

Approche asymptotique et corrélations pour des problèmes complexes de diffusion avec constriction

Najib LARAQI^{1*}, Jean-Gabriel BAUZIN¹, Nacim ALILAT¹, Abderrahmane BAÏRI¹

¹Université Paris Ouest, Laboratoire Thermique Interfaces Environnement, EA 4415, GTE
50 R de Sèvres, F-92410 Ville d'Avray

* : auteur correspondant : nlaraqi@u-paris10.fr ou nlaraqi@gmail.com

Résumé – Certains problèmes de diffusion avec constriction n'admettent pas de solutions analytiques et leur résolution par voie numérique est lourde du fait des singularités introduites par l'hétérogénéité des conditions aux limites sur une même face du milieu. Pour répondre à cette problématique, en vue de proposer des relations précises et simples d'utilisation, une approche basée sur une analyse asymptotique et une technique de corrélation particulièrement pertinente est proposée. Des problèmes - complexes - de diffusion sont résolus par cette approche. Les solutions obtenues sont en très bon accord avec des résultats disponibles dans la littérature.

Nomenclature

a	Rayon intérieur, m	Symboles grecs	
b	Rayon extérieur, m	α	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
k	Rapport de rayons, $= a / b$, –	λ	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
q	Densité de flux, $W.m^{-2}$	ϕ	Flux, W
R	Résistance thermique, $K.W^{-1}$	δ	Longueur caractéristique, m
(r, z)	Coordonnées cylindriques, (m, m)	Indices	
T	Température, K	a	Au contact annulaire
t	Temps, s	c	Au contact, ou au centre
t^*	Temps adimensionnel, –	c, a	Entre le centre et le contact annulaire
		∞	A l'infini

1. Introduction

Le problème de constriction associant des conditions aux limites de différents types sur la même face d'un milieu est très complexe à résoudre tant par voie analytique que numérique. La raison à cette difficulté est liée à l'apparition de singularités numériques aux bords du passage d'une condition à l'autre. Le problème qui a fait l'objet de nombreuses investigations est celui de l'association d'une condition de type Neumann avec une condition de type Dirichlet. Parmi ces exemples on peut citer le disque isotherme, ou bien encore le disque annulaire isotherme. Ces problèmes trouvent leurs applications en thermique (contacts) mais aussi en électrochimie (électrodes), en électrostatique (potentiel) ou en électromagnétisme. Dans cette étude, trois problèmes différents, présentant tous des singularités, sont traités. Le premier est celui du cas transitoire d'une source circulaire isotherme. Le second concerne la configuration stationnaire d'une surface annulaire isotherme. Le troisième est celui du

retournement des lignes de flux depuis le centre (à flux uniforme) vers la surface annuaire (isotherme). Pour ces trois problèmes, des corrélations simples et précises sont proposées pour calculer la résistance de constriction. Pour établir ces corrélations, il est procédé dans une première étape à la détermination des tendances asymptotiques. Il est ensuite fait usage de l'approximant de Churchill et Usagi [1] pour raccorder les comportements asymptotiques et obtenir ainsi une corrélation valable quelle que soit la valeur de la variable du problème.

2. Principe de l'approximant de Churchill et Usagi [1]

Le principe de la méthode de Churchill et Usagi [1] consiste à déterminer un approximant d'une fonction continue $f(x)$, valable quelle que soit la valeur de la variable x , lorsque les comportements asymptotiques pour $x \rightarrow 0$ (soit $f_0(x)$) et pour $x \rightarrow \infty$ (soit $f_\infty(x)$) sont connus. Il faut pour cela que le comportement de $f(x)$ soit monotone. L'approximant s'écrit sous la forme :

$$(f(x))^n = (f_0(x))^n + (f_\infty(x))^n, \text{ soit } f(x) = \left[(f_0(x))^n + (f_\infty(x))^n \right]^{1/n} \quad (1)$$

L'exposant n est positif si la fonction est concave, et il est négatif si elle est convexe. La valeur de l'exposant arbitraire n peut être déterminée de plusieurs manières : (i) en minimisant l'écart entre l'approximant et les comportements asymptotiques, (ii) en comparant l'approximant à des résultats (expérimentaux ou numériques) connus, etc.

3. Problème 1 : disque isotherme en régime transitoire (Figure 1)

Ce problème est régi par le système d'équations suivant :

$$\alpha \nabla^2 T = \partial T / \partial t, \quad T_{r,z,0} = T_{\infty,z,t} = T_{r,\infty,t} = (\partial T / \partial r)_{0,z,t} = 0; \quad T_{r \leq a,0,t} = T_c; \quad (\partial T / \partial z)_{r > a,0,t} = 0 \quad (2)$$

avec: $\nabla^2 T = [\partial(r \partial T / \partial r) / \partial r] / r + \partial^2 T / \partial z^2$

La difficulté de ce problème réside dans la condition en $z = 0$ pour laquelle le disque est à température imposée (Dirichlet) pendant que le reste de cette même face est isolé (Neumann). La densité de flux en $r = a$ est infinie. C'est la singularité du problème.

3.1. Comportement asymptotique aux temps courts

Il est d'abord procédé à une étude des ordres de grandeurs. Les grandeurs caractéristiques suivantes sont choisies :

$$r \sim a; \quad z \sim \delta; \quad T \sim T_c, \text{ telles que: } [\partial(r \partial T / \partial r) / \partial r] / r \sim T_c / a^2 \text{ et } \partial^2 T / \partial z^2 \sim T_c / \delta^2 \quad (3)$$

où δ est la longueur caractéristique de la diffusion suivant la direction de la profondeur.

En remplaçant chaque terme de l'équation de la diffusion par son ordre de grandeur, il vient :

$$T_c / a^2; T_c / \delta^2 \sim T_c / \alpha t, \text{ soit } 1; 1 / \delta^{*2} \sim 1 / t^*, \text{ avec : } \delta^* = \delta / a \text{ et } t^* = t \alpha / a^2 \quad (4)$$

Lorsque $t^* \rightarrow 0$, le premier terme d'ordre de grandeur 1 devient négligeable, si bien que $\delta^{*2} \rightarrow t^*$. Il en résulte que : $[\partial(r\partial T / \partial r) / \partial r] / r \ll \partial^2 T / \partial z^2$, qui signifie que la diffusion dans les premiers instants est essentiellement axiale. Les isothermes de la figure 2, obtenues par voie numérique, confirment cette tendance. Il peut être noté que les isothermes restent sensiblement parallèles à la surface de contact jusqu'à environ $t^* = 0,0225$.

Le problème se réduit alors à celui d'un milieu semi-infini soumis à un échelon de température. Sa solution est :

$$T_0(z, t \rightarrow 0) = T_c \operatorname{erfc} \left[z / (2\sqrt{\alpha t}) \right] \quad (5)$$

Le flux qui en résulte est :

$$\phi_0(t \rightarrow 0) = \lambda T_c \pi a^2 / (\sqrt{\pi} \sqrt{\alpha t}) = \lambda T_c a \sqrt{\pi} / \sqrt{t^*} \quad (6)$$

La résistance thermique est donnée par :

$$R_{c,0}(t \rightarrow 0) = T_c / \phi_0 = \sqrt{t^*} / (\lambda a \sqrt{\pi}); \text{ soit } R_{c,0}^* = R_{c,0} \lambda a = \sqrt{t^*} / \sqrt{\pi} \quad (7)$$

3.2. Comportement asymptotique aux temps longs

La solution aux temps longs est bien connue dans la littérature. Elle s'exprime par :

$$R_{c,\infty}(t \rightarrow \infty) = T_c / \phi_\infty = 1 / (4 \lambda a); \text{ soit } R_{c,\infty}^* = R_{c,\infty} \lambda a = 1 / 4 \quad (8)$$

3.3. Corrélation valable à tout instant

En appliquant la méthode de Churchill et Usagi [1], il vient [2]:

$$(R_c^*)^n = (R_{c,\infty}^*)^n + (R_{c,0}^*)^n; \text{ soit } R_c^* = \left[(1/4)^n + (\sqrt{t^*} / \sqrt{\pi})^n \right]^{1/n} \quad (9)$$

Lorsque $t^* \rightarrow \infty$, $R_c^* \rightarrow 1/4$, ce qui signifie que n doit être négatif. En appliquant le formalisme de Churchill et Usagi [1] on trouve une valeur optimale $n = -1,1$.

Mahon et Oldham [3] ont effectué une étude avec des développements semi-analytiques complexes. Ils ont obtenu des tendances respectivement pour les temps courts et les temps longs. La figure (1b) montre que les résultats sont en très bon accord.

4. Problème 2 : disque annulaire isotherme en régime établi (Figure 3)

La conduction dans le solide est régie par le système suivant :

$$\nabla^2 T = 0; (T)_{a < r < b, 0} = T_c; (\partial T / \partial z)_{r < a, 0} = (\partial T / \partial z)_{r > b, 0} = (\partial T / \partial r)_{0, z} = T_{\infty, z} = T_{r, \infty} = 0 \quad (10)$$

La difficulté de ce problème réside dans l'hétérogénéité des conditions aux limites en $z = 0$. Pour des raisons de commodité, les paramètres adimensionnels suivants : $k = a/b$ et $u = 1/k - 1$ sont introduits.

4.1. Comportement asymptotique à $k = a/b \rightarrow 0$, $u = (1/k - 1) \rightarrow \infty$

Lorsque $k = a/b \rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$), on est en présence de la configuration d'un disque isotherme pour lequel le résultat est bien connu :

$$R_{c,\infty}(u \rightarrow \infty) = 1/(4\lambda b); \text{ soit } R_{c,\infty}^* = R_{c,\infty}\lambda b = 1/4 \quad (11)$$

4.2. Comportement asymptotique à $k = a/b \rightarrow 1$, $u = (1/k - 1) \rightarrow 0$

Lorsque le rayon a devient très voisin du rayon b , la condition de température imposée devient équivalente à celle de flux imposé. En opérant un changement de condition tel que $-\lambda(\partial T / \partial z)_{r,0} = q_a$ pour $a \leq r \leq b$, le problème devient plus simple à résoudre.

Il peut être montré, sans difficultés, que la résistance de constriction se met sous la forme :

$$R_c^* = 8 \left[1 + k^3 - 3\pi k^2 F\left(1/2, -1/2; 2; k^2\right) / 4 \right] / \left[3\pi^2 (1 - k^2)^2 \right] \quad (12)$$

où F est la fonction hypergéométrique.

En remplaçant k par son expression en fonction de u , soit $k = 1/(1+u)$ et en procédant à un développement limité au voisinage de $u \rightarrow 0$, il vient :

$$R_{c,0}^* \cong \ln(8e^{3/2} / u) / (2\pi^2) \quad (13)$$

4.3. Corrélation valable pour toute valeur de $k = a/b$

La technique de Churchill et Usagi [1] peut être appliquée après avoir opéré le changement de fonction suivant :

$$f^* = \exp(2\pi^2 R_c^*), \text{ soit } R_c^* = \ln(f^*) / (2\pi^2). \quad (14)$$

On pose :

$$(f^*) = \left[(f_\infty^*)^n + (f_0^*)^n \right]^{1/n} \quad (15)$$

La valeur optimale trouvée ici est $n = 1,3$. Il vient :

$$R_c^* = \ln \left[\left(8e^{3/2} k / (1 - k) \right)^n + e^{n\pi^2/2} \right] / (2\pi^2 n), \text{ avec } n = 1,3 \quad (16)$$

La figure 3b compare cette corrélation à des données numériques disponibles dans la littérature [4,5]. Un très bon accord est observé.

5. Problème 3 : disque annulaire isotherme avec retournement des lignes de flux en régime établi (Figure 4)

Ce problème est régi par les équations suivantes :

$$\nabla^2 T = 0; -\lambda(\partial T / \partial z)_{r < a, 0} = q_c; (\partial T / \partial z)_{r > b, 0} = T_{a < r < b, 0} = (\partial T / \partial r)_{0, z} = T_{\infty, z} = T_{r, \infty} = 0 \quad (17)$$

En appliquant la même démarche que pour le cas précédent, on obtient :

$$R_{c,a}^* = R_{c,a} \lambda a = 2 \ln \left[\left(8e^{-3/2} k / (1-k) \right)^n + e^{2n} \right] / (3\pi^2 n), \text{ avec } n = 0,7 \quad (18)$$

Ne disposant pas de résultats de la littérature pour ce type de configuration, la validation des résultats est effectuée par voie numérique. La figure 4b montre qu'il y a un très bon accord entre les deux approches.

6. Conclusions

Cette étude montre qu'il est possible d'obtenir des relations simples pour évaluer la résistance thermique de constriction pour des configurations complexes. La détermination des tendances asymptotiques et l'utilisation d'une technique de raccordement relativement pertinente permettent d'aboutir à un formalisme simple et précis.

Références

- [1] S.W. Churchill, R. Usagi, A General expression for the correlation of rates of transfer and other phenomena, *AICHE Journal*, 18 (1972) 1121-1128.
- [2] N. Laraqi, Compact and accurate approximants to determine the transient current at the disc electrode under different boundary conditions, *Electrochimica Acta*, 56 (2011) 2877-2880.
- [3] P.J. Mahon, K.B. Oldham, The transient current at the disk electrode under diffusion control: a new determination by the Cope-Tallman method, *Electrochimica Acta*, 49 (2004) 5041-5048.
- [4] W.R. Smythe, The capacitance of a circular annulus, *J. Appl. Phys.*, 22 (1951) 1499-1501.
- [5] J.C. Cooke, Triple integral equations, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 16 (1962) 193-203.

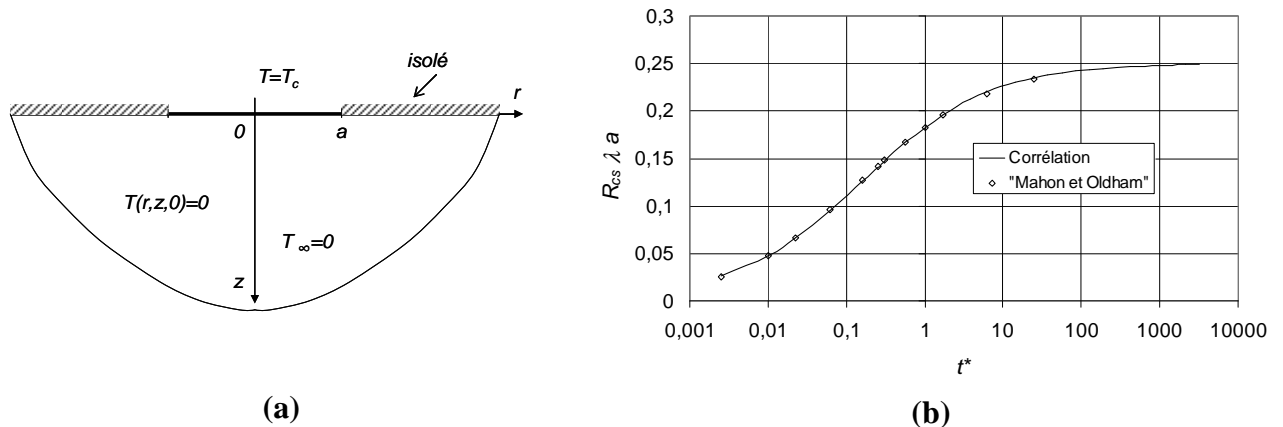


Fig. 1 : Disque isotherme (a) et Résistance de constriction transitoire correspondante (b)

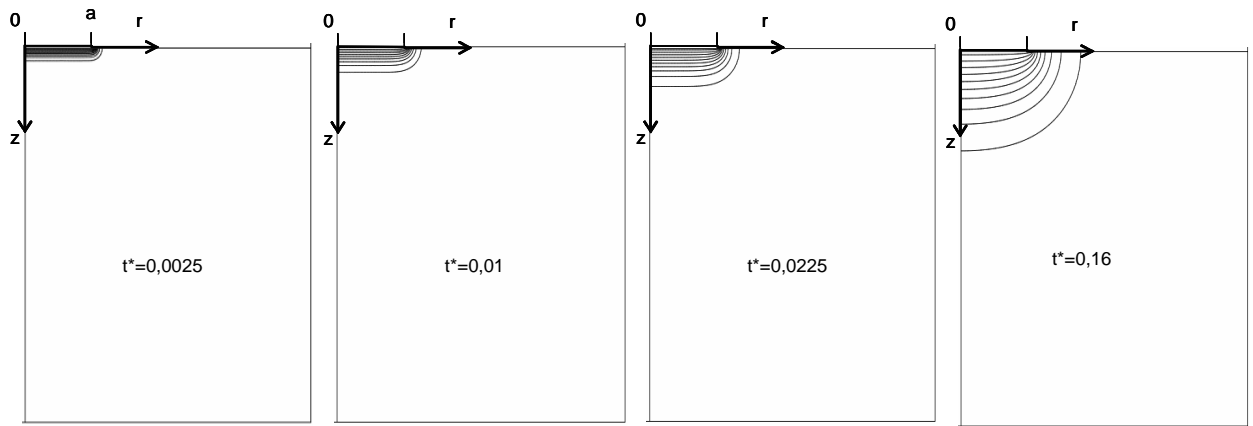


Fig. 2 : Isothermes à différents instants pour le disque isotherme (obtenues numériquement)

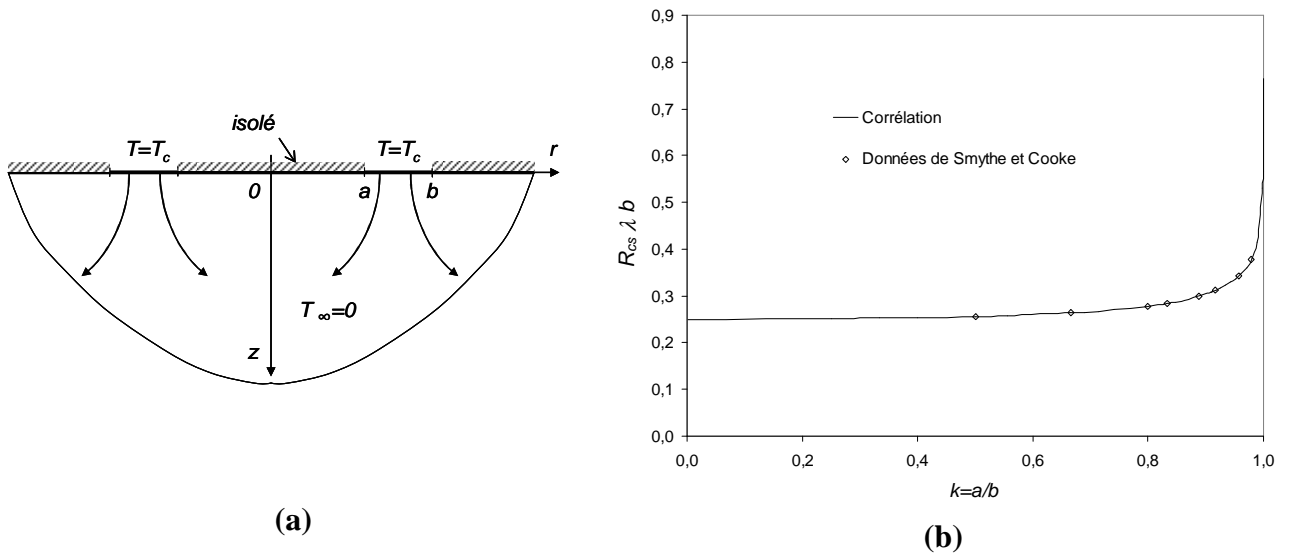


Fig. 3 : Contact annulaire isotherme (a) et Résistance de constriction stationnaire correspondante (b)

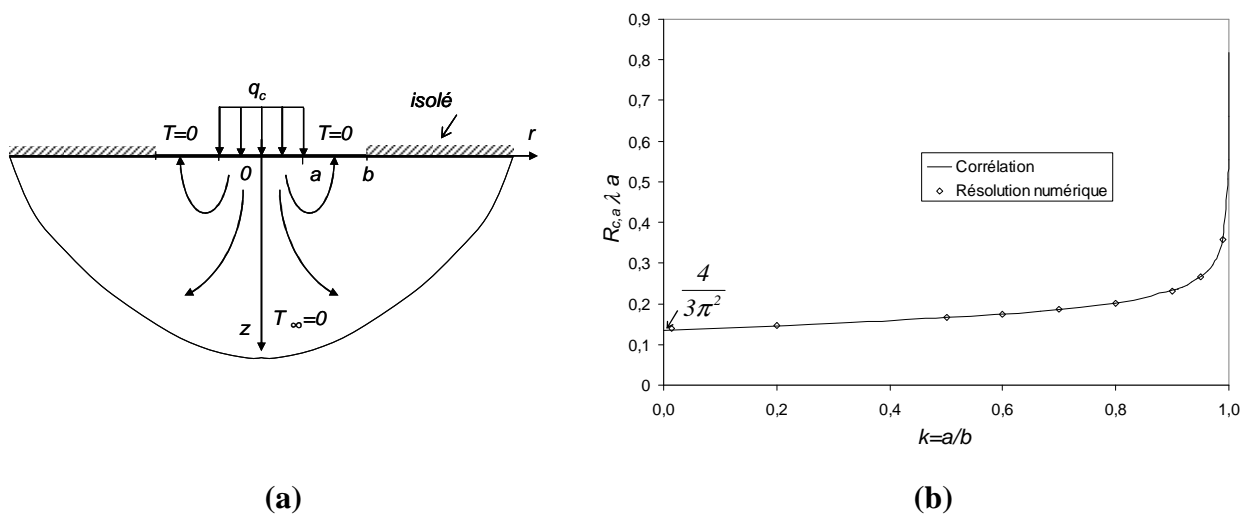


Fig. 4 : Contact avec retournement des lignes de flux (a) et Résistance de constriction stationnaire correspondante (b)