

# Etude numérique de la convection mixte lors de l'écoulement d'un fluide de Bingham entre deux plans parallèles.

Fetta DANANE, Ahlem BOUDIAF, Youb Khaled BENKAHLA\*, Nabila LABSI

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés  
 Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
 BP 32 El Alia, Bab Ezzouar 16111, Alger  
 \*(auteur correspondant : youbenkahla@yahoo.fr)

**Résumé** - Le présent travail porte sur l'étude numérique de l'écoulement d'un fluide non newtonien obéissant au modèle rhéologique de Bingham entre deux plans parallèles horizontaux, siège d'un transfert thermique par mode de convection naturelle, mixte et forcée. Les deux plans sont maintenus à une température pariétale constante et uniforme. L'effet du nombre de Richardson, traduisant le rapport des forces de poussées aux forces d'inertie, sur les caractéristiques hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement sera étudié.

## Nomenclature

|       |   |                       |  |
|-------|---|-----------------------|--|
| $Bn$  | nombre de Bingham, $= \tau_0 L / \mu_0 V_0$                           | $w$                   | vitesse transversale, $m s^{-1}$                         |
| $C_p$ | chaleur spécifique du fluide, $J kg^{-1} K^{-1}$                      | $W$                   | vitesse transversale réduite, $= w/U_0$                  |
| $e$   | entrefer, $m$   | $x$                   | coordonnée longitudinale, $m$                            |
| $Gr$  | nombre de Grashof, $= g \beta \rho_0^2 (T_w - T_0) L^3 / \mu_0^2$     | $X$                   | coordonnée longitudinale réduite, $= x/L$                |
| $k$   | conductivité thermique, $W m^{-2} K^{-1}$                             | $y$                   | coordonnée verticale, $m$                                |
| $l$   | largeur de la conduite, $m$   | $Y$                   | coordonnée verticale réduite, $y/L$                      |
| $L$   | longueur de la conduite, $m$  | $z$                   | coordonnée transversale horizontale, $m$                 |
| $M$   | paramètre dans l'équation (6)   | $Z$                   | coordonnée transversale réduite, $z/L$                   |
| $Nu$  | nombre de Nusselt, $= -(1/\phi_m) (\partial\phi/\partial Y) _{Y=0.5}$ | <i>Symboles grecs</i> |  |
| $p$   | pression statique du fluide, $Pa$                                     | $\beta$               | coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$            |
| $P$   | pression adimensionnelle, $= p/\rho V_0^2$                            | $\dot{\gamma}$        | taux de cisaillement, $s^{-1}$                           |
| $Pr$  | nombre de Prandtl, $= C_p \mu_0 / k$                                  | $\eta$                | viscosité effective, $kg m^{-1} s^{-1}$                  |
| $Re$  | nombre de Reynolds, $= \rho V_0 L / \mu_0$                            | $\eta_{app}$          | viscosité apparente adimensionnelle,                     |
| $Ri$  | nombre de Richardson, $= Gr/Re^2$                                     | $\eta_{eff}$          | viscosité effective adimensionnelle,                     |
| $T$   | température, $K$  | $\mu_0$               | viscosité plastique, $kg m^{-1} s^{-1}$                  |
| $T_0$ | température du fluide à l'entrée, $K$                                 | $\rho_0$              | masse volumique du fluide à $T_0$ , $kg m^{-3}$          |
| $u$   | vitesse axiale, $m s^{-1}$  | $\tau_0$              | contrainte seuil de cisaillement, $Pa$                   |
| $U$   | vitesse axiale réduite, $= u/U_0$                                     | $\phi$                | température réduite, $= (T - T_w)/(T_0 - T_w)$           |
| $U_0$ | vitesse moyenne du fluide, $m s^{-1}$                                 | $\phi_m$              | température moyenne réduite, $= (T_m - T_w)/(T_0 - T_w)$ |
| $v$   | vitesse transversale, $m s^{-1}$                                      | <i>Indices</i>        |  |
| $V$   | vitesse transversale réduite, $= v/U_0$                               | $0$                   | entrée   |
|       |   | $w$                   | paroi  |

## 1. Introduction

L'étude des problèmes impliquant le transfert thermique et l'écoulement des fluides non newtoniens a fait l'objet de nombreuses recherches, en raison de l'utilisation fréquente de ces fluides dans différentes applications industrielles. Citons à titre d'exemple les boues de forage

dans l'industrie pétrolière, les jus de fruits et les pâtes dans l'agroalimentaire et les polymères dans la pétrochimie. Ainsi, les phénomènes de convection sont rencontrés dans diverses applications industrielles pratiques telles que le transport des fluides par pipelines, les capteurs solaires, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des composants électroniques et les procédés chimiques et nucléaires. Plusieurs travaux ont traité de l'écoulement en mode de convection mixte des fluides newtoniens circulant dans des conduites horizontales ou inclinées [1,2]. Cependant, peu de recherches se sont intéressées au cas des fluides non newtoniens en général, et des fluides de Bingham en particulier. Parmi ces travaux, citons à titre d'exemple les études analytique et numérique menées par Bayazitoglu [3,4], sur l'écoulement en mode de convection mixte du fluide de Bingham entre deux plans parallèles verticaux, maintenus à températures constantes.

L'objectif du présent travail est d'analyser, par le biais d'une méthode numérique basée sur les volumes finis, l'effet du nombre de Richardson sur les caractéristiques hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement d'un fluide de Bingham incompressible. Ce dernier circule entre deux plans parallèles horizontaux maintenus à une même température pariétale uniforme. Les propriétés physiques et rhéologiques du fluide sont supposées constantes et uniformes, à l'exception de la masse volumique dans l'expression des forces de poussée d'Archimède où l'on adopte l'hypothèse de Boussinesq. Cette hypothèse stipule que la masse volumique dans le terme de poussée varie seulement en fonction de la température mais pas en fonction de la pression (variation négligeable) :  $\rho = \rho_0(1 \pm \beta \Delta T)$ , avec  $\beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$

## 2. Mise en équations du problème physique

Considérons l'écoulement longitudinal, laminaire et stationnaire d'un fluide incompressible de Bingham entre deux plans parallèles, horizontaux de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$  maintenue à température pariétale uniforme  $T_w$ . Ce fluide est soumis à un transfert thermique en mode de convection forcée, mixte et naturelle. Les équations générales adimensionnelles qui régissent l'écoulement sont les suivantes :

*Equation de continuité :*

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} \right] = 0 \quad (1)$$

*Equations de l'impulsion :* suivant X, Y et Z respectivement

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] \\ + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right] \quad (2)$$

$$\left[ U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} \right] = -\frac{\partial P^*}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right] \\ + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \right] - \frac{Gr}{Re^2} \phi \quad (3)$$

$$\left[ U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] = -\frac{\partial P^*}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right] \quad (4)$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right]$$

**Equation de l'énergie :**

$$\left[ U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} + W \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right] = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \right] \quad (5)$$

La loi constitutive proposée par Papanastasiou pour décrire le comportement du fluide de Bingham est utilisée et ce, dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région correspondant aux faibles vitesses de cisaillement [5] :

$$\eta_{eff} = 1 + \frac{Bn}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-M \dot{\gamma})] \quad (6)$$

M étant un paramètre adimensionnel qui représente la croissance de l'exponentielle ( $M = mU_0/L$ ). Min et al. [5] ainsi que Mitsoulis [6] conseillent de prendre  $m = 1000$  s.

À l'entrée de la conduite  $U = \phi = 1$  et  $V = W = 0$ , et à la sortie  $\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = 0$ , sur les deux parois  $U = V = W = \phi = 0$  et  $\forall Z$  sur tout l'axe de symétrie,  $\frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial Z} = W = 0$

Ce qui réduit notre système d'équations en un système à deux dimensions.

Les équations de conservation sont discrétisées en utilisant un code numérique basé sur la méthode des volumes finis, proposée par Patankar [7]. Ces équations, mises sous la forme d'une équation algébrique, sont résolues par le biais de l'algorithme SIMPLER.

### 3. Validation du code de calcul

| Bn   | Nu             |                 | Ecart relatif (%) |
|------|----------------|-----------------|-------------------|
|      | Présente étude | Lin et Shah [8] |                   |
| 0    | 7,550          | 7,541           | 0,12              |
| 0,25 | 7,658          | 7,619           | 0,51              |
| 1,25 | 7,781          | 7,884           | 1,31              |
| 2,50 | 8,271          | 8,115           | 1,92              |
| 5    | 8,392          | 8,401           | 0,11              |

Tableau 1 : Comparaison entre les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt de la présente étude avec celles de Lin et Shah [8] pour différentes valeurs du nombre de Bingham.

La validation de notre code de calcul est entreprise après comparaison entre les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt local pour différents nombres de Bingham, calculées

dans notre cas entre deux plans parallèles en mode de convection forcée pure, avec celles issues de l'étude de Lin et Shah [8]. Cette comparaison est illustrée à travers le tableau ci-dessus. Il y apparaît un écart relatif ne dépassant pas 2%, ce qui permet de valider notre code de calcul.

## 4. Résultats et interprétation

### 4.1. Evolution axiale du nombre de Nusselt

Les courbes caractéristiques des variations longitudinales du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Richardson et représentées sur les figures 1 et 2, mettent en relief l'existence de trois zones distinctes. La première et dernière zones, situées respectivement à l'entrée ( $X \leq 0,5$ ) et loin en aval de l'entrée ( $X \geq 200$ ), sont caractérisées par la superposition des trois courbes, mettant en évidence la prédominance de la convection forcée par rapport à la naturelle. Au niveau de la zone intermédiaire en revanche ( $0,5 < X < 250$ ), les variations du nombre de Richardson se répercutent sur l'allure des courbes.

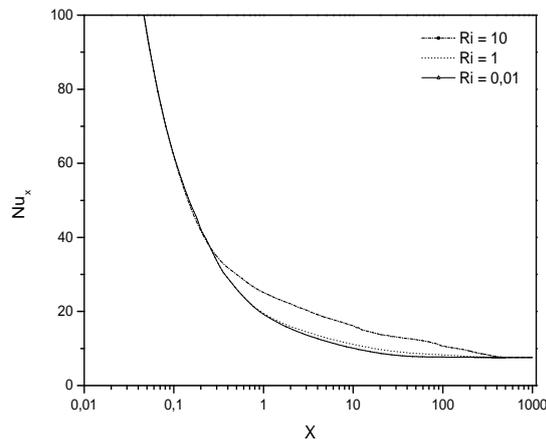


Figure 1 : Effet du nombre de Richardson sur le Nusselt dans le cas du chauffage.  
 $Bn = 2 ; Re = 100 ; Pr = 10$ .

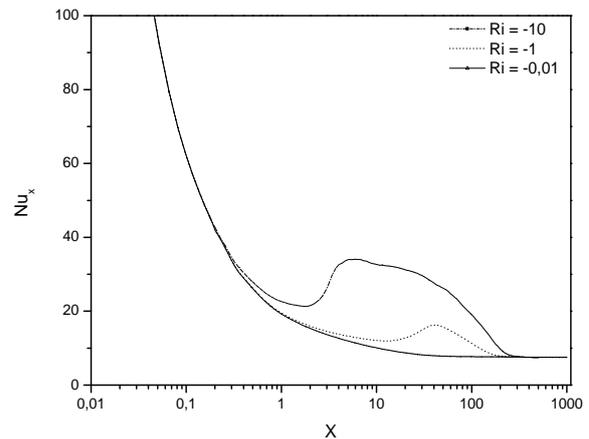


Figure 2 : Effet du nombre de Richardson sur le Nusselt dans le cas du refroidissement.  
 $Bn = 2 ; Re = 100 ; Pr = 10$ .

En effet, en augmentant le nombre de Richardson on assiste à une amélioration du transfert thermique par rapport à un mode de convection forcée pure ( $Ri = 0,01$ ), beaucoup plus prononcée dans le cas de refroidissement. Cette amélioration est due à la naissance des courants secondaires suite au chauffage ou au refroidissement pariétal des couches fluides adjacentes à la paroi provoquant ainsi l'agitation de la masse fluide. Aux grandes distances longitudinales (lorsque  $X$  augmente), le régime s'établit ce qui se traduit par une indépendance du nombre de Nusselt vis-à-vis du nombre de Richardson pour un nombre de Bingham donné.

### 4.2. Profils de vitesse longitudinale

Les figures 3 et 4 illustrent l'effet de la variation du nombre de Richardson, sur les profils de vitesse longitudinale (pour tout plan transversal XOY) à la position  $X = 10$  de la conduite et ce pour les cas de chauffage et de refroidissement respectivement. Nous remarquons une symétrie par rapport aux plans XOZ et XOY pour le cas de la convection forcée pure ( $Ri = 0,01$ ). Celle-ci n'est plus conservée lorsque la convection naturelle est prise en compte. En effet, pour le cas de chauffage, le fluide chauffé par la paroi inférieure de la conduite s'élève, suivant le sens horaire, vers le haut (sous l'effet de l'intensification des courants secondaires

induits par l'augmentation du nombre de Richardson), puis est entraîné par l'écoulement principal. En revanche, pour le cas de refroidissement, le fluide froid descendant, suivant le sens horaire, depuis les régions supérieures gênant ainsi la progression de l'écoulement principal (dans la direction longitudinale).

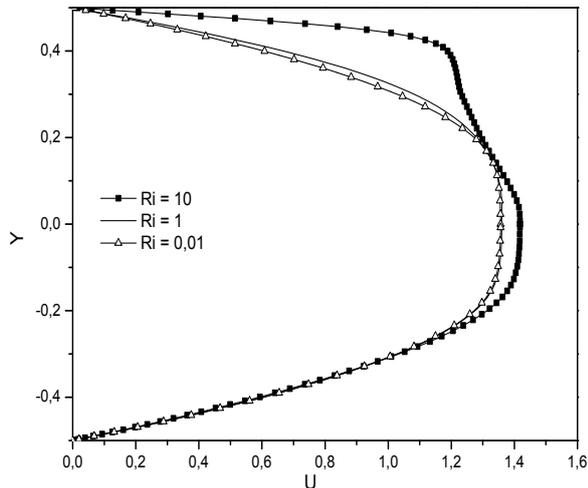


Figure 3 : Effet du nombre de Richardson sur les profils de vitesse longitudinale, cas du chauffage.  
 $X = 10 ; Re = 100 ; Pr = 10.$

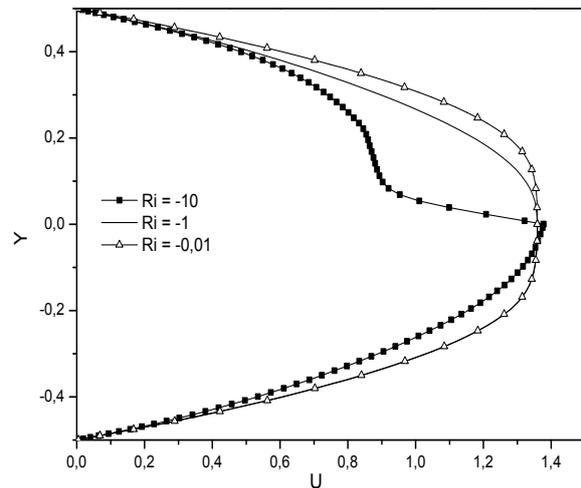


Figure 4 : Effet du nombre de Richardson sur les vitesses longitudinales, cas du refroidissement.  
 $X = 10 ; Re = 100 ; Pr = 10.$

### 4.3. Profils de température

Les figures 5 et 6 montrent l'évolution des profils de température (pour tout plan transversal XOY) pour la position longitudinale  $X = 10$  de la conduite.

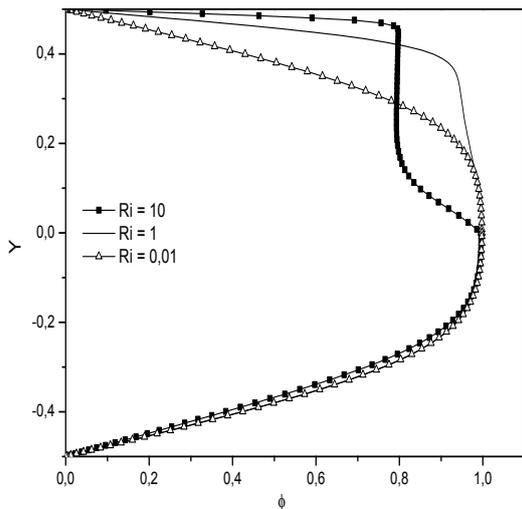


Figure 5 : Effet du nombre de Richardson sur les profils de température, cas du chauffage.  
 $X = 10 ; Bn = 2 ; Re = 100 ; Pr = 10.$

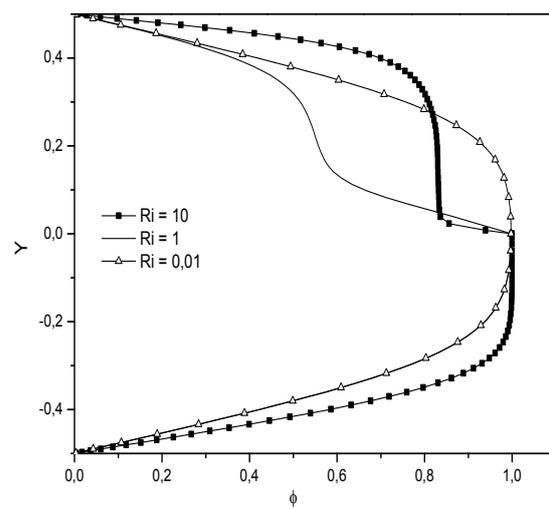


Figure 6 : Effet du nombre de Richardson sur les profils de température, cas du refroidissement.  
 $X = 10 ; Bn = 2 ; Re = 100 ; Pr = 10.$

Les profils obtenus dans le cas de la convection forcée pure sont symétriques. Alors que pour les profils correspondant à  $Ri = 1$  et  $10$ , nous remarquons que la cette symétrie est détruite et les profils subissent une distorsion. En effet, sous l'effet de la convection naturelle, dans le cas de chauffage, le fluide se trouvant au voisinage des parois inférieures voit sa température augmenter et s'élève alors continuellement vers la partie supérieure de la conduite créant ainsi une accumulation d'une grande quantité de fluide chaud au niveau du plan supérieur. En revanche, dans le cas du refroidissement, le fluide froid de la région centrale se déplace vers le bas dans un mouvement descendant. Dans ce cas, nous assistons alors à un mouvement descendant du fluide dans le sens horaire.

## 5. Conclusion

L'étude de l'écoulement laminaire longitudinal, en mode de convection mixte d'un fluide incompressible de Bingham est entreprise dans la présente étude. Cet écoulement a lieu entre deux plans parallèles horizontaux maintenus à température uniforme. Les résultats obtenus pour les différents modes de convection montrent que le transfert thermique est très affecté par les variations du nombre de Richardson. En effet, nous remarquons une déformation des courbes du nombre de Nusselt et cela en augmentant le nombre de Richardson pour le cas du chauffage ainsi que le refroidissement au niveau de la zone intermédiaire.

L'analyse des champs thermique et dynamique montre une distorsion des profils de température et de vitesse donnant lieu à une distribution spatiale différente de celle correspondant à l'écoulement en mode de convection forcée. La nature de cette distorsion dépend fortement du nombre de Richardson et voie de conséquence, de l'importance de la convection naturelle ( $Ri = 10$ ) par rapport à la convection forcée. D'autre part, l'augmentation de l'intensité de la convection naturelle améliore le transfert thermique.

## Références

- [1] J. Orfi, N. Galanis, C. T. Nguyen, Développement simultané hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire dans un tube incliné en régime de convection mixte. *Rev. Gén. Therm.*, 36 (1997), 83-92.
- [2] WEI-MON YAN, Transport phenomena of developing laminar mixed convection heat and mass transfer in inclined rectangular ducts. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38-15 (1994), 2905-2914.
- [3] M. M. Salah El-Din, Effect of thermal and mass buoyancy forces on the development of laminar mixed convection between vertical parallel plates with uniform wall heat and mass fluxes. *Int. J. Therm. Sci.*, 42 (2003), 447-453.
- [4] Y. Bayazitoglu, P. R. Paslay, P. Cernocky, Laminar Bingham fluid flow between vertical parallel plates. *Int. J. Therm. Sci.*, 46 (2007), 349-357.
- [5] T. Min, H. G. Choi, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-II. Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997), 3689-3701.
- [6] E. Mitsoulis, On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects. *Chem. Eng. Sci.*, 59 (2004), 789-800.
- [7] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw, New York (1980).
- [8] T. Lin, V. L. Shah, Numerical solution of heat transfer to yield power-law fluids flowing in the entrance region, *Proc. Inter. Heat Transfer Conf.* (Toronto), 5 (1978), 317-321.