

Étude numérique du couplage convection naturelle rayonnement volumique par la méthode de Boltzmann sur réseau (MRT-LBM).

Fayçal MOUFEKKIR ¹, Mohammed Amine MOUSSAOUI ^{1*}, Ahmed MEZRHAB ¹, Hassan NAJI ^{2,3}, Denis LEMONNIER ⁴

¹ Laboratoire de Mécanique & Energétique, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Mohammed 1^{er}, 60000 Oujda, Maroc.

² Laboratoire Génie Civil et géo-Environnement (LGCgE - EA 4525)

³ Université Lille Nord de France, F-59000 Lille/Université d'Artois/FSA, F-62400 Béthune, France.

⁴ Institut Pprime, CNRS-ENSMA-Univ. Poitiers, ENSMA, BP 40109, 86961 Futuroscope Chasseneuil cedex, France.

* auteur correspondant : mouamine1@yahoo.fr

Résumé - Dans cette communication, nous présentons une modélisation numérique du transfert de chaleur par convection naturelle en présence de rayonnement volumique dans une cavité carrée dont les deux parois verticales sont différentiellement chauffées contenant un milieu gris semi transparent diffus. Un schéma hybride combinant la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM-MRT) pour la détermination des vitesses et la méthode aux différences finies (FDM) pour les températures, a été adopté. Ce schéma est couplé avec la méthode des ordonnées discrètes (DOM) pour le calcul de l'information radiative nécessaire à l'équation d'énergie. On s'intéresse à l'influence du nombre de Rayleigh Ra, de l'émissivité des parois ε_i et du nombre de Planck Pl sur l'écoulement et sur la distribution de la température.

Nomenclature

G	accélération de la pesanteur, ms^{-2}	X,Y	coordonnées cartésiennes
I	luminance, $Wm^{-2}sr^{-1}$		adimensionnelles, $x/L, y/L$
I_0	luminance de corps noir, $Wm^{-2}sr^{-1}$	α	diffusivité thermique, m^2s^{-1}
K	conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$	β	coefficient d'expansion, K^{-1}
L	longueur de la cavité, m	ε, ξ	émissivité
Nu_T	nombre de Nusselt total moyen	$\mu,$	direction cosines
Pl	nombre de Planck	ν	viscosité cinématique, m^2s^{-1}
Pr	nombre de Prandtl, ν/α	ρ	densité du fluide, kgm^{-3}
qr	flux de chaleur radiatif, Wm^{-2}	σ	constante de Stefan-Boltzmann, $Wm^{-2}K^{-4}$
Qr	densité du flux radiatif adimensionnelle, $= q_r/4\sigma T_0^4$	τ	épaisseur optique
Ra	nombre de Rayleigh, $= g\beta(T_h - T_c)L^3/\nu\alpha$	θ	température adimensionnelle, $= (T - T_0)/(T_h - T_c)$
T	température, K	Θ	température de référence, $= T_0/(T_h - T_c)$
T_0	température moyenne, $(T_h + T_c)/2$, K	ω	albedo
u, v	composantes de la vitesse, ms^{-1} adimensionnelles, $U = uL/\alpha, V = vL/\alpha$	\vec{n}	vecteur direction, $= \mu\vec{i} + \xi\vec{j}$
x, y	coordonnées cartésiennes, m	Indices	
		c	froid
		h	chaud
		w	parois

1. Introduction

L'étude du couplage convection naturelle-rayonnement volumique continue de susciter beaucoup d'intérêt et demeure un sujet d'actualité pour les recherches scientifiques en raison de ses diverses applications dans l'industrie telles que la conception des fours, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des composants électroniques, les réacteurs nucléaires, l'efficacité énergétique dans les bâtiments, la métallurgie et les capteurs solaires, etc. Pour cette raison, plusieurs études ont été menées [1-3].

Lauriat [1] a étudié le phénomène du rayonnement volumique en présence de la convection naturelle en considérant le milieu comme un gaz gris dans une cavité bidimensionnelle verticale. La méthode P1 des harmoniques sphériques a été utilisée pour la partie radiative. Le même problème a été modélisé par Yucel et *al.* [2]. Dans ce papier, nous reprenons la même configuration que celle étudiée par Lauriat [1] et Yucel et *al.* [2], et nous proposons de l'étudier numériquement à l'aide de la méthode hybride MRT-FDM couplée à la méthode DOM. L'objectif principal ici est de prouver la capacité du code développé à modéliser ce type de problème.

2. Description du problème et méthode numérique

Le modèle physique considéré dans cette étude est une cavité carrée contenant un milieu homogène, gris, absorbant, émettant et non diffusant; les parois horizontales sont adiabatiques tandis que les deux parois verticales gauche et droite sont maintenues à des températures T_c (froide) et T_h (chaude), respectivement (*figure 1*).

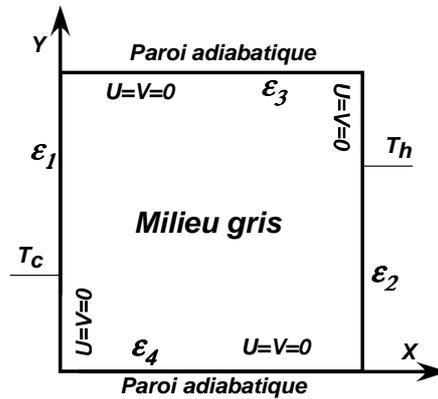


Figure 1: Configuration étudiée

2.1. Méthode de Boltzmann sur réseau

Vu le caractère bidimensionnel du problème, nous considérons un modèle à neuf vitesses discrètes sur une grille carrée de pas $\delta x = \delta y = 1$ appelé modèle *D2Q9* (*figure 2*). Les particules fluides se déplacent d'un noeud de la grille vers un noeud voisin avec des vitesses discrètes qui sont données par:

$$e_i = \begin{cases} (0, 0), & i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c, & i = 1-4 \\ (\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4])\sqrt{2}c, & i = 5-8 \end{cases} \quad (1)$$

où $c = \delta x / \delta t$, avec pour pas de temps $\delta t = 1$.

L'équation d'évolution temporelle de l'état du fluide est donnée par:

$$f_i(x+e_i, t+1) = f_i(x, t) + \Omega(f_i(x, t)), \quad i = 0, 1, \dots, 8 \quad (2)$$

où f_i est la fonction de distribution d'une particule et Ω est l'opérateur de collision représentant la variation de la fonction de distribution due aux collisions particulières. La linéarisation de cet opérateur autour de la fonction de distribution à l'équilibre local f_i^{eq} apporte une simplification importante de la méthode *LBM*.

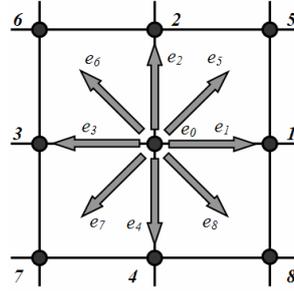


Figure 2: Modèle D2Q9

A chaque nœud du domaine, on calcule un ensemble de neuf moments associés aux neuf fonctions de distribution et qui sont liés par la transformation linéaire [4]

$$m = Mf \quad (3)$$

où la matrice M d'ordre 9 est donnée dans [4]. Il importe de noter que durant l'étape de collision qui est locale en espace, trois moments sont conservés (la densité et la quantité de mouvement). Les autres moments, non conservés, sont calculés à partir d'une simple équation de relaxation linéaire vers les valeurs d'équilibre qui dépendent des quantités conservées:

$$m_k^c = m_k + s_k (m_k^{eq} - m_k), \quad k = 3, 5, \dots, 8 \quad (4)$$

où $s_k = \Delta t / \tau_k$ est le taux de relaxation, m_k^c est le moment après collision et m_k^{eq} représente le moment à l'équilibre.

Les nouvelles fonctions de distribution f^c sont calculées à partir des nouveaux moments m^c :

$$f^c = M^{-1}m^c \quad (5)$$

La densité de masse et le vecteur vitesse macroscopiques sont calculés via les relations suivantes:

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t) \quad \text{et} \quad \bar{u}(x, t) = \sum_i f_i(x, t) e_i / \rho(x, t) \quad (6)$$

Sur les parois de la cavité, des conditions aux limites de type "bounce-back" sont utilisées pour les vitesses. Ces conditions permettent d'avoir des vitesses nulles à l'interface fluide-paroi solide.

L'équation d'énergie est discrétisée par une méthode de différences finies avec des schémas décentré en avant pour le temps et centré pour l'espace [4].

2.2 Calcul du flux de chaleur radiatif

Le fluide contenu dans la cavité est considéré comme gris, semi-transparent et participant en émission et en absorption. Ceci implique la présence d'un terme source radiatif dans l'équation de l'énergie qui s'écrit:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) - \frac{\Theta_0}{Pl} \nabla Q_R \quad (7)$$

Dans ce travail, le dernier terme (terme source) est calculé en résolvant l'équation de transfert radiatif (ETR), laquelle est écrite sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\mu \left(\frac{\partial I}{\partial X} \right) + \xi \left(\frac{\partial I}{\partial Y} \right) + \tau I = \frac{\tau}{4\pi} \left[(1-\omega) \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right)^4 + \omega \int_{4\pi} I d\Omega \right] \quad (8)$$

où la luminance I dépend des variables X , Y et de la direction $\vec{\Omega}$.

La quantité $I(X, Y, \Omega_m) = I_m(X, Y)$ est calculée dans le domaine entier en résolvant dans notre cas l'équation suivante sur un ensemble de direction discrètes Ω_m :

$$\mu \frac{\partial I_m}{\partial X} + \xi \frac{\partial I_m}{\partial Y} + \tau I_m = \tau I_0 \quad (9)$$

qui, intégrée sur un volume de contrôle, donne:

$$\mu_m A_X (I_{m,E} - I_{m,W}) + \xi_m A_Y (I_{m,N} - I_{m,S}) + \tau(P) \Delta V I_{m,P} = \tau(P) \Delta V I_0 \quad (10)$$

avec $A_X = \Delta X$, $A_Y = \Delta Y$ et $\Delta V = \Delta X \cdot \Delta Y$; les lettres E, W, S et N désignent les côtés est, ouest, sud et nord du volume de contrôle considéré et P son centre. Pour plus de détail sur la méthode des ordonnées discrètes, on pourra consulter Rafieivand [5]

Les conditions aux limites pour la température sont, sur les parois actives (verticales):

$$\begin{aligned} \theta(N+1/2, y) &= \theta_h = 0,5 & \text{pour} & \quad 1/2 \leq y \leq N+1/2 \\ \theta(1/2, y) &= \theta_c = -0,5 & \text{pour} & \quad 1/2 \leq y \leq N+1/2 \end{aligned} \quad (11)$$

et, sur les parois horizontales, les conditions d'adiabaticité se traduisent par:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\Theta_0}{Pl} \varepsilon_w \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right)^4 - \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega}' < 0} |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}'| I(X, Y, \vec{\Omega}') d\Omega' \right] = 0 \quad (12)$$

Le nombre Nusselt moyen sur les murs thermiquement actifs se calcule par:

$$Nu_T(X_w) = \int_0^1 \left\{ -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right\}_{x_w, y} + \frac{\Theta_0}{Pl} \varepsilon_w \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right)^4 - \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega}' < 0} |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}'| I(X, Y, \vec{\Omega}') d\Omega' \right] dY \quad (13)$$

3. Résultats et discussion

Dans tous les calculs présentés dans cette étude, un maillage uniforme de 139x139 éléments a été choisi pour optimiser la relation entre la précision et le temps d'exécution. Les résultats de Yucel et *al.* [2], Rafieivand [5] et Meftah [6], obtenus dans le cas d'une cavité carrée différentiellement chauffée soumis à un flux de chaleur constant contenant un fluide binaire ont été utilisés comme référence pour vérifier la validité de notre code numérique. Le tableau 1 montre que nos résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux issus de ces références.

	Rafieivand [5]		Yucel [2]		Meftah [6]		Présent travail		Maillage
	Nu _R	Nu _T							
$\tau=0,2$	37,21	45,51	37,4	46,11	37,4	46,05	36,718	45,509	139x139
$\tau=1$	31,48	38,48	31,28	38,93	31,25	38,81	31,108	38,725	139x139
$\tau=5$	23,94	31,8	23,64	31,76	23,57	31,59	23,801	31,778	139x139

Tableau 1. Validation du code pour le couplage convection-rayonnement volumique

Afin de comprendre l'effet du rayonnement volumique sur les champs d'écoulement et de température, l'influence de différents paramètres tels que Ra, Pl et ε est étudiée.

3.1 Effet du nombre de Rayleigh

La figure 3 montre l'influence du nombre de Rayleigh sur les lignes de courant et sur les isothermes. Dans ce paragraphe, nous avons choisi $\Theta_0 = 1,5$ pour $Ra = 5.10^6$; ce qui implique que la température de référence est ajustée selon la relation $\Theta_0 = 7,5 / (Ra \cdot 10^{-6})$.

Pour de faibles valeurs de Ra , la circulation est faible, les lignes de courant sont circulaires et les isothermes ont tendance à être parallèles aux parois verticales car le transfert thermique se fait par conduction. Pour $Ra = 10^3$, l'effet du rayonnement sur l'allure des lignes de courant n'est pas perceptible, à part une légère réduction en intensité de recirculation au cœur de la cavité lorsque $\tau=1$ (0,7) par rapport à $\tau=0$ (1,1). En observant les isothermes, on constate que la présence du rayonnement brise leur inclinaison et les rend parallèles aux parois actives. Quand Ra augmente, la vitesse de l'écoulement devient importante et la circulation devient forte près des parois chaude et froide. Les isothermes se déplacent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et deviennent presque horizontales au centre de la cavité.

Pour $Ra=10^6$, les champs de température et d'écoulement sont centro-symétriques en absence de rayonnement et le noyau interne est thermiquement stratifié (figure 3), mais en considérant les effets du rayonnement, le gradient de température augmente près de la paroi active froide. Nous constatons également une homogénéisation de la température dans la cavité.

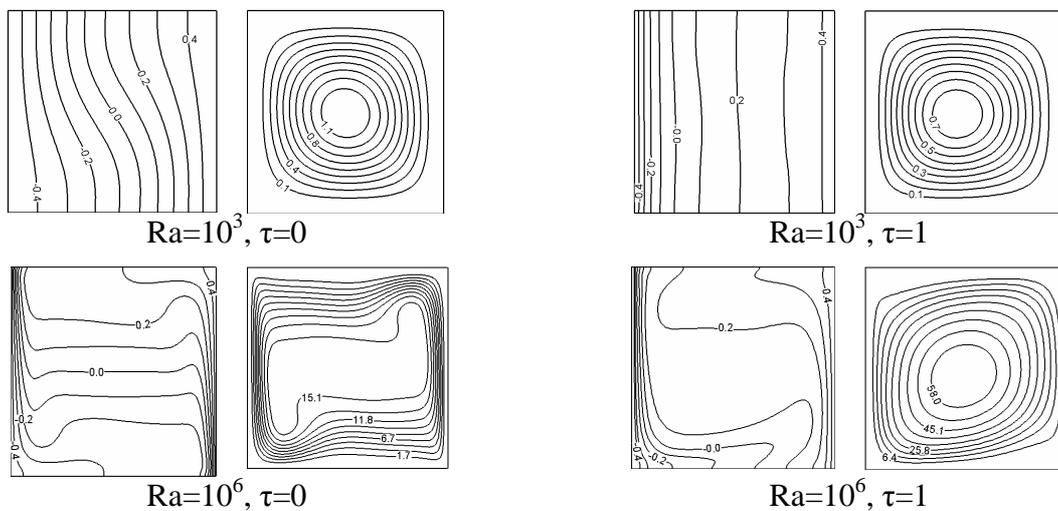


Figure 3: Isothermes et lignes de courant pour $Ra=10^3-10^6$ et $\tau=0,1$

3.2 Effet du nombre de Planck

Pour analyser l'influence du nombre de Planck en présence du rayonnement volumique, nous avons fixé les paramètres suivants: $Ra = 5 \cdot 10^6$, $\Theta_0=1,5$, $\omega = 0$, $\tau = 1$, $Pr = 0,71$, $\epsilon_{1,2} = 1$ (parois verticales noires) et $\epsilon_{3,4} = 0$ (parois horizontales purement réfléchissantes). Le nombre de Planck exprime la relation entre le transfert de chaleur par conduction et celui par rayonnement. Le transfert de chaleur est dominé par le rayonnement lorsque le nombre de Planck est faible.

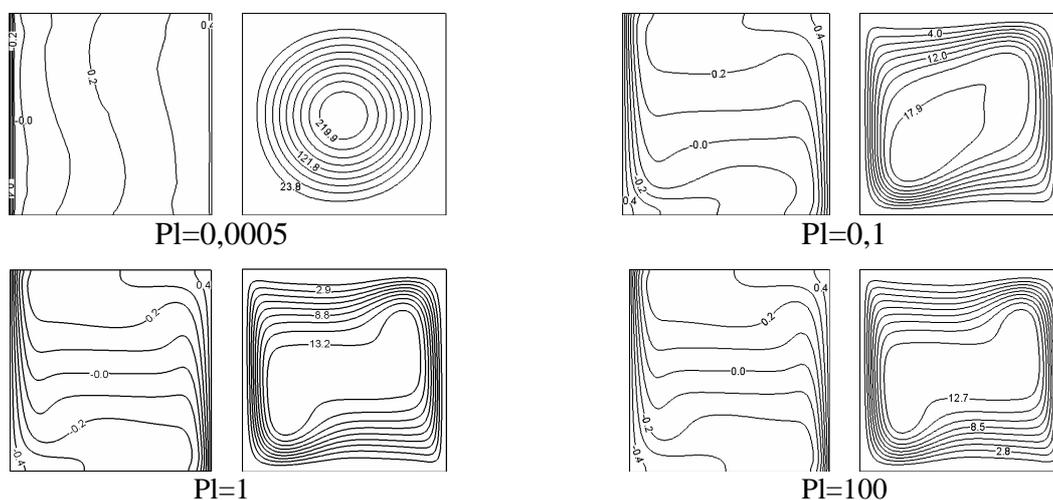


Figure 4: Isothermes et lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Planck et pour $Ra=5.10^6$ et $\tau=1$

L'effet du nombre de Planck sur l'écoulement est visible en particulier en présence de rayonnement volumique (figure 4). On observe également que la diminution du nombre Planck provoque une intensification du gradient de température et de la vitesse près des parois actives et aussi crée un noyau moins stagnant pour les milieux plus épais.

3.3 Effets des émissivités des parois

Dans cette partie, on fixe les paramètres suivants: $Ra = 5.10^6$, $Pr = 0,71$, $\Theta_0=1,5$, $Pl = 0,02$ et $\tau = 0$. L'émissivité des murs, quant à elle, peut avoir les valeurs: 0, 0,1, 0,5 et 1.

Le tableau 2 montre que l'émissivité des parois modifie considérablement l'écoulement et le champ thermique, même si le milieu est transparent. Le taux maximum de transfert de chaleur est obtenu lorsque les surfaces des murs de la cavité sont considérées comme des corps noirs, en particulier pour la configuration $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$ et $\varepsilon_3 = 0$.

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	Nu_c	Nu_R	Nu_T
0,1	1	1	1	7,32	14,48	21,80
0,5	1	1	1	8,62	26,85	35,47
1	0,1	1	1	14,75	4,87	19,62
1	0,5	1	1	12,14	21,91	34,05
1	1	0	1	14,17	35,96	50,14
1	1	0,1	1	12,66	36,86	49,53
1	1	0,5	1	10,65	38,09	48,74
1	1	1	0	9,62	39,32	48,95
1	1	1	0,1	9,75	38,94	48,70
1	1	1	0,5	9,94	38,58	48,53
1	1	1	1	10,04	38,47	48,52
0	0	0	0	13,71	0	13,71

Tableau 2. Nombre de Nusselt moyen radiatif et total pour différentes émissivités de la cavité.

4. Conclusion

En conclusion, pour un milieu émettant, absorbant et diffus, le rayonnement est le mode prédominant de transfert de chaleur et les isothermes sont fortement influencées par le chauffage du centre de la cavité. Les lignes de courant sont également significativement modifiées par la présence de rayonnement et les vitesses sont intensifiées. En règle générale, l'écoulement est unicellulaire; toutefois, les milieux minces ou diffus peuvent générer des structures multicellulaires.

Références

- [1] G. Lauriat, Combined radiation-convection in gray fluids enclosed in vertical cavities, J. Heat Transfer, Vol. 104, pp. 609-615, 1982.
- [2] A. Yucel, S. Acharya, M.L Williams, Natural convection and radiation in a square enclosure, Numer. Heat Transfer, Vol. A15, pp. 261-278, 1989.
- [3] A. Mezrhab, D Lemonnier, S Meftah, A Benbrik, Numerical study of double-diffusion convection coupled to radiation in a square cavity filled with a participating grey gas, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 41, N° 19, pp. 195501-195517, 2008.
- [4] A. Mezrhab, M. Bouzidi, P. Lallemand, Hybrid lattice Boltzmann finite-difference simulation of convective flows, Computer and Fluids, Vol. 33, pp. 623-641, 2004.
- [5] M. Rafieivand, Numerical study of convection of double diffusion in presence of radiation on rectangular cavity, Doctorat thesis, University de Poitiers, Poitiers, France (1999).
- [6] S. Laouar Meftah, Modeling of Natural double diffusion convection in mixture gases absorbing and emitting radiation, Doctorat thesis, University M'hamed Bougara-Boumerdes Algeria, 2010.