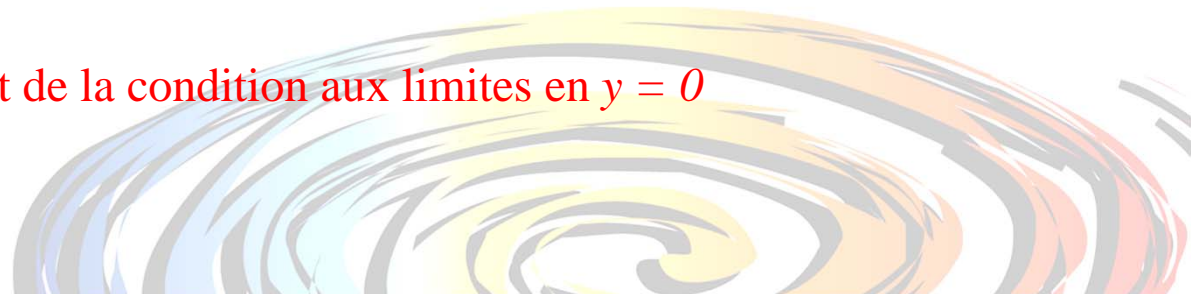
$$\hat{r}(x, t) = L^{-1} F^{-1} [Z(\omega, p)]$$

et pas : $\varphi(x, 0, t) = h(x, t) \cdot (T(x, 0, t) - T_e)$

Dans le cas : $u(y) = U_0$ et $e \rightarrow \infty$

$$Z_\infty = \frac{1}{\lambda \alpha} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{U_0}{a} i \omega + \omega^2 + \frac{p}{a}}}$$

indépendant de la condition aux limites en $y = 0$



Pourquoi ne pas choisir :

$$\varphi(x,0,t) = \hat{h}(x,t) \otimes (T(x,0,t) - T_e)$$

avec :

$$\hat{h}(x,t) = L^{-1} F^{-1} [1/Z(\omega, p)]$$

simplement parce que $\hat{h}(x,t)$ n'est pas une fonction !

(voir sur les exemples suivants)



II – LA PLAQUE PLANE EN REGIME PERMANENT

Avec vitesse uniforme et conduction en x négligée

LE PROBLEME

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{U_0}{a} \frac{\partial T}{\partial x}$$

en $x=0, T=0$

en $y=0, -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varphi_0(x) \quad \text{ou} \quad T = T_0(x)$

en $y \rightarrow \infty, T=0$

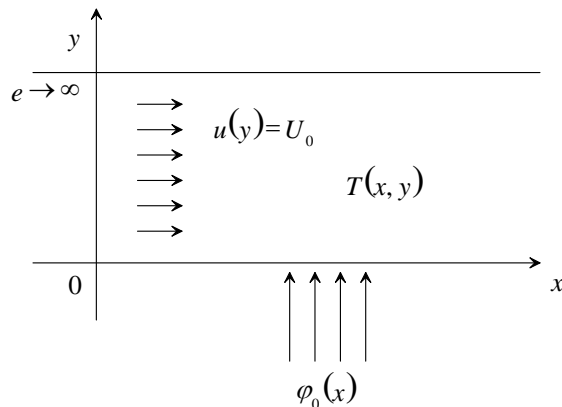


Figure 2

LA SOLUTION

Après transformée de Laplace sur x :

$$\theta(p, y) = A \exp\left(-\sqrt{\frac{U_0 p}{a}} y\right)$$

$$\theta(p, y=0) = Z(p) \phi(p, y=0)$$

avec $Z(p) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{U_0}} \frac{1}{\sqrt{p}}$

et par suite $\hat{r}(x)$

indépendant des conditions aux limites

II – L'APPROCHE CLASSIQUE

Calculons $h(x)$:

- Température imposée uniforme : $T = T_0 \rightarrow \theta = \frac{T_0}{p}$

$$\varphi(x,0) = \lambda \sqrt{\frac{U_0}{a}} \frac{T_0}{\sqrt{\pi \cdot \sqrt{x}}} \rightarrow h(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \sqrt{U_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- Flux imposé uniforme : $\varphi = \varphi_0 \rightarrow \phi = \frac{\varphi_0}{p}$

$$T(x,0) = \frac{2\sqrt{a}}{\lambda \sqrt{U_0} \sqrt{\pi}} \sqrt{x} \varphi_0 \rightarrow h(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \sqrt{U_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$h(x)$ dépend des conditions aux limites

L'extension à un $U(y)$ quelconque ne pose aucun problème si ce n'est la complexité de la solution

En particulier, calculons $h(x)$ pour un flux imposé localisé entre $a < x < b$:

$$\varphi(x) = \varphi_0 [\gamma(x-a) - \gamma(x-b)]$$

$$\rightarrow \phi(p) = \frac{\varphi_0}{p} [\exp(-ap) - \exp(-bp)]$$

$$\text{soit } T(x,0) = \frac{2\sqrt{a}}{\lambda\sqrt{U_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi_0 [\gamma(x-a)\sqrt{x-a} - \gamma(x-b)\sqrt{x-b}]$$

$$\rightarrow h(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \sqrt{U_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\gamma(x-a) - \gamma(x-b)}{\gamma(x-a)\sqrt{x-a} - \gamma(x-b)\sqrt{x-b}}$$



II – LES RESULTATS

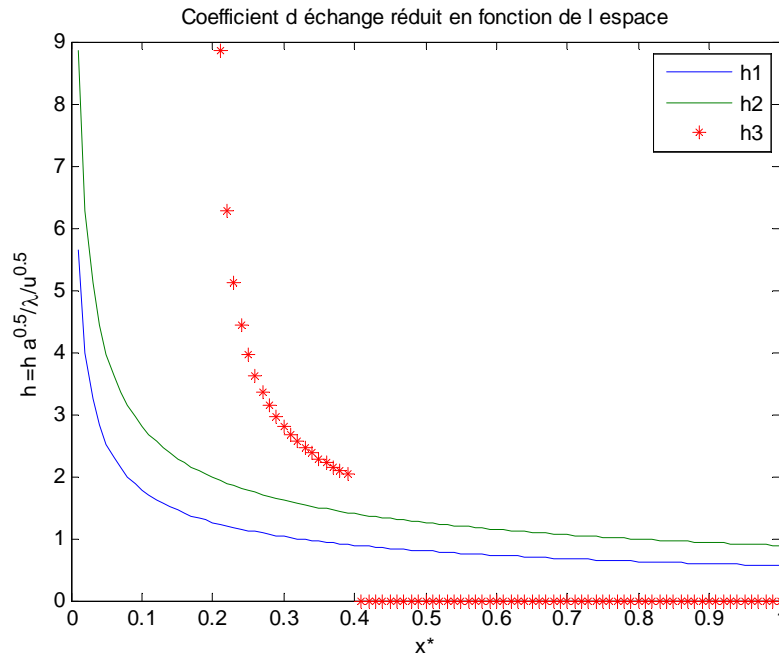


Figure 3

Comparaison $h(x)$ pour

$$\varphi = \varphi_0$$

$$T = T_0$$

$$\varphi = \varphi_0(\gamma(x-a) - \gamma(x-b))$$

La transformée inverse de Laplace de $1/Z(p)$ n'existe pas puisqu'elle est de la forme

$$L^{-1}(k\sqrt{p})$$

ce qui explique l'écriture $T(x,0) = \hat{r}(x) \otimes \varphi(x,0)$ et pas $\varphi(x,0) = \hat{h}(x) \otimes T(x,0)$



III – LA PLAQUE PLANE EN REGIME TRANSITOIRE

LE PROBLEME

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{U_0}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{en } x=0, \quad T=0$$

$$\text{en } y=0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varphi_0(x)$$

$$\text{ou } T = T_0(x)$$

ou ...

$$\text{en } y \rightarrow \infty, \quad T=0$$

$$\text{à } t=0, \quad T=0$$

LA SOLUTION

Après une double transformée de Laplace sur x et t :

$$\theta(p, y, s) = A \exp(-\alpha y)$$

$$\text{avec } \alpha^2 = \frac{U_0}{a} p + \frac{s}{a}$$

$$\theta(p, 0, s) = Z(p, s) \phi(p, 0, s)$$

$$\text{avec } Z(p, s) = \frac{1}{\lambda \alpha}$$

et par suite :

$$\hat{r}(x, t) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{U_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \delta(t - x/U_0)$$

IV – CORRELATIONS DE CHILTON - COLBURN

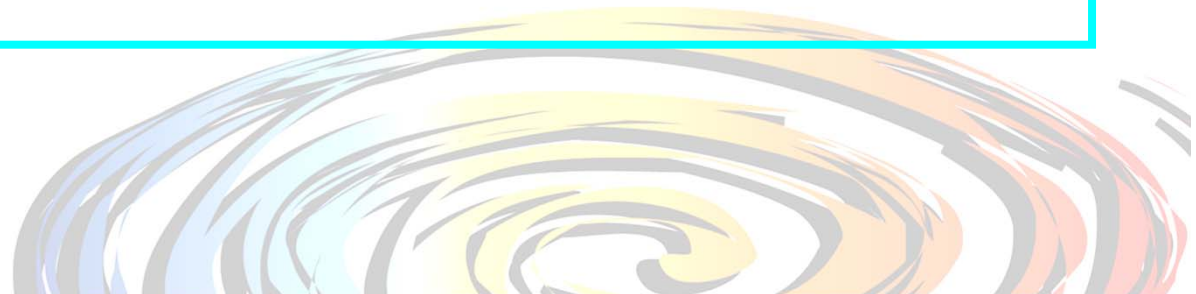
Autre intérêt de la méthode :

Calculer par méthode inverse l'impédance à partir d'une corrélation ($h(x,t)$) obtenue pour une condition aux limites particulière.

La corrélation pouvant être obtenu soit par calcul approché, soit par expérience.

Application : corrélation de Chilton – Colburn

- * On choisit la corrélation pour une condition aux limites,
- * On en déduit la fonction de transfert,
- * On calcule les corrélations pour d'autres conditions aux limites.



- Relations générales entre $h(x)$ et $Z(p)$ pour $T = T_0$ ($h_T(x)$)

$$\begin{cases} \varphi(x) = h_T(x)T_0 \\ \frac{T_0}{p} = Z(p)\phi(p) \end{cases}$$

$$\rightarrow h_T(x) = \frac{\varphi(x)}{T_0} = \frac{L^{-1}(\phi(p))}{T_0} \quad \text{soit} \quad h_T(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{pZ(p)}\right]$$

- Relations générales entre $h(x)$ et $Z(p)$ pour $\varphi = \varphi_0$ ($h_\varphi(x)$)

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_\varphi(x)T(x) \\ \theta(p) = Z(p)\frac{\varphi_0}{p} \end{cases} \rightarrow h_\varphi(x) = \frac{1}{L^{-1}[Z(p)/p]}$$



IV – EN REGIME LAMINAIRE

- Soit la corrélation pour $T = T_0$

$$Nu(x) = 0,332 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$\rightarrow h_T(x) = 0,332 \lambda \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} Pr^{1/3} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

or

$$Z(p) = \frac{1}{pL(h_T(x))} = \frac{1}{0,332 \lambda \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} Pr^{1/3} \sqrt{\pi} \sqrt{p}}$$

soit

$$Z^*(p^*) = \frac{1,7 Pr^{1/6}}{\sqrt{p^*}} \quad \text{avec} \quad Z^* = \rho c U_0 Z \quad \text{et} \quad p^* = \frac{a}{U_0} p$$

cette impédance est indépendante des conditions aux limites



- Recalculons la corrélation pour $\varphi = \varphi_0$

$$\begin{aligned}
 h_{\varphi}(x) &= \frac{1}{L^{-1}[Z(p)/p]} \\
 &= \frac{1}{L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\nu}}{0,332\sqrt{\pi}\lambda\sqrt{U_0}\Pr^{1/3}p\sqrt{p}}\right]} \\
 &= \frac{0,332\pi}{2}\lambda\frac{\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu}}\Pr^{1/3}\frac{1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow Nu(x) = 0,52 \Pr^{1/3} \text{Re}^{1/2}$$

à comparer avec la littérature $Nu(x) = 0,45 \Pr^{1/3} \text{Re}^{1/2}$



- Recalculons la corrélation pour un échelon de flux

$$\varphi = 0 \quad 0 < x < b$$

$$\rightarrow \varphi(x) = \varphi_0 \gamma(x-b)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad x > b$$

$$\text{soit } \phi(p) = \frac{\varphi_0}{p} \exp(-bp)$$

par suite

$$\theta(p) = Z(p) \phi(p)$$

$$= \frac{1,7 \text{Pr}^{1/6} \sqrt{a}}{\lambda \sqrt{U_0} \sqrt{p}} \frac{\varphi_0}{p} \exp(-bp)$$

soit

$$T(x) = \frac{1,7 \text{Pr}^{1/6} \sqrt{a}}{\lambda \sqrt{U_0}} \varphi_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma(x-b) \sqrt{x-b}$$

avec

$$\varphi(x) = h(x) T(x) \rightarrow h(x) = 0,52 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \frac{\gamma(x-b)}{\gamma(x-b) \sqrt{1-b/x}}$$

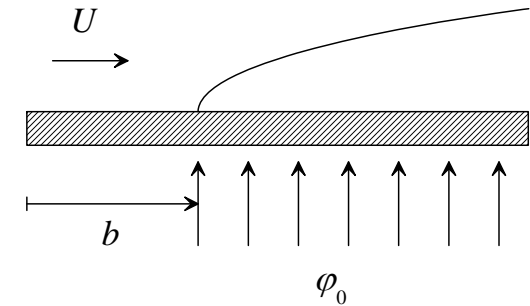


Figure 4

D'où la correction de la forme

$$C = \frac{1}{(1 - b/x)^{1/2}}$$

à comparer dans la littérature avec

$$C = \frac{1}{(1 - (b/x)^{3/4})^{1/3}}$$

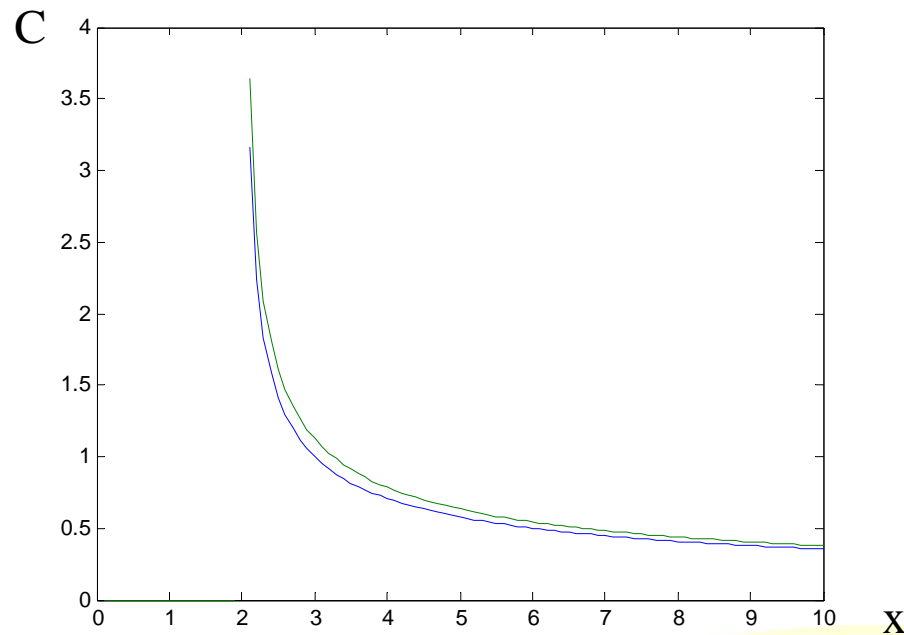
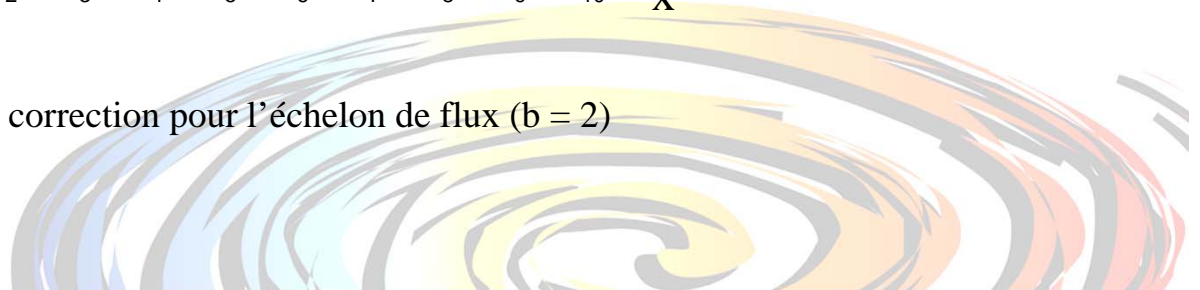


Figure 5 : correction pour l'échelon de flux (b = 2)



IV – EN REGIME TURBULENT

Utilisons la corrélation à température imposée pour calculer l'impédance :

$$Nu(x) = 0,0296 Re^{4/5} Pr^{1/3}$$

en utilisant la même technique, on déduit l'impédance :

$$Z^*(p^*) = \frac{29 Pr^{7/15}}{p^{*1/5}}$$

et par suite la corrélation pour une densité de flux imposé :

$$Nu(x) = 0,0316 Re^{4/5} Pr^{1/3}$$

à comparer avec les résultats de la littérature :

$$Nu(x) = 0,0308 Re^{4/5} Pr^{1/3}$$



V – ECOULEMENT PISTON EN REGIME PERMANENT

LE PROBLEME :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{U_0}{a} \frac{\partial T}{\partial x}$$

en $x = 0$, $T = 0$

en $z = 0$, $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

en $r = r_0$, $\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0$

ou $T = T_0(x)$

ou autre

LA SOLUTION : après transformée de Laplace sur x

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{U_0}{a} p \theta$$

avec $r = 0$, $\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$

soit

$$\theta(p, r) = A.I_0\left(\sqrt{\frac{U_0}{a}} \sqrt{p} r\right)$$

- Le calcul de l'impédance :

L'habitude est de calculer les échanges en utilisant la température moyenne débitante comme référence :

soit : $\theta(r_0) - \theta_m = Z(p) \phi(r_0)$

avec $\theta(r_0) = A I_0(k\sqrt{p})$

$$\theta_m = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \theta(r) r dr = \frac{2A}{k\sqrt{p}} I_1(k\sqrt{p})$$

$$\phi(r_0) = \lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=r_0} = Ak\sqrt{p} I_1(k\sqrt{p})$$

on en déduit :
$$Z(p) = \frac{2r_0}{\lambda} \left[\frac{I_0(k\sqrt{p})}{2k\sqrt{p} I_1(k\sqrt{p})} - \frac{1}{k^2 p} \right]$$

avec
$$k^2 = \frac{U_0}{a} r_0^2$$



- Le calcul de $h_\varphi(x)$

soit $\varphi(x) = \varphi_0 \rightarrow \phi(p) = \frac{\varphi_0}{p}$

par définition $\varphi_0 = h_\varphi(x)[T(x) - T_m(x)]$

et $\theta(p) - \theta_m(p) = Z(p) \frac{\varphi_0}{p}$

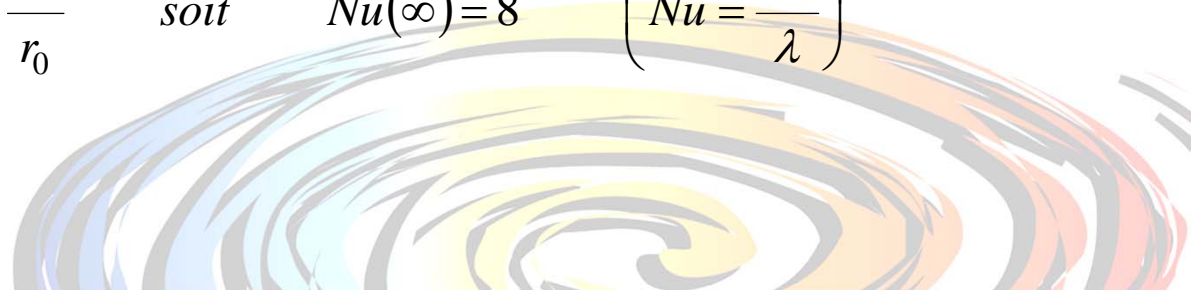
soit $L^{-1}[\theta(p) - \theta_m(p)] = \varphi_0 L^{-1}[Z(p)/p] \rightarrow T(x) - T_m(x) = \varphi_0 L^{-1}[Z(p)/p]$

et par suite $h_\varphi(x) = \frac{1}{L^{-1}[Z(p)/p]}$

La limite pour le régime établi ($x \rightarrow \infty$) est donnée par :

$$h_\varphi(x) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{4\lambda}{r_0} \quad \text{soit} \quad Nu(\infty) = 8 \quad \left(Nu = \frac{hD}{\lambda} \right)$$

$$x \rightarrow \infty \quad p \rightarrow 0$$



- Le calcul de $h_T(x)$

soit : $T(x) = T_0 \rightarrow \theta(p) = \frac{T_0}{p}$

par définition $\varphi(x) = h_T(x)[T_0 - T_m(x)]$

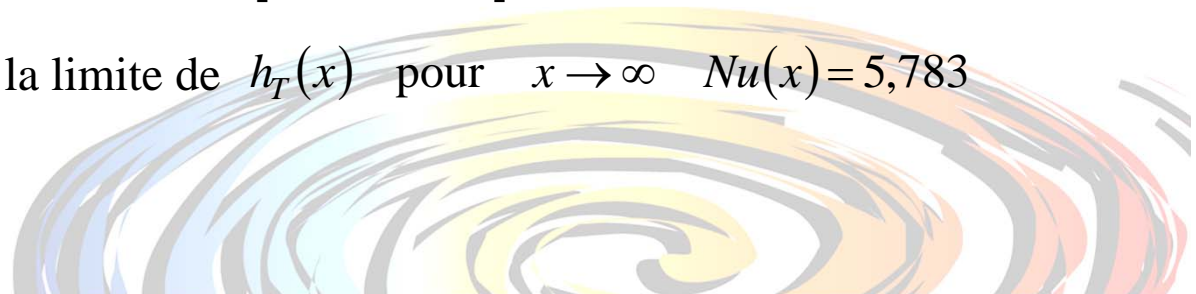
et $\frac{T_0}{p} - \theta_m(p) = Z(p)\phi(p)$

soit : $\varphi(x) = L^{-1}\left[\frac{T_0}{pZ(p)}\right] - L^{-1}\left[\frac{\theta_m(p)}{Z(p)}\right]$

et par suite $h_T(x) = \frac{L^{-1}\left[\frac{T_0}{pZ(p)}\right] - L^{-1}\left[\frac{\theta_m(p)}{Z(p)}\right]}{T_0 - L^{-1}[\theta_m(p)]}$

que l'on peut écrire $h_T(x) = \frac{\lambda}{2r_0} \frac{L^{-1}[U(p)]}{1 - L^{-1}[U(p)/(k^2 p)]}$ avec $U(p) = \frac{2k\sqrt{p}I_1(k\sqrt{p})}{I_0(k\sqrt{p})}$

Numériquement, on obtient la limite de $h_T(x)$ pour $x \rightarrow \infty$ $Nu(x) = 5,783$



LES RESULTATS :

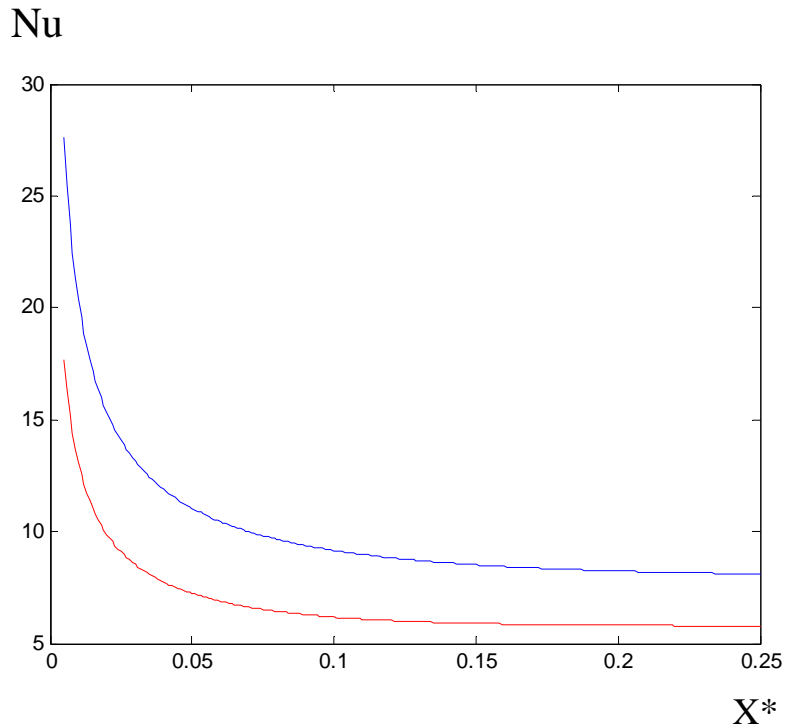


Figure 6 : Ecoulement piston $Nu(x^*)$ avec

$$\varphi = \varphi_0 \quad T = T_0$$

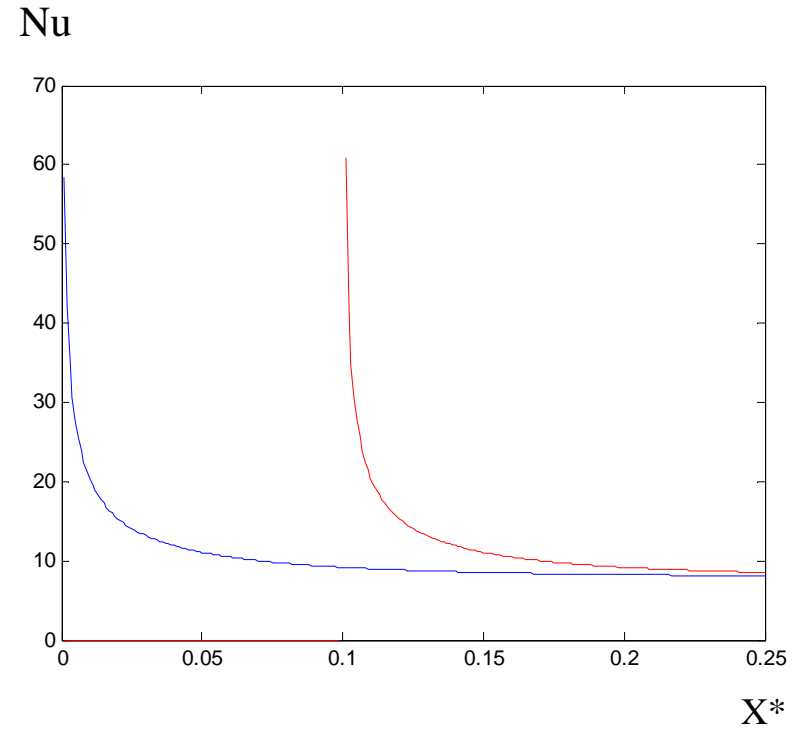
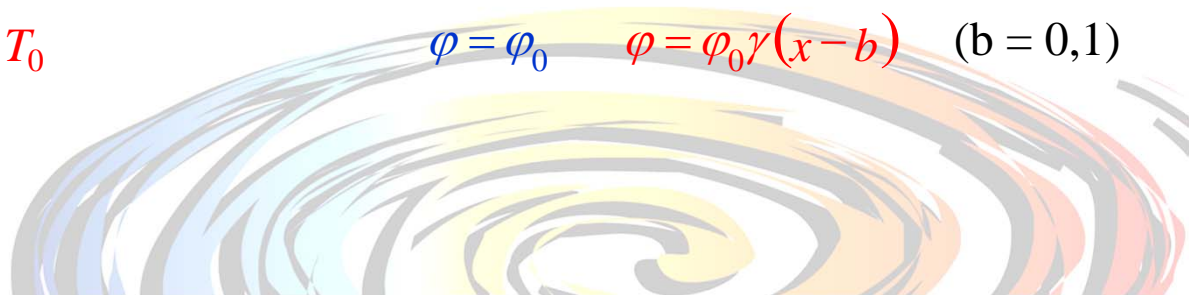


Figure 7 : Ecoulement piston $Nu(x^*)$ avec

$$\varphi = \varphi_0 \quad \varphi = \varphi_0 \gamma(x-b) \quad (b = 0,1)$$



VI – LE PROBLEME DE GRAETZ

La méthode proposée permet de résoudre le problème de GRAETZ quelque soit les conditions imposées à la paroi du tube, en un seul calcul.

- LE PROBLEME :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{U(r)}{a} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{en } x=0, \quad T=0$$

$$\text{en } r=0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\text{en } r=r_0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \varphi_0(x) \quad \text{ou} \quad T = T_0(x) \quad \text{ou autres}$$

avec

$$\frac{U(r)}{U_m} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad T_m(x) = \frac{2}{U_m r_0^2} \int_0^{r_0} U(r) T(r, x) r dr$$



-LA SOLUTION :

après transformée de Laplace, avec

$$r^* = r / r_0$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{d\theta}{dr^*} + \frac{d^2\theta}{dr^{*2}} = \frac{2U_m r_0^2}{a} p(1 - r^{*2})\theta$$

d'où la solution :

$$\theta = A \exp\left(-\frac{1}{2} ik \sqrt{p} r^{*2}\right) {}_1F_1\left[\left(-\frac{1}{4} ik \sqrt{p}\right), 1, ik \sqrt{p} r^{*2}\right]$$

et par définition : $\theta(r_0) - \theta_m = Z(p)\phi(r_0)$ avec $k^2 = \frac{2U_m r_0^2}{a}$

avec

$$\theta_m = 4 \int_0^1 (1 - r^{*2}) r^* \theta dr^* = \frac{4}{k^2 p} \frac{d\theta}{dr^*} \Big|_{r^*=1}$$

$$\phi(r_0) = \lambda \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_0} = \frac{\lambda}{r_0} \frac{d\theta}{dr^*} \Big|_{r^*=1}$$

d'où

$$Z(p) = \frac{2r_0}{\lambda} \left[\frac{\theta|_{r^*=1}}{2 \frac{d\theta}{dr^*} \Big|_{r^*=1}} - \frac{2}{k^2 p} \right]$$

Après calcul de $\theta|_{r^*=1}$ et $\left. \frac{d\theta}{dr^*} \right|_{r^*=1}$ on obtient :

$$Z(p) = \frac{2r_0}{\lambda} \left[\frac{X(p)}{2Y(p)} - \frac{2}{k^2 p} \right]$$

avec:
$$X(p) = {}_1F_1 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} ik\sqrt{p} \right), 1, ik\sqrt{p} \right]$$

$$Y(p) = ik\sqrt{p} {}_1F_1 \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} ik\sqrt{p} \right), 1, ik\sqrt{p} \right] - k\sqrt{p} \left(\frac{1}{2} + i \right) {}_1F_1 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} ik\sqrt{p} \right), 2, ik\sqrt{p} \right]$$

et par suite :
$$\hat{r}(x) = L^{-1}[Z(p)]$$

les coefficients d'échange pour $\varphi = \varphi_0$ et $T = T_0$ (idem écoulement piston)

$$h_\varphi(x) = \frac{1}{L^{-1}[Z(p)/p]} \quad \text{et} \quad \frac{2r_0}{\lambda} h_T(x) = \frac{L^{-1} \left[\frac{2Y(p)}{pX(p)} \right]}{1 - L^{-1} \left[\frac{4}{k^2 p^2} \frac{Y(p)}{X(p)} \right]}$$

Remarque :

Le calcul des transformées inverses de Laplace est particulièrement difficile à effectuer (la solution apparaissant sous forme d'une fonction d'une variable complexe).

La solution est d'utiliser la méthode des résidus.

Calcul de $h_\varphi(x)$ pour un régime établi $x \rightarrow \infty$

$$h_\varphi(x)_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{L^{-1}[Z(p)/p]_{p \rightarrow 0}} = \frac{1}{Z(p)_{p \rightarrow 0}} = \frac{24 \lambda}{11 r_0} \quad \text{soit} \quad Nu_\varphi(\infty) = \frac{48}{11}$$

La limite est obtenue en utilisant le développement asymptotique de θ soit :

$$\theta(p, r) = 1 + \frac{k^2 p}{4} r^2 - \left(\frac{1}{16} k^2 p - \frac{1}{64} k^4 p^2 \right) r^4 - \left(\frac{5}{576} k^4 p^2 - \dots \right) r^6 + \left(\frac{1}{1024} k^4 p^2 + \dots \right) r^8 + \dots$$



Calcul de $\hat{r}(x)$

$$\hat{r}(x^*) = L^{-1}[Z(p^*)] \quad \text{avec} \quad p^* = k^2 p \quad \text{et} \quad x^* = x/k^2$$

$$\text{soit :} \quad Z(p^*) = \left(\frac{X(p^*)}{2Y(p^*)} - \frac{2}{p^*} \right) \frac{2r_0}{\lambda}$$

$$\text{avec } -\gamma_i \text{ racines de } Y=0 \quad \text{et} \quad B_i \quad \text{tel que} \quad B_i = \frac{X(-\gamma_i)}{Y'(-\gamma_i)}$$

$$\text{on obtient} \quad \frac{X}{Y} = \frac{B_0}{p^*} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{p^* + \gamma_i}$$

$$\text{avec} \quad B_0 = 4 \quad \left(\text{limite de} \frac{X(p)}{Y'(p)} \text{ pour } p \rightarrow 0 \right)$$

$$B_1 = 5,1031 \quad \gamma_1 = 25,6796$$

$$B_2 = 5,8080 \quad \gamma_2 = 83,8618$$

$$B_3 = 6,357 \quad \gamma_3 = 174,1675$$

$$\text{soit} \quad \frac{\lambda}{2r_0} \hat{r}(x^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} B_i \exp(-\gamma_i x^*)$$

Calcul de $h_\varphi(x)$: densité de flux uniforme

$$h_\varphi(x) = \frac{1}{L^{-1}[Z(p)/p]}$$

en utilisant le calcul précédent :

$$Nu_\varphi(x^*) = \frac{2}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{\gamma_i} \exp(-\gamma_i x^*)}$$

en utilisant la limite pour $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{\gamma_i} = \frac{11}{24}$$

soit
$$Nu_\varphi(x^*) = \frac{2}{\frac{11}{24} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{\gamma_i} \exp(-\gamma_i x^*)}$$



Calcul de $h_T(x)$: température uniforme imposée

$$Nu_T(x^*) = \frac{L^{-1} \left[\frac{2Y(p^*)}{p^* X(p^*)} \right]}{1 - L^{-1} \left[\frac{4}{p^{*2}} \frac{Y(p^*)}{X(p^*)} \right]}$$

avec $-\alpha_i$ racines de $X = 0$ et $A_i = \frac{Y(-\alpha_i)}{-\alpha_i X'(-\alpha_i)}$

On obtient $\frac{Y}{p^* X} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{p^* + \alpha_i}$ Soit $Nu_T(x^*) = \frac{2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp(-\alpha_i x^*)}{1 - 4 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i} \exp(-\alpha_i x^*) \right]}$

Or $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i} = L^{-1} \left[\frac{Y(p^*)}{p^{*2} X(p^*)} \right] = \frac{Y(p^*)}{p^* X(p^*)} = \frac{1}{4}$
 $x \rightarrow \infty \quad p \rightarrow 0$

Soit $Nu_T(x^*) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp(-\alpha_i x^*)}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i} \exp(-\alpha_i x^*)}$ en particulier $\alpha_1 = 7,3136$

On retrouve pour $x \rightarrow \infty$ $Nu_T(x) = \frac{\alpha_1}{2} = 3,6568$

LES RESULTATS :

Figure 8 : écoulement laminaire Nu(x)

$$\varphi = \varphi_0$$

$$T = T_0$$

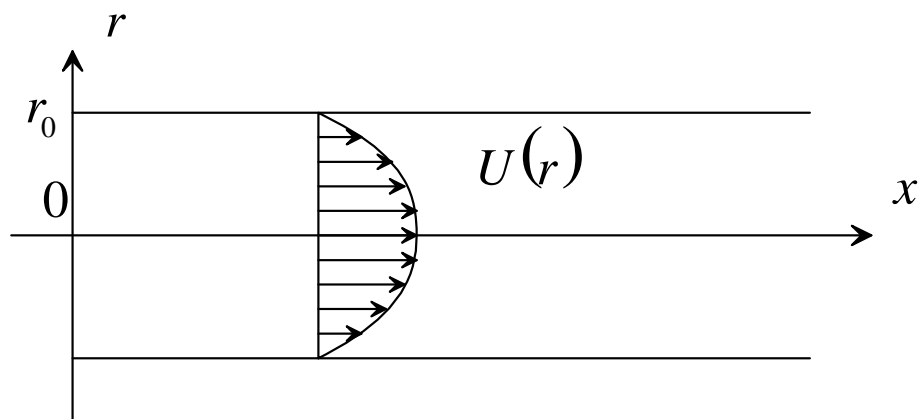
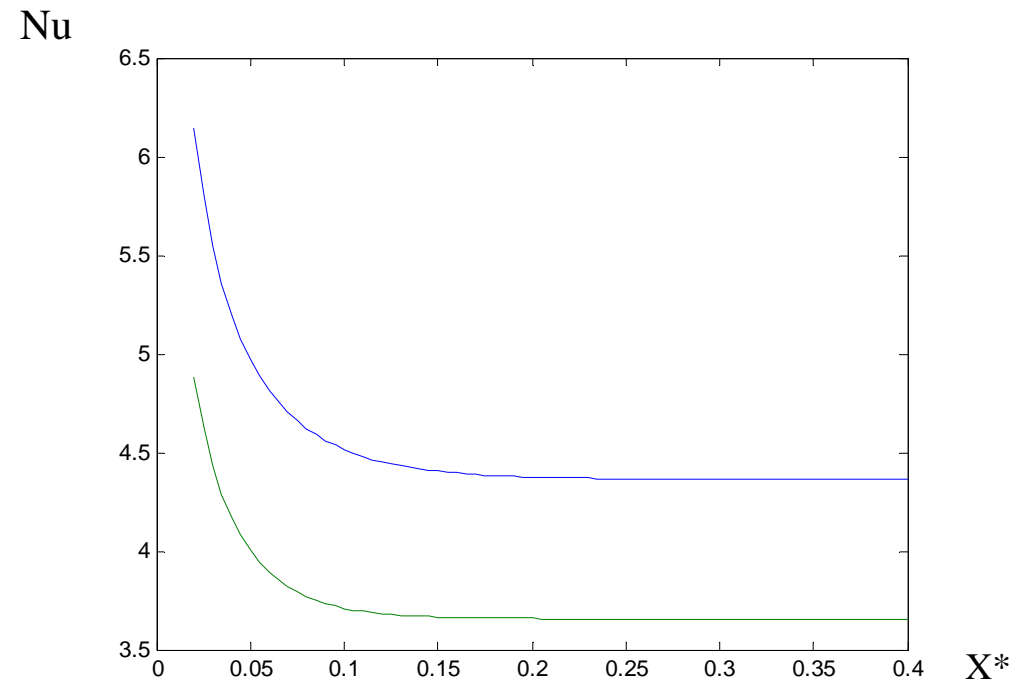


Figure 9 : Ecoulement laminaire, profil de vitesse établi parabolique



VII – PRISE EN COMPTE DE LA DIFFUSION AXIALE

Il est facile de prendre en compte la diffusion axiale ; par exemple sur le problème d'écoulement piston :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{u_0}{a} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{en } x = 0 \quad , \quad T = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{en } r = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\text{en } r = r_0 \quad , \quad \text{conditions quelconques}$$

après transformée de Laplace sur x

$$\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{d^2\theta}{dr^2} = \left(\frac{U_0}{a} - p \right) p \theta$$

dont la solution est : $\theta = AI_0(\omega r)$ avec $\omega^2 = \left(\frac{U_0}{a} - p \right) p$

$$\text{Soit } Z(p) = \frac{2r_0}{\lambda} \left[\frac{I_0(\omega r_0)}{2\omega r_0 I_1(\omega r_0)} - \frac{1}{\omega^2 r_0^2} \right]$$

VIII – ECOULEMENT PISTON EN REGIME TRANSITOIRE

Reprenons le problème de l'écoulement piston :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{u(r)}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec $en\ x = 0$, $T = 0$

$en\ r = 0$, $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

$à\ t = 0$, $T = 0$

$en\ r = r_0$, conditions quelconques

après une double transformée de Laplace sur x et sur t :

$$\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{d^2\theta}{dr^2} = \left(\frac{u(r)}{a} p + \frac{s}{a} \right) \theta$$

Pour $u(r) = U_0$, la solution est : $\theta(p, s) = A I_0 \left(\sqrt{\frac{U_0}{a} p + \frac{1}{a} s} r \right)$

Et par conséquent :

$$Z(p, s) = \frac{2r_0}{\lambda} \left[\frac{I_0(\sqrt{k^2 p + \alpha^2 s})}{2\sqrt{k^2 p + \alpha^2 s} I_1(\sqrt{k^2 p + \alpha^2 s})} - \frac{1}{k^2 p + \alpha^2 s} \right]$$

avec $k^2 = \frac{U_0}{a} r_0^2$ et $\alpha^2 = \frac{r_0^2}{a}$

et donc $\hat{r}(x, t) = L^{-1} L^{-1}[Z(p, s)]$

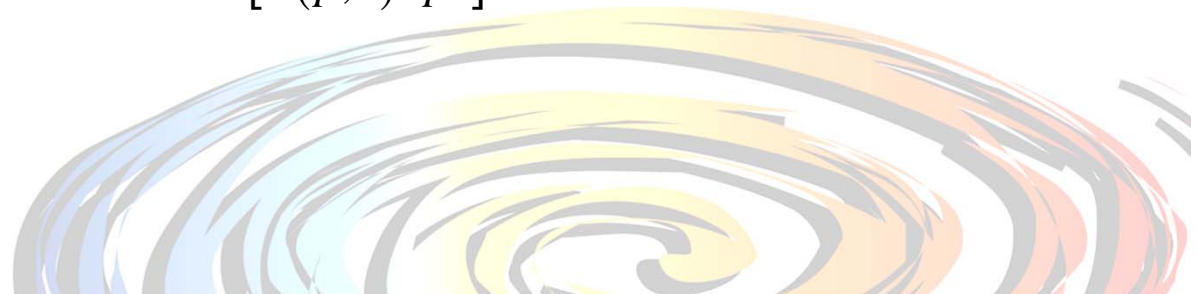
A titre d'exemple ; calculons $h(x, t)$ pour un flux uniforme en espace et en temps :

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et } t > 0$$

$$\rightarrow \phi(p, s) = \frac{\varphi_0}{p s}$$

et par conséquent

$$h(x, t) = \frac{1}{L^{-1} L^{-1}[Z(p, s) / ps]}$$



RESULTATS :

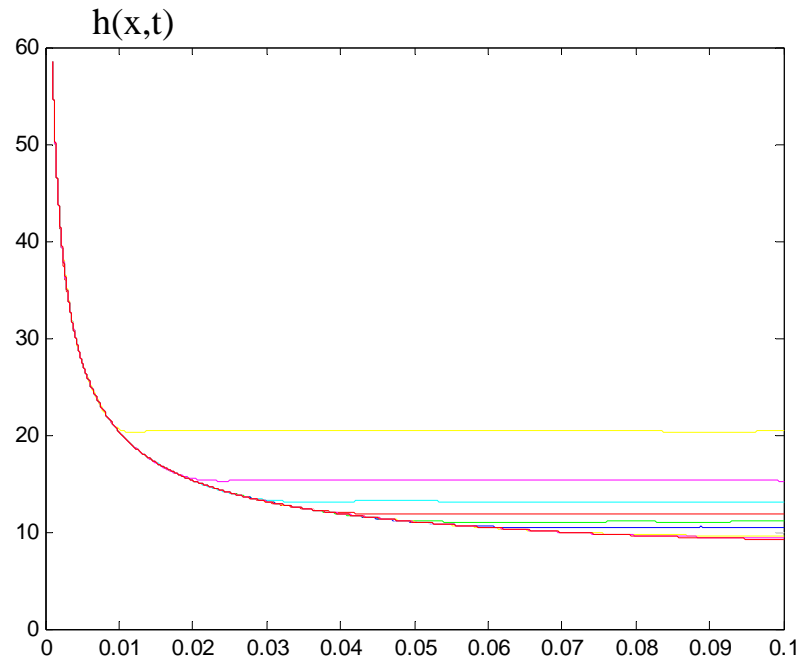


Figure 10

$$\varphi = \varphi_0 \quad (\text{uniforme})$$

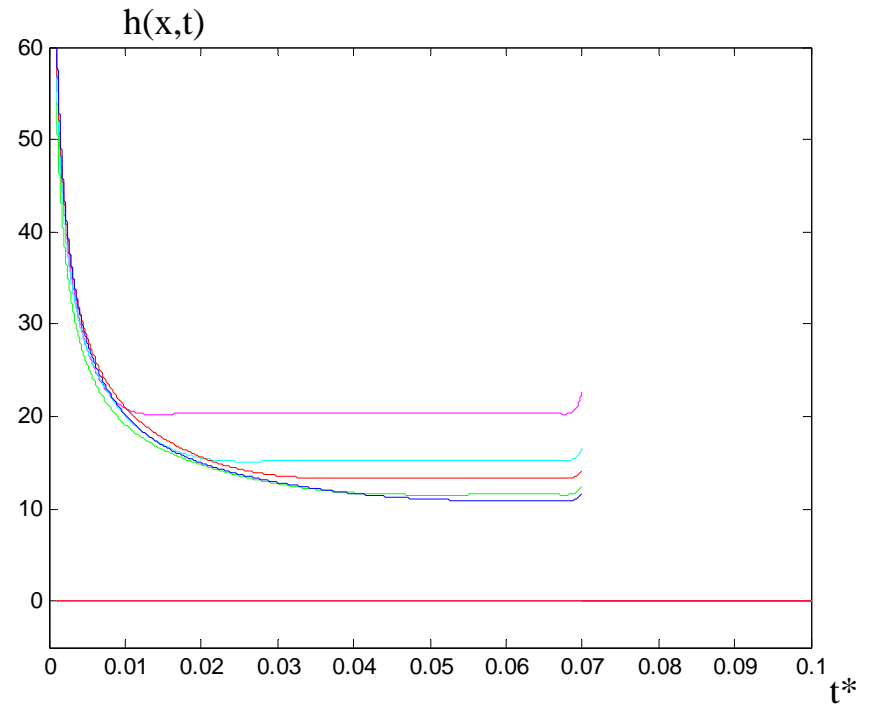
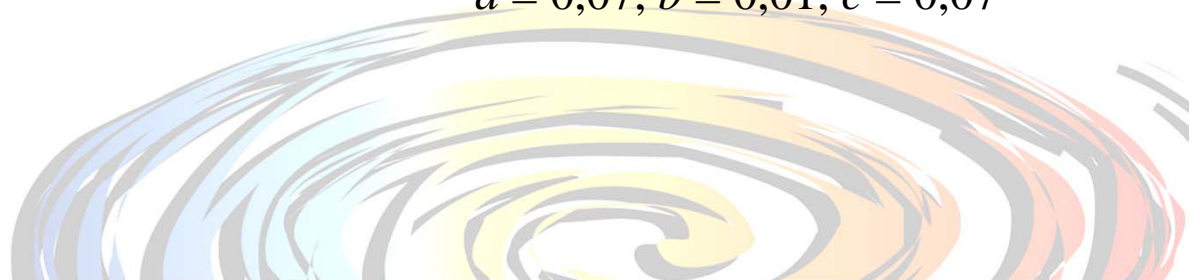


Figure 11

$$\varphi = \varphi_0 [\gamma(x-b) - \gamma(x-c)] [1 - \gamma(t-a)]$$

$$a = 0,07, b = 0,01, c = 0,07$$



IX – APPLICATION

L'approche proposée est particulièrement intéressante lorsqu'il y a interaction entre le fluide et la paroi (en microfluidique par exemple). Dans ce cas; **la répartition du flux à l'interface est totalement inconnue** et seule l'approche proposée permet de résoudre le problème. Dans le cas de géométrie complexe, là où le calcul numérique est obligatoire il faudra utiliser le produit de convolution ; dans le cas général :

$$T_p(x, y, t) - T_{ref}(x, y, t) = \hat{r}(x, y, t) \otimes \varphi(x, y, t)$$

Si la géométrie est simple et qu'il est possible d'effectuer des transformations intégrales, on pourra utiliser l'impédance généralisée ; après transformation :

$$\theta_p(\alpha, y, p) - \theta_{ref}(\alpha, y, p) = Z(\alpha, p) \phi(\alpha, y, p)$$



LE PROBLEME :

Une plaque plane soumise à un flux localisé sur une face et un écoulement piston sur l'autre face

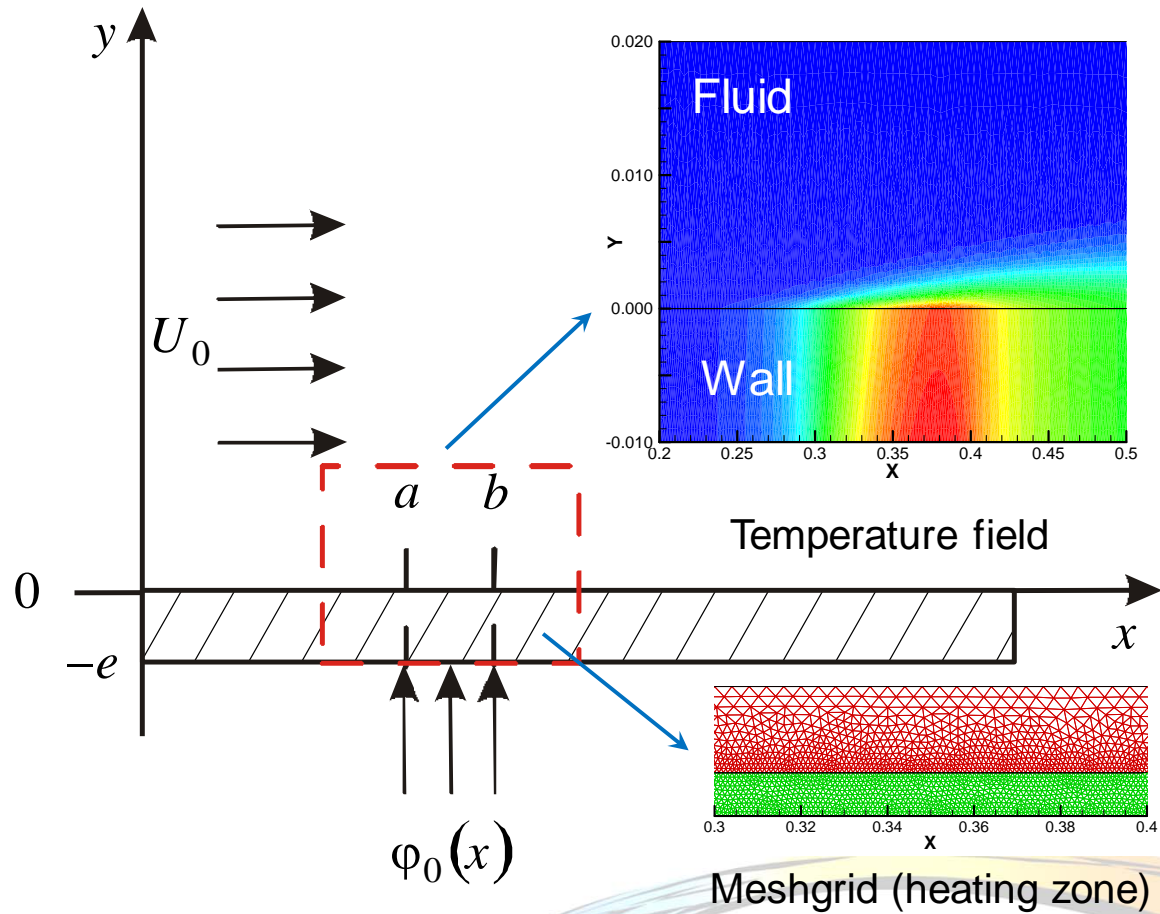


Figure 12

LES EQUATIONS :

Une plaque plane soumise à un flux localisé sur une face et un écoulement piston sur l'autre face

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad -e < y < 0$$

$$x = 0 \quad T = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$y = -e \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varphi_0(x)$$

$$y = 0 \quad T(x) = \hat{r}(x) \otimes \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\text{avec} \quad \varphi_0(x) = \varphi_0 \quad a < x < b$$

$$= 0 \quad x < a \quad \text{et} \quad x > b$$

$$\text{soit} \quad \varphi_0(x) = \gamma(x-a) - \gamma(x-b)$$



LES SOLUTIONS :

- 1) Solution numérique du problème complet fluide + paroi par éléments finis (Flex PDE)
- 2) Solution analytique en remplaçant le fluide par son impédance $Z(p)$
- 3) Solution numérique en remplaçant le fluide par une corrélation classique $h(x)$

$$\text{en } y = 0 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = h(x)T(x)$$

$$\text{avec } h_T(x) = \lambda_f \sqrt{\frac{U_0}{a_f}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{température uniforme})$$

$$\text{ou } h_\varphi(x) = \lambda_f \sqrt{\frac{U_0}{a_f}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{flux uniforme})$$

$$\text{ou } h(x) = \lambda_f \sqrt{\frac{U_0}{a_f}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\gamma(x-a) - \gamma(x-b)}{\gamma(x-a)\sqrt{x-a} - \gamma(x-b)\sqrt{x-b}}$$

(créneau de flux entre $x = a$ et $x = b$)

SOLUTION ANALYTIQUE :

Après transformée de Laplace sur x :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + p^2 \theta = 0$$

$$\text{en } y = -e \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \phi_0(p)$$

$$\text{en } y = 0 \quad \theta(p) = Z(p) \left(-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad \text{avec } Z(p) = \frac{1}{\lambda_f} \sqrt{\frac{a_f}{U_0}} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\text{d'où} \quad \theta(p, y) = A \cos(py) + B \sin(py)$$

$$\text{avec} \quad B = -\frac{A}{Z(p)\lambda p} \quad \text{et} \quad A = \frac{Z(p)\phi(p)}{\cos(pe) - \lambda Z(p)p \sin(pe)}$$

$$\text{avec} \quad \phi(p) = \frac{1}{P} [\exp(-ap) - \exp(-bp)]$$

$$\text{et par suite} \quad \theta(p, 0) = A \quad \text{et} \quad \theta(p, -e) = A \left[\cos(pe) + \frac{1}{Z(p)\lambda p} \sin(pe) \right]$$

$$\text{et} \quad T(x, y) = L^{-1}[\theta(x, y)]$$

RESULTATS:

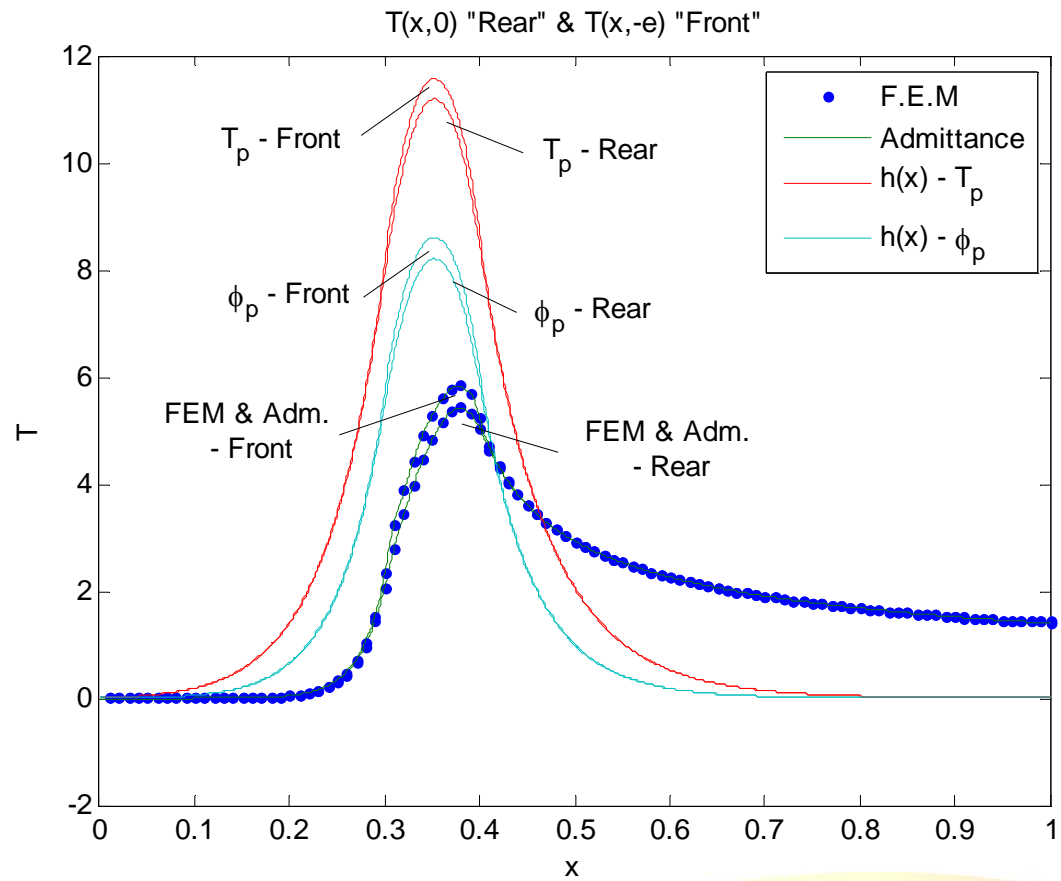
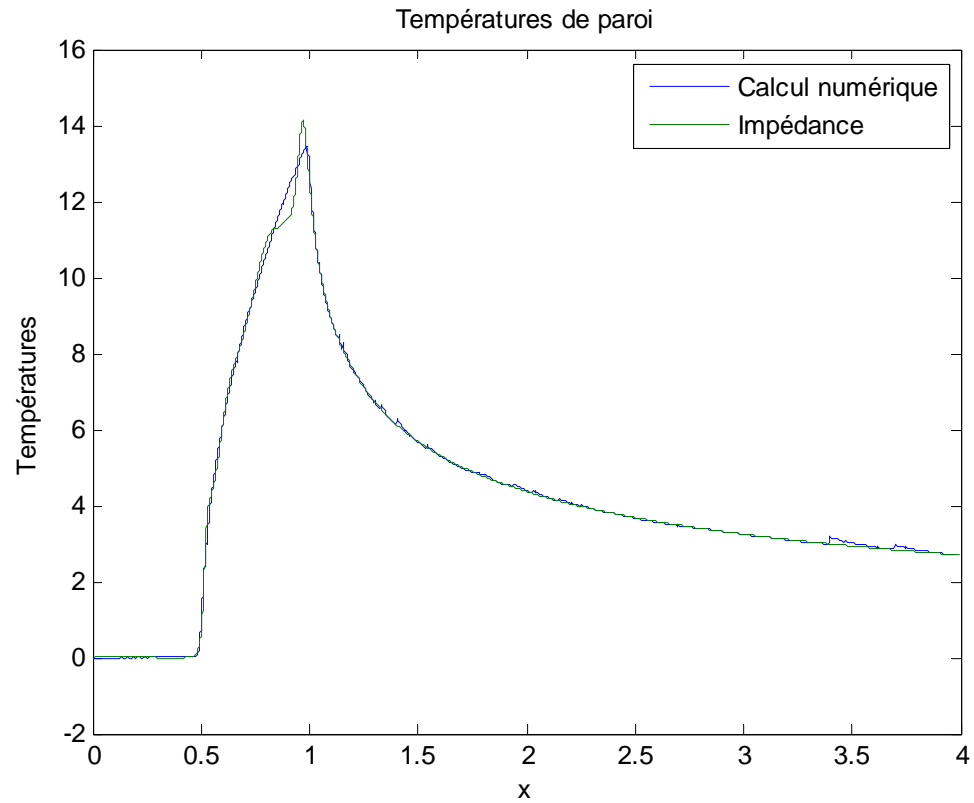


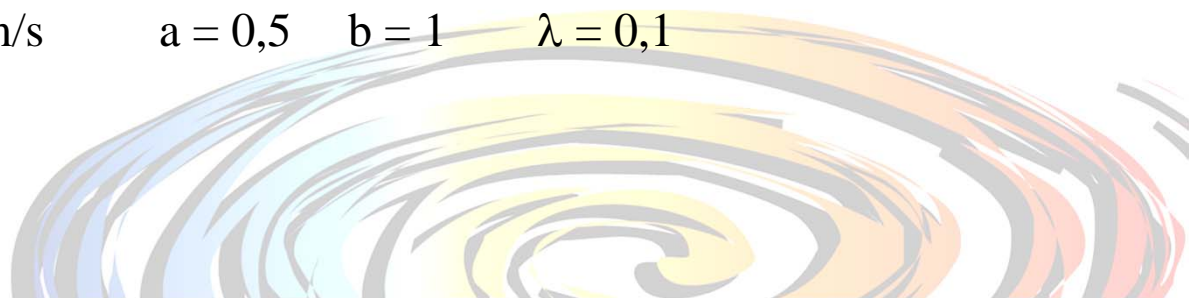
Figure 13

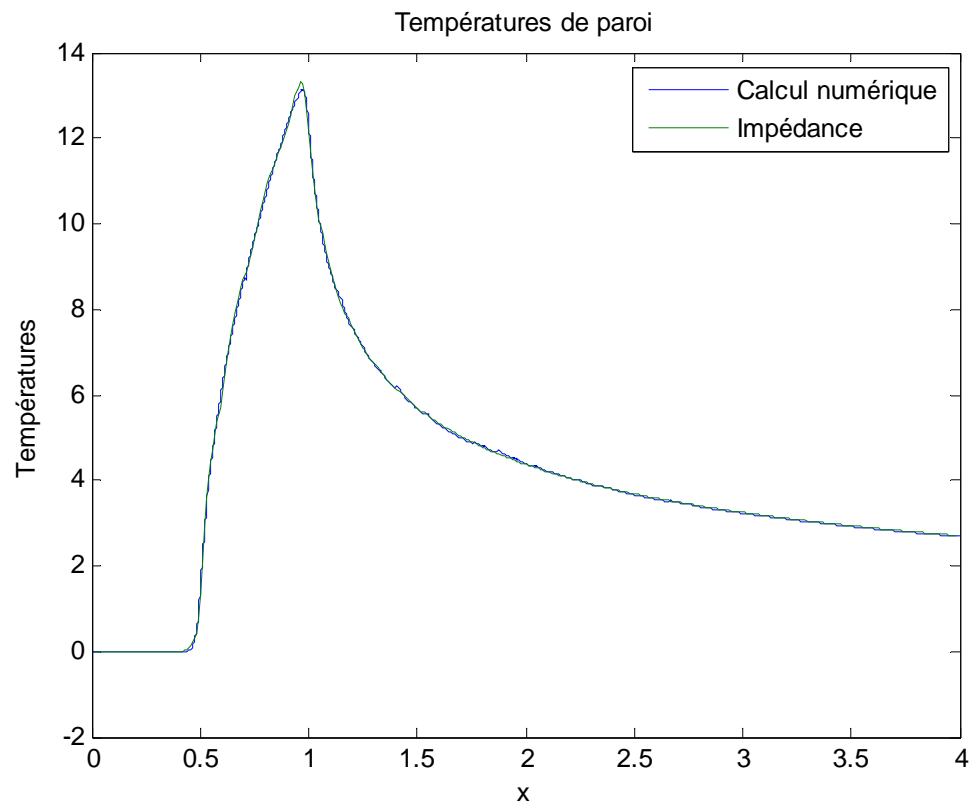




Comparaison produit de convolution-numérique

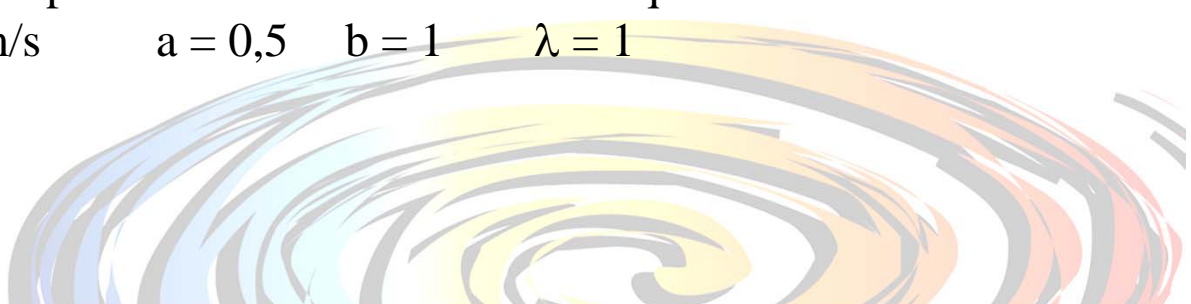
Air $v = 1\text{m/s}$ $a = 0,5$ $b = 1$ $\lambda = 0,1$

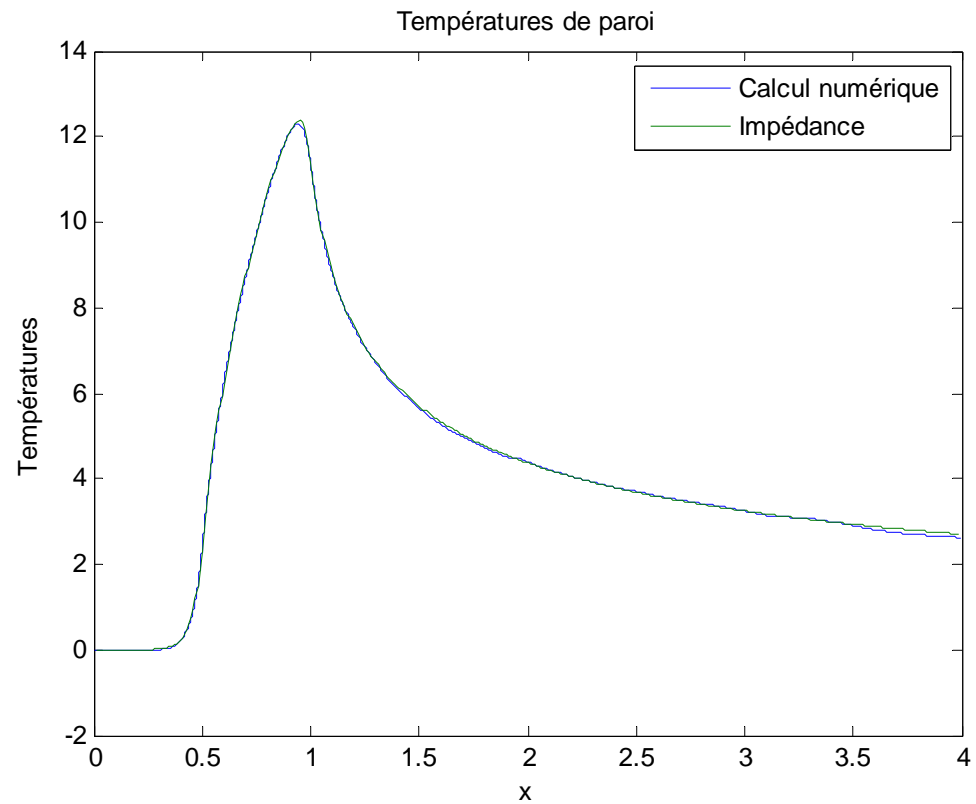




Comparaison produit de convolution-numérique

Air $v = 1\text{m/s}$ $a = 0,5$ $b = 1$ $\lambda = 1$

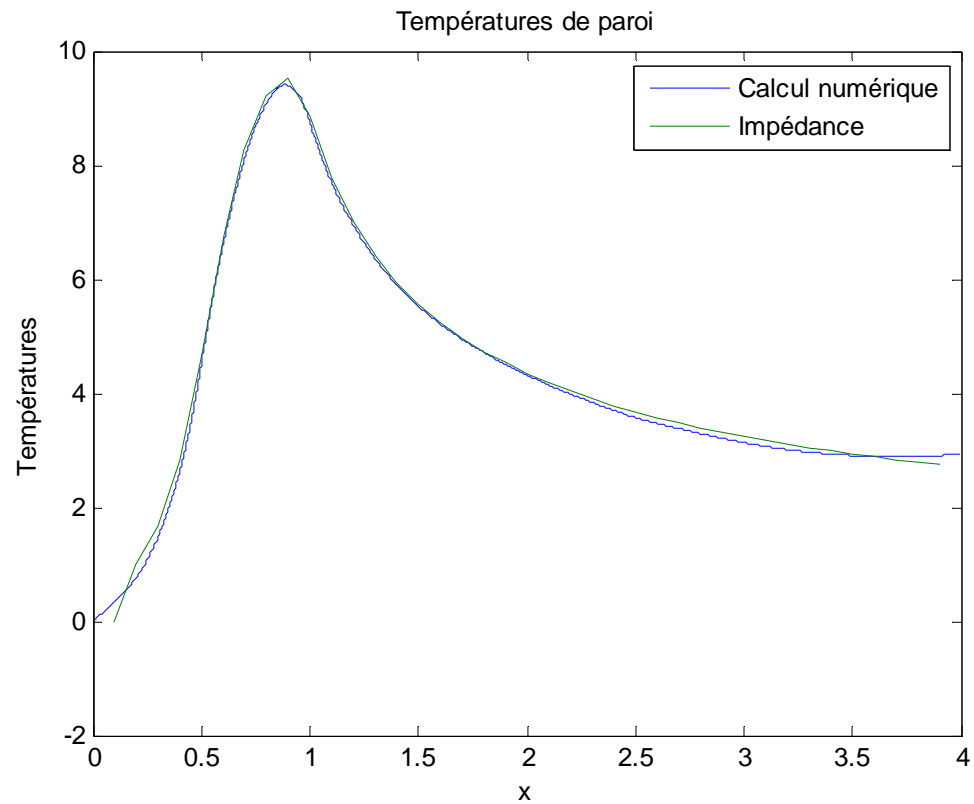




Comparaison produit de convolution-numérique

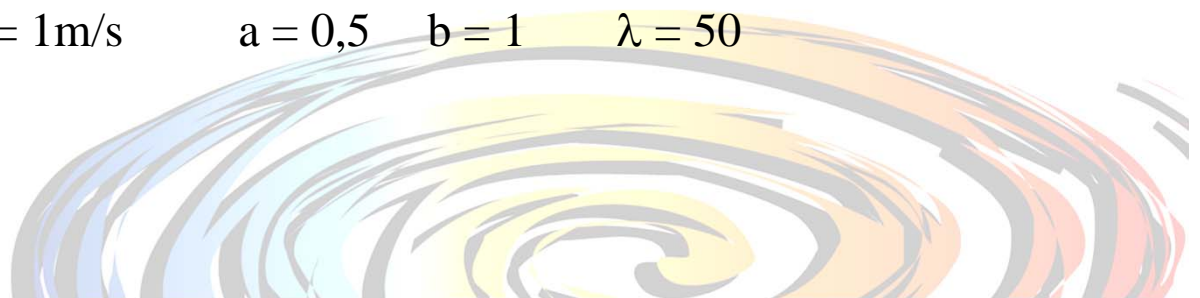
Air $v = 1\text{m/s}$ $a = 0,5$ $b = 1$ $\lambda = 5$



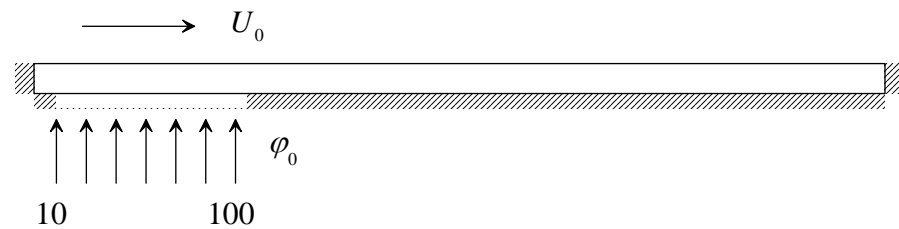
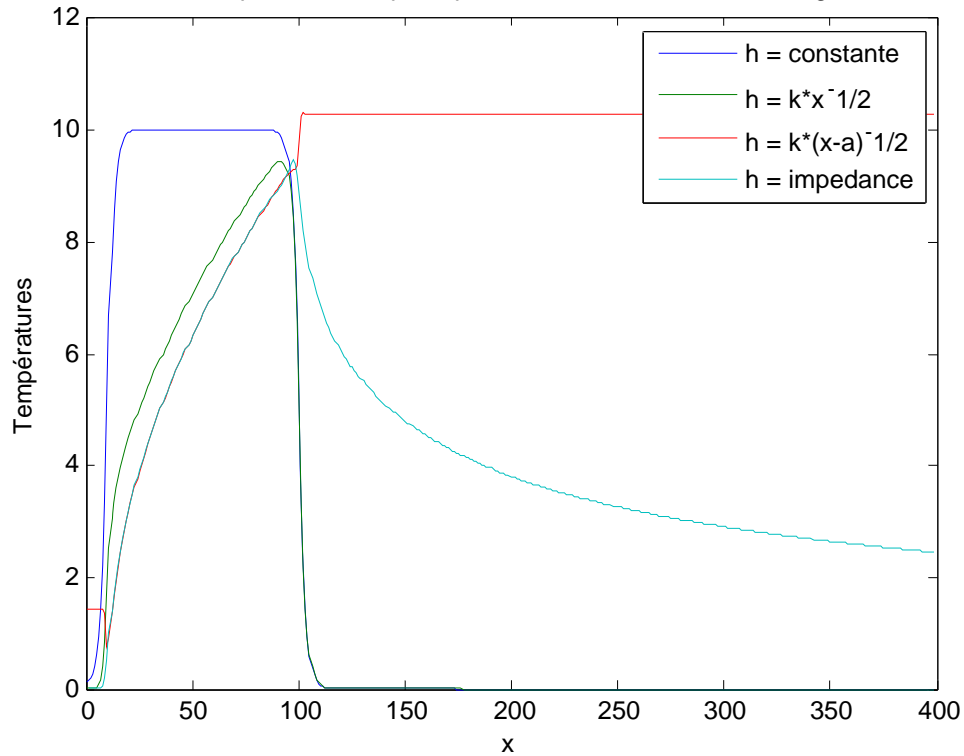


Comparaison produit de convolution-numérique

Air $v = 1\text{m/s}$ $a = 0,5$ $b = 1$ $\lambda = 50$



Températures de paroi pour divers coefficients d'échange



$$U_0 = 0,35 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = 0,6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$a = 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$e = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\lambda_p = 50 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

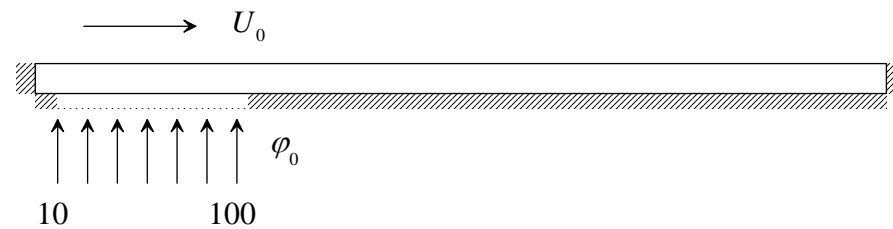
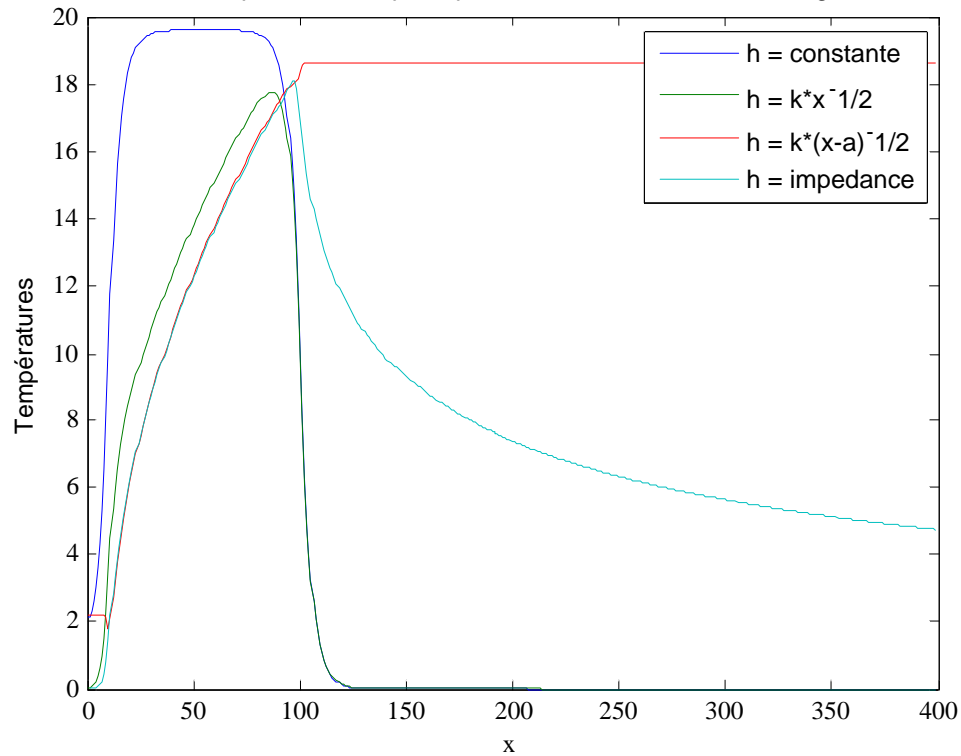
$$\varphi_0 = 10\,000 \text{ Wm}^{-2}$$

$$a = 10 * e$$

$$b = 100 * e$$



Températures de paroi pour divers coefficients d'échange



$$U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = 0,026 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$a = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$e = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\lambda_p = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

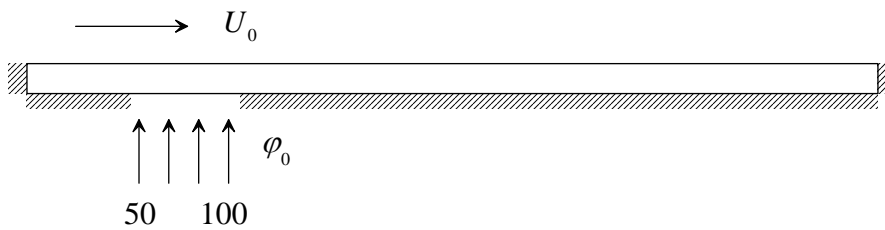
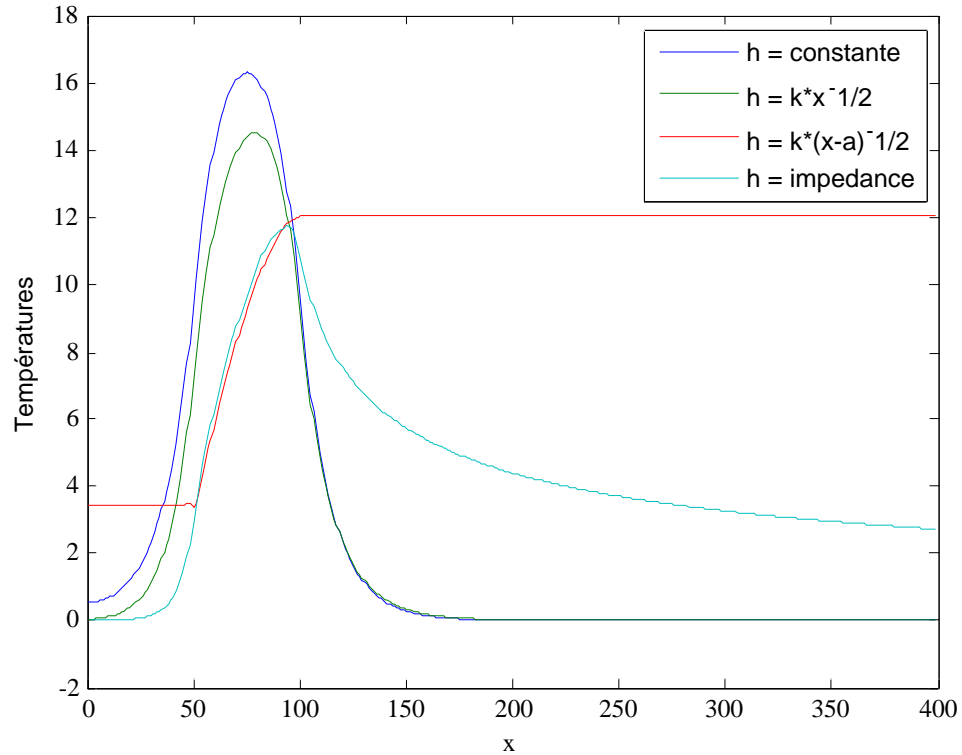
$$\varphi_0 = 100 \text{ Wm}^{-2}$$

$$a = 10 * e$$

$$b = 100 * e$$



Températures de paroi pour divers coefficients d'échange



$$U_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = 0,026 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$a = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$e = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\lambda_p = 10 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$\phi_0 = 100 \text{ Wm}^{-2}$$

$$a = 50 * e$$

$$b = 100 * e$$



CONCLUSION

$$Z(\omega, p)$$

$$T_p(x, y, t) - T_{ref}(x, y, t) = \hat{r}(x, y, t) \otimes \varphi(x, y, t)$$

