

Etude théorique des transferts thermique et hydrique dans un milieu poreux non saturé. Application à un sol situé à Tizi-Ouzou.

Nacer LAMROUS¹, Saïd MAKHLOUF¹, Noura BELKAID¹

¹ Laboratoire de Mécanique des Structures et Energétique (LMSE)
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie.

Résumé - Nous étudions la distribution à différentes périodes de l'année de la température et de la teneur en eau d'un sol, situé à l'université de Tizi-Ouzou. Les simulations sont faites avec les données météorologiques du site moyennées sur dix années et qui concernent le flux solaire, la température extérieure, l'humidité de l'air et la vitesse du vent. Nous avons repris un modèle mathématique en unidimensionnel se basant sur la théorie de WHITAKER des transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé, en admettant que la pression du mélange d'air humide présent dans le sol reste égale à la pression atmosphérique. Les équations sont discrétisées suivant le schéma des volumes finis puis résolues par la méthode itérative de Newton-Raphson dans l'environnement du logiciel MATLAB.

Nomenclature

C_p	Capacité calorifique, kJ/kgK	ρ	Masse volumique, Kg/m ³
D	Diffusivité, m ² /s	θ	Teneur en eau volumique, Kg/m ³
h_r	Humidité relative, %	λ_s	Conductivité thermique, W/m.°C
h	Enthalpie massique, kJ/kg	ε	Fraction massique dans le volume total
I_s	Constante solaire, W/m ²	ψ	Porosité du milieu
J_e	Flux d'énergie, W	σ	Tension superficielle, N/m
J_d	Flux de diffusion, kg/m ² .s	σ_B	Constante de Boltzmann, W/K ⁴
K_E	Coefficient d'échange massique, W/m ² K	μ	Viscosité dynamique, kg/ms
K	Perméabilité intrinsèque, m ²	δ	Coefficient de diffusion moléculaire, m ² /s
K	Perméabilité relative	Δh_v	Enthalpie d'évaporation, kJ/kg
L_v	Chaleur latente d'évaporation, kJ/kg	α	Albédo du sol
M	Masse molaire, kg/mole	<i>Indices et exposants</i>	
P	Pression, Pa	a	air sec, ambiant
R	Constante des gaz parfaits, J/moleK	eff	effectif
R_g	Rayonnement global, W/m ²	g	gaz
S	Degré (ou taux) de saturation, %	R	référence
T	Température, K	s	Solide
V	Volume, m ³	v	vapeur
v	Vitesse, m/s	w	eau
X	Teneur en eau massique kg _{eau} /kg _{solide}		
Y	Concentration		

Symboles grecs

1. Introduction

La prédiction théorique des transferts thermiques et massiques dans un milieu poreux non saturé est toujours complexe du fait de la nature non continue de ces milieux, de la diversité des phénomènes intervenant dans ce processus, ainsi que de la valeur difficilement prévisible des coefficients phénoménologiques à introduire dans les programmes de calculs [1].

Dans cette étude théorique, le modèle mathématique est basé sur l'approche de WHITAKER et la technique des moyennes calculées sur les volumes élémentaires représentatifs (VER) [2] ; ce qui permet d'assimiler le milieu poreux à un milieu continu. Les équations de conservation de l'air sec puis celle de l'eau sous forme liquide et sous forme vapeur et enfin l'équation de la chaleur sont écrites à l'échelle des pores puis intégrées sur le domaine du VER.

Nous avons développé un code de calcul et simulé le comportement du sol. Les caractéristiques thermo physiques utilisées dans le programme, telles que la masse volumique, la capacité calorifique, la perméabilité intrinsèque, la conductivité thermique et la porosité proviennent de mesures effectuées en laboratoire [3]. Les conditions météorologiques du lieu sont extraites de fichiers où sont consignés les relevés, sur dix années, des températures et d'humidité, du rayonnement global, et de la vitesse du vent. [4]

2. Modèle mathématique de base

Les variables que nous avons retenues pour étudier ce problème sont la teneur en eau X , la température T ainsi que la pression de la phase gazeuse, cette dernière étant constituée d'un mélange de vapeur d'eau et d'air sec. Afin de nous limiter aux phénomènes dominants et simplifier un certain nombre de calculs, nous adoptons un certain nombre d'hypothèses dont les principales sont :

- les déformations de la phase solide sont négligées, sa vitesse est donc nulle ;
- la température locale est identique pour les trois phases ;
- la phase liquide est incompressible ;
- les constituants de la phase gazeuse sont supposés se comporter comme des gaz parfaits.

Les équations de conservation de l'eau, de l'air sec et d'énergie s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \varepsilon_w + \rho_v \varepsilon_g) + \nabla \cdot (\rho_w v_w + \rho_v v_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_a) + \nabla \cdot (\rho_a v_g) = \nabla \cdot \left[\rho_g D_{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_a}{\rho_g} \right) \right] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s h_s + \varepsilon_w \rho_w h_w + \varepsilon_g \rho_v h_v + \varepsilon_g \rho_a h_a) + \nabla \cdot [\rho_w h_w v_w + (\rho_v h_v + \rho_a h_a) v_g] = \\ \nabla \cdot \left[\rho_g h_a D_{eff} \cdot \nabla \frac{\rho_a}{\rho_g} \right] + \nabla \cdot \left[\rho_g h_v D_{eff} \cdot \nabla \frac{\rho_v}{\rho_g} \right] + \nabla \cdot (\lambda_{eff} \nabla T) \end{aligned} \quad (3)$$

Les vitesses de gaz et de l'eau sont supposées obéir à la loi de Darcy:

$$v_w = -\frac{K.k_w}{\mu_w} \cdot \nabla P_w \quad \text{et} \quad v_g = -\frac{K.k_g}{\mu_g} \cdot \nabla P_g \quad (4)$$

3. Discrétisation des équations

La méthode des volumes finis en schéma implicite est utilisée pour discrétiser les équations et donne pour l'équation de conservation de l'eau en un nœud P :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \left[\varepsilon_s \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_v) \right] dV dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_E} \nabla J_w dV dt = 0 \quad (5)$$

$$\text{Puis} \quad \frac{(\Delta x_w + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_P^t \right] + \left[(J_w)_E^{t+\Delta t} - (J_w)_W^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (6)$$

Les flux d'eau aux frontières du volume se calculent pour les points intérieurs comme suit:

$$(J_w)_{e_e}^{t+\Delta t} = \left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (\rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \quad (7)$$

$$(J_w)_{w_w}^{t+\Delta t} = \left(\rho_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (\rho_g D_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \quad (8)$$

Pour les points correspondant aux extrémités 1 et N, nous utilisons les relations suivantes :

$$\frac{(\Delta x_E)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_{1_1}^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_1^t \right] + \left[(J_w)_{A_E}^{t+\Delta t} - (J_w)_1^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (9)$$

$$\frac{(\Delta x_W)}{2\Delta t} \left[(\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_{N_N}^{t+\Delta t} - (\varepsilon_s \rho_s X + \varepsilon_g \rho_v)_N^t \right] + \left[(J_w)_N^{t+\Delta t} - (J_w)_{A_W}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (10)$$

L'équation de l'énergie se discrétise de la même manière et donne pour un point p interne:

$$\frac{(\Delta x_W + \Delta x_E)}{2\Delta t} \left[\Psi_P^{t+\Delta t} - \Psi_P^t \right] + \left[(J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} - (J_e)_{A_W}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (11)$$

$$\text{Avec : } \Psi_P^{t+\Delta t} = \left(\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right)_P^{t+\Delta t} \text{ et } \Psi_P^t = \left(\overline{\rho C_p} (T - T_R) + \varepsilon_g \rho_v \Delta h_{v0} \right)_P^t \quad (12)$$

$$(J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} = (T_{A_E}^{t+\Delta t} - T_{ref}) \left[(C_a \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_a)_E^{t+\Delta t} - (y_a)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (C_v \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + \left(\rho_w C_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_E^{t+\Delta t} - (P_w)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \right] + (\Delta h_{v0} \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_E^{t+\Delta t} - (y_v)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} + (\lambda_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(T)_E^{t+\Delta t} - (T)_P^{t+\Delta t}}{\Delta x_E} \quad (13)$$

$$(J_w)_{A_W}^{t+\Delta t} = (T_{A_W}^{t+\Delta t} - T_{ref}) \left[(C_a \rho_g D_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_a)_P^{t+\Delta t} - (y_a)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (C_v \rho_g D_{eff})_{A_E}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + \left(\rho_w C_w \frac{Kk_w}{\mu_w} \right)_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(P_w)_P^{t+\Delta t} - (P_w)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \right] + (\Delta h_{v0} \rho_g D_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(y_v)_P^{t+\Delta t} - (y_v)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} + (\lambda_{eff})_{A_W}^{t+\Delta t} \frac{(T)_P^{t+\Delta t} - (T)_W^{t+\Delta t}}{\Delta x_W} \quad (14)$$

$$\text{Pour le nœud 1 : } \frac{\Delta x_E}{2\Delta t} \left[\Psi_1^{t+\Delta t} - \Psi_1^t \right] + \left[(J_e)_{A_E}^{t+\Delta t} - (J_e)_1^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (15)$$

$$\text{Pour le nœud N : } \frac{\Delta x_E}{2\Delta t} \left[\Psi_N^{t+\Delta t} - \Psi_N^t \right] + \left[(J_e)_N^{t+\Delta t} - (J_e)_{A_W}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (16)$$

L'équation de conservation de la masse d'air sec n'est pas utilisée car la pression totale est considérée constante dans le sol, la pression d'air sec étant déduite de la pression partielle de vapeur. A ces équations, il faut associer les conditions aux limites suivantes : La température à la surface du sol T_s est calculée par un bilan dans lequel il est considéré que les échanges dominants se font avec l'atmosphère (les échanges conductifs dans le sol sont négligés) :

$$(1 - \alpha)Rg + \varepsilon \sigma (Ta - 6)^4 - \varepsilon \sigma_B T_s^4 - h_c (T_s - Ta) = L_v J_w \quad (17)$$

Où J_w est le flux d'eau évaporatif en surface. Il sera calculé comme suit :

$$J_w = \frac{K_E M_v}{RT_a} \left(h_r P_v^{sat}(T_s) - p_v(Ta) \right) \quad (18)$$

- En profondeur : Le flux de chaleur conductif est nul car la température ne varie presque plus à partir d'une certaine profondeur tandis que la teneur en eau du sol est maximale et égale à la teneur du sol saturé.

4. Résultats numériques et interprétations

4.1. Paramètres de la simulation

Pour simuler le comportement du sol soumis aux conditions climatiques de Tizi ouzou (latitude $36^{\circ}71'$, longitude 4°), on s'est appuyé sur les données météorologiques recueillies au niveau de la station locale et relevées pour les journées types des douze mois de l'année. Comme conditions initiales, nous avons pris pour les températures les valeurs mesurées et pour les teneurs en eau, nous avons choisi un profil linéaire. Voici les courbes d'évolution annuelle des températures mensuelles moyennes de l'air et du sol relevées à Tizi Ouzou :

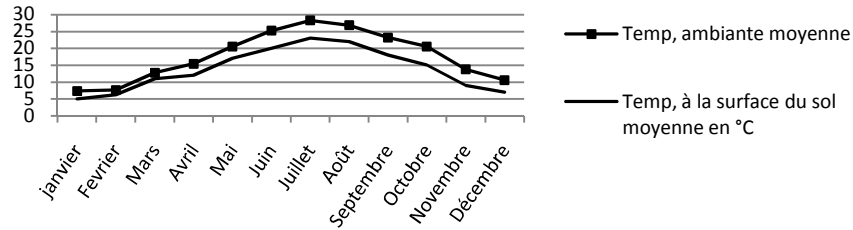


Figure 1 : Températures mensuelles moyennes de l'air et du sol à Tizi-Ouzou

et dans ce tableau les valeurs mensuelles moyennes du rayonnement global et d'humidité relative :

	Janv	fev	mars	avril	mai	juin	juil	aout	sept	oct	nov	dec
Ray. global	472	541	624	671	633	640	620	641	586	506	453	438
Humidité rel.(%)	84.8	65.5	64,50	60,8	54,5	47,8	42,0	46.2	53.9	56.9	63.1	65.1

Nous avons utilisé les caractéristiques physiques du sol fournies par le LCTP :

$$\rho_s = 1515 \text{ kg/m}^3; \quad \lambda_s = 1 \text{ W/mK}, \quad C_{p,s} = 1270 \text{ J/kgK}, \quad \psi = 40\% \text{ et } K = 10^{-14} \text{ m}^2$$

La conductivité effective du sol est calculée comme :

$$\lambda_{eff}(S, T) = (1 - \psi) \cdot \lambda_s + S \cdot \psi \cdot \lambda_w(T) \quad (19)$$

La perméabilité relative de l'eau liquide est selon Van Genuchten (1980) [5] :

$$k_w(S) = (1 - (1 - S^{1/m})^m)^2 \sqrt{S} \quad (20)$$

Pour la pression capillaire, nous avons retenu l'expression de Van Genuchten (1980) en fonction de la saturation effective S_{we} et qui introduit deux paramètres empiriques, α et m .

$$P_c = ((S_{we})^{-1/m} - 1)^{1-m} / \alpha \quad \text{avec} \quad S_{we} = (\theta - \theta_r) / (\theta_m - \theta_r) \quad (21)$$

Pour un sol limoneux, nous avons pris les valeurs recommandées par R. Calvet [6]

$$\alpha = 0.0115 \text{ Pa}^{-1}, \quad m = 0.5169; \quad \theta_m = 0.52 \text{ kg/m}^3 \text{ et } \theta_r = 0.218 \text{ kg/m}^3$$

Pour l'humidité relative de l'air à l'intérieur du sol, nous reprendrons l'expression rapportée par Thai Hong Vu [7]:

$$Hr = \frac{P_v}{P_v^{sat}(T)} = \begin{cases} 1 & \text{Si } X > X_{irr} \\ X(2 - X/X_{irr})/X_{irr} & \text{Si } X \leq X_{irr} \end{cases} \quad (22)$$

La pression de vapeur saturante est calculée suivant la relation donnée par N.Vargaftik [8] :

$$P_v^{sat}(T) = 133.32 \exp[18.584 - 3984.2 / (233.426 + T)] \quad (23)$$

Le coefficient de diffusion libre de la vapeur δ_{va} , est déterminé par l'équation de Schirmer :

$$\delta_{va}(T, P) = 2.26 \cdot 10^{-5} \cdot (T/T_g)^{1.81} P_r/P_g \quad (24)$$

La tension superficielle en milieu poreux s'exprime selon Vargaftik :

$$\sigma(T) = -1.3 \cdot 10^{-7} T^2 - 1.58 \cdot 10^{-4} T + 0.07606 \quad (25)$$

4.2. Résultats et commentaires

Nous avons représenté les courbes d'évolution horaire des températures et teneurs en eau ainsi que leur évolution en fonction de la profondeur, d'abord dans les 60 premiers centimètres, puis plus profondément, jusqu'à 6m. Il apparaît clairement que les variations des conditions climatiques extérieures au cours de la journée n'affectent que les couches supérieures du sol, environ 50 cm dans le cas des caractéristiques du sol étudié. Le signal de température en surface est atténué en profondeur et il est affecté d'un déphasage progressif lié à l'inertie du sol. Ainsi, au cours de la journée type du mois de Mai, la température maximale est de 22°C, atteinte au sol à 12H30, et elle passe à 18°C pour un point situé à 30cm de profondeur, avec un décalage de 3h. Ce phénomène se reproduit également au mois de Janvier avec des maxima de températures inférieurs et un décalage plus important vers l'après-midi. Ce résultat ainsi que l'évolution de la température dans cette couche supérieure sont confirmés par des travaux antérieurs sur ce thème [9] et [10]. Dans les couches inférieures, les températures sont constantes au cours de la journée (résultat que nous avons pu constater lors de quelques mesures effectuées in situ). Elles évoluent jusqu'à atteindre, à une profondeur de 6m, la valeur de la température mensuelle moyenne du sol (17°C en Mai). La teneur en eau est très peu affectée par les variations climatiques de la journée. On constate cependant une légère remontée d'humidité en surface à l'instant le plus chaud de la journée. En profondeur, la teneur en eau augmente jusqu'à atteindre la saturation à 6m (condition à cette limite) en gardant le profil linéaire initial.

5. Conclusion

Cette étude théorique a permis de reconstituer le comportement thermique et hydrique d'un sol limoneux non saturé en conditions réelles à l'échelle d'une journée et en fonction de la profondeur. Les résultats obtenus sont satisfaisants et confirmés par la littérature consultée ; cependant la validation par l'expérience est nécessaire pour recalibrer la valeur des très nombreux paramètres et caractéristiques thermo physiques qui interviennent dans ce problème. Le code de calcul élaboré peut constituer un outil précieux dans plusieurs domaines, par exemple en agronomie pour aider au choix de la profondeur des plants et du système racinaire et dans l'engineering bioclimatique et les installations thermiques enterrées tels que les échangeurs des puits canadiens.

Références bibliographiques

- [1] MOYNE C., Transferts couplés chaleur-masse lors du séchage : prise en compte du mouvement de la phase gazeuse. Thèse de Doctorat d'Etat. Institut National Polytechnique de Lorraine. France (1987).
- [2] WHITAKER S., Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media: a theory of drying. *Advances in heat transfer*, 13, pp 119-203, 1977.
- [3] Laboratoire Central Des Travaux Publics de Tizi-Ouzou.
- [4] Station météorologique de la ville de Tizi Ouzou.
- [5] LEFEVBRE R., Ecoulement multiphase en milieux poreux. Hiver 2003.
- [6] CALVET R., Le sol : propriétés et fonction. Volume 2. Phénomènes physiques et chimiques. Applications agronomiques et environnementales. France agricole. Dunod 2003.
- [7] HONG VU T, Influence of pore size distribution on drying behaviour of porous media by a continuous model, thèse de doctorat-ingénieur ; Université Otto Von Guericke de Magdebourg ; Allemagne 2006.
- [8] VARGAFTIK N. B., VINOGRADOV, J. K. AND YARGIN, V. S., Handbook of physical properties of liquids and gases : pure substances and mixtures, 3rd Edition, Begell House, NewYork. (1996).

- [9] NEBBALI R., Modélisation de la dynamique du climat interne distribué dans une serre de culture. Thèse de doctorat de l'Université de Franche-Comté. France 2008.
- [10] GAO Z., BIAN L., HU Y., WANG L., FAN J., Determination of soil temperature in an arid region. Journal on arid environments 71 (2007) pp 157-168; Elsevier.

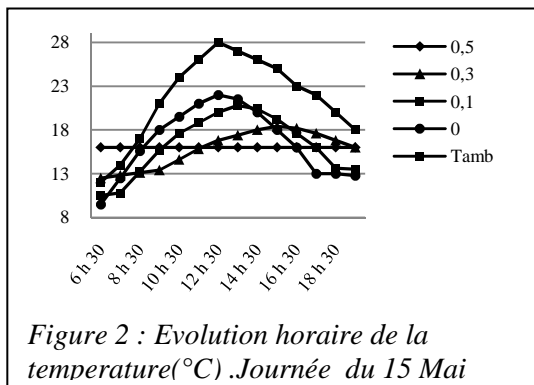


Figure 2 : Evolution horaire de la température(°C) .Journée du 15 Mai

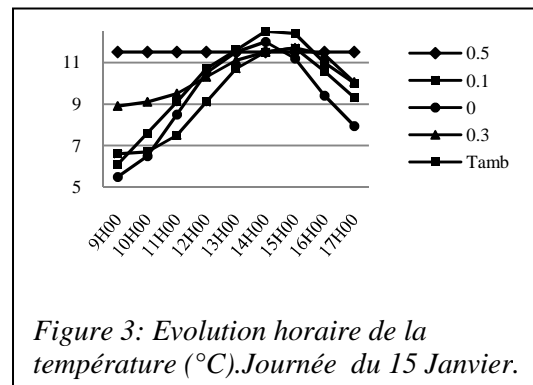


Figure 3: Evolution horaire de la température (°C).Journée du 15 Janvier.

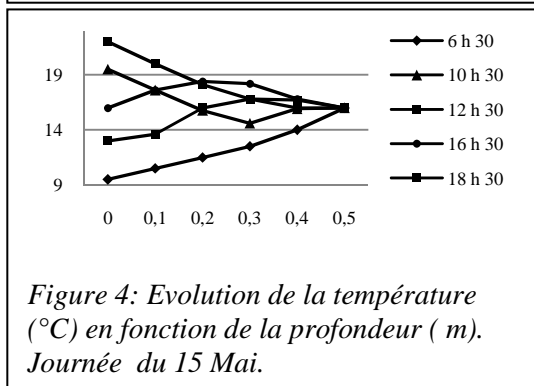


Figure 4: Evolution de la température (°C) en fonction de la profondeur (m). Journée du 15 Mai.

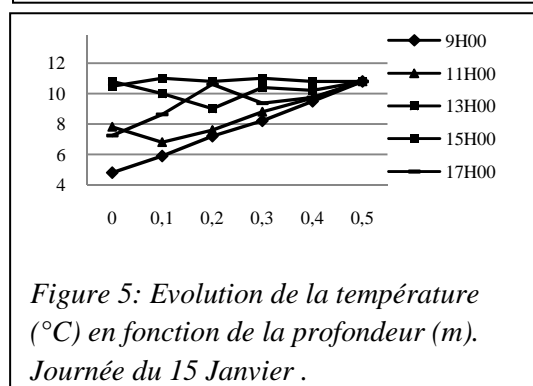


Figure 5: Evolution de la température (°C) en fonction de la profondeur (m). Journée du 15 Janvier .

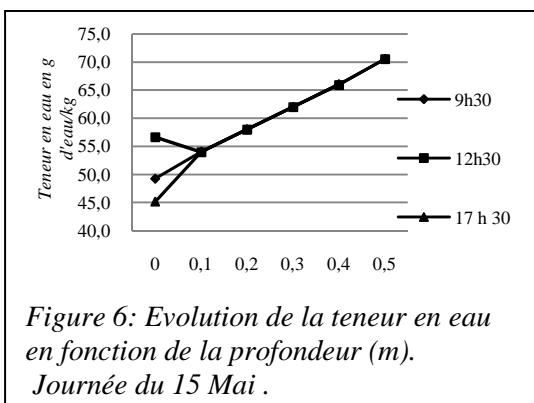


Figure 6: Evolution de la teneur en eau en fonction de la profondeur (m). Journée du 15 Mai .

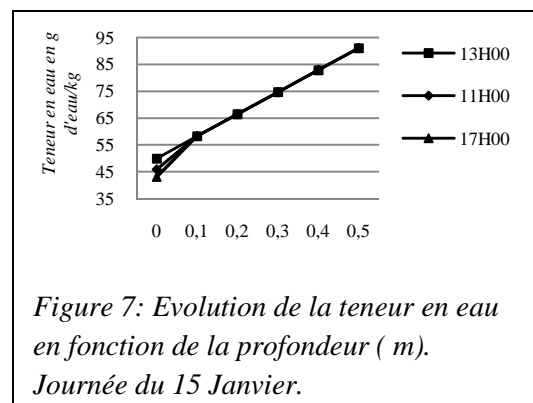


Figure 7: Evolution de la teneur en eau en fonction de la profondeur (m). Journée du 15 Janvier.

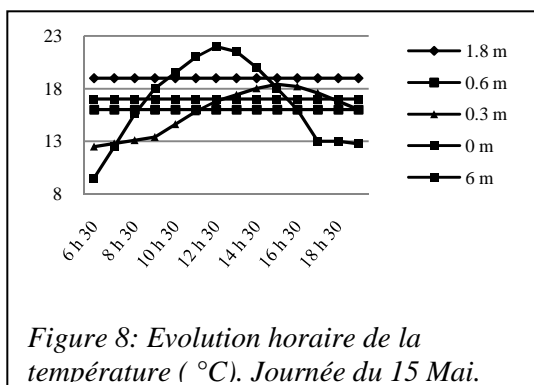


Figure 8: Evolution horaire de la température (°C). Journée du 15 Mai.

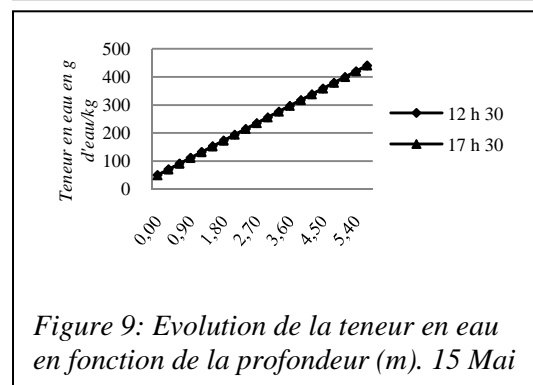


Figure 9: Evolution de la teneur en eau en fonction de la profondeur (m). 15 Mai