

Quadripôles pour l'étude de la diffusion dans les matériaux à profils de propriétés continus.

Application aux transferts couplés thermique/hydrique dans les sols non saturés.

Jean-Claude KRAPEZ^{1*}, Sandra PROFICE^{1,2}

¹ONERA Département Optique Théorique et Appliquée - MVA
BA 701 – 13300 Salon de Provence

²Univ. Bordeaux, I2M, Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence

* (auteur correspondant : krapez@onera.fr)

Résumé - L'approche quadripolaire classique est étendue à une classe particulière de matériaux à profils de propriétés thermiques continus suivant une direction z , à savoir les matériaux à γ uniforme, où γ est une propriété définie de la façon suivante à partir de l'effusivité et de la capacité thermique

volumique : $\gamma = \frac{1}{2c} \frac{db}{dz}$. Dans le cas général d'un matériau à profils continus quelconques pour b et

c , l'utilisation de quadripôles à γ uniforme autorise une discrétisation sur un nombre de couches inférieur à ce que nécessiteraient les quadripôles classiques à effusivité et diffusivité uniformes, pour une même précision recherchée sur la température. Après une présentation des quadripôles à γ uniforme dans le domaine thermique, on étend ce concept à l'étude de la diffusion instationnaire de l'eau dans les sols non saturés en exploitant le parallèle entre l'équation de la chaleur et l'équation de Richard exprimée avec la charge hydraulique. Un couplage faible entre le champ hydrique et le champ thermique est ensuite considéré pour traiter le problème complet de diffusion de la chaleur et de l'eau dans les sols.

Nomenclature

a	diffusivité, $m^2.s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>
b	effusivité, $J.m^{-2}.K^{-1}.s^{-1/2}$	γ facteur de gradient, $s^{-1/2}$
c	capacité thermique volumique, $J.K^{-1}.m^{-3}$	<i>Indices</i>
k	conductivité, $W.m^{-1}.K^{-1}$	h hydrique
p	variable de Laplace, s^{-1}	0 état initial
T	température, K	E, S entrée, sortie
z	abscisse, m	

1. Introduction

On trouve couramment dans la nature et dans les produits manufacturés des matériaux présentant des variations continues de leurs propriétés, notamment leurs propriétés thermiques. Cela résulte souvent d'un processus de diffusion de matière (eau dans les sols, carbone dans les aciers cimentés) ou d'un processus de déposition/croissance donnant naissance à un revêtement dans lequel est imprimé un gradient de phase, de porosité ou de structure. En contrôlant la gradation des propriétés entre le coeur et la surface du matériau on réalise ce qu'on appelle un FGM (functionally graded material). Pour simuler le comportement thermique d'un matériau présentant un profil continu de propriété suivant une direction (généralement la normale à la surface) une approche consiste à le discrétiser en couches de propriétés homogènes. Le nombre de couches requis peut être important suivant

l'ampleur des gradients de propriétés et la précision recherchée. Une alternative consiste à chercher une solution analytique qui prend en compte les distributions spatiales continues de conductivité et de capacité thermique. Il n'existe pas de solution explicite pour des distributions quelconques. Dans l'hypothèse où les variations d'effusivité sont faibles, on peut toutefois trouver une solution analytique approchée [1]. Des solutions exactes n'ont été trouvées que pour un nombre limité de profils. Ainsi, pour une capacité uniforme et un profil de conductivité exponentiel de la forme $k_0 \exp(-z/d)$, ou $k_\infty [1 - R \cdot \exp(-z/d)]$, la solution fait intervenir respectivement les fonctions de Bessel d'ordre 1 [2] et la fonction hypergéométrique [3]. Lorsque les deux profils sont de forme exponentielle : $k_0 \exp(-z/d_k)$ et $c_0 \exp(-z/d_c)$, la solution fait apparaître les fonctions de Kelvin d'ordre $\nu = d_c / (d_k - d_c)$ [4]. Pour un profil de conductivité en $k_0 z^n$ et un profil de capacité en $c_0 z^m$, la solution, dans l'espace de Laplace, fait intervenir les fonctions de Bessel modifiées d'ordre $\nu = (1-n)/(m-n+2)$ [5]. Dans le cas particulier où $m = -n + 2 = 0$, les solutions sont des fonctions puissance de z [5]. Mis à part ce dernier cas, la solution analytique s'avère complexe et coûteuse en temps de calcul. Pour cette raison, et pour ne pas s'imposer une contrainte d'uniformité sur le profil de capacité, nous avons préféré retenir l'approche décrite par [6] et qui consiste à paramétrer, non pas la conductivité et la capacité, mais simplement la variable $\gamma = \frac{1}{2c} \frac{db}{dz}$. Le fait de la supposer uniforme sur l'épaisseur d'un mur conduit à une solution relativement simple que nous avons traduite sous forme quadripolaire. Le concept a été étendu au cas de la diffusion de l'eau dans les sols insaturés (équation de Richard). Un couplage a ensuite été mis en œuvre pour simuler la diffusion thermique et hydrique dans un bicouche avec γ uniforme dans chaque couche.

2. Diffusion dans un mur à facteur de gradient γ uniforme

2.1. Modèle thermique

L'équation de la chaleur pour un transfert unidirectionnel dans un matériau non uniforme en conductivité et en capacité thermique s'écrit :

$$c(z) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Après une transformée de Laplace, on obtient :

$$c(z) (p\bar{T} - T_0) = \frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{d\bar{T}}{dz} \right) \quad (2)$$

où T_0 est la répartition initiale. En introduisant $\xi \equiv \int_0^z du / \sqrt{a(u)}$, la racine du temps de diffusion sur l'intervalle $[0, z]$, l'équation (2) devient :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} + 2\gamma \frac{d\bar{T}}{d\xi} - p\bar{T} = -T_0 \quad (4)$$

avec :

$$\gamma \equiv \frac{1}{2b} \frac{db}{d\xi} = \frac{1}{2c} \frac{db}{dz} \quad (5)$$

Lorsque γ est uniforme, l'équation (4) se ramène à une équation différentielle du second degré à coefficients constants, dont la solution générale est :

$$\bar{T} = \exp(-\gamma\xi)[D_1 \cosh(\alpha\xi) + D_2 \sinh(\alpha\xi)] + y(\xi) \quad (6)$$

avec :

$$\alpha \equiv \sqrt{\gamma^2 + p} \quad (7)$$

et $y(\xi)$ est une solution particulière de (4) :

$$y = \frac{1}{p} \left[T_0 + \frac{2\gamma}{p} \frac{dT_0}{d\xi} + \left(\frac{1}{p} + \left(\frac{2\gamma}{p} \right)^2 \right) \frac{d^2T_0}{d\xi^2} + \dots \right] \quad (8)$$

La méthode quadripolaire passe par l'établissement d'une relation matricielle entre les transformées de la température et de la densité de flux φ , en deux positions E et S du matériau, d'abscisse 0 et ξ , agrémentée d'un terme dépendant des conditions initiales ou des sources internes [7] :

$$\begin{pmatrix} \bar{T} \\ \bar{\varphi}/b \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T} \\ \bar{\varphi}/b \end{pmatrix}_S - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \exp(\gamma\xi) \begin{pmatrix} \cosh(\alpha\xi) - \frac{\gamma}{\alpha} \sinh(\alpha\xi) & \frac{\sinh(\alpha\xi)}{\alpha} \\ \frac{p}{\alpha} \sinh(\alpha\xi) & \cosh(\alpha\xi) + \frac{\gamma}{\alpha} \sinh(\alpha\xi) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_S - y_E - By'_S \\ Cy_S + y'_E - Dy'_S \end{pmatrix} \quad (11)$$

Dans le cas de profils d'effusivité et de capacité thermique quelconques, une approximation par un mur à γ uniforme peut être entreprise en fixant γ à sa valeur moyenne approchée par :

$$\bar{\gamma} \approx [b_s - b_0] / 2 \int_0^L c(u) du \quad (12)$$

Si les variations de γ sur l'intervalle $[0, L]$ sont importantes, il convient de scinder le mur en plusieurs couches à γ uniforme.

Après exploitation des conditions aux limites, le retour dans l'espace réel par transformation inverse de Laplace est effectué avec la méthode de De Hoog [8]. L'approche qui a été appliquée par la suite a consisté à calculer la réponse indicielle en température puis à convoluer cette réponse avec la fonction temporelle de flux à la surface.

2.2. Comparaison avec un modèle à strates homogènes pour la simulation de la température de surface des sols

Le modèle ci-dessus a été utilisé pour simuler le comportement thermique d'un sol dans lequel serait présent un gradient d'humidité (sol comprenant 4% de matière organique, le restant étant constitué de 11% d'argile et de 89% de quartz). La distribution temporelle de

flux à la surface a été calculée à partir des variables météo de la base de données Alpillès-RESEDA [9] (variables échantillonnées à 20 min d'intervalle sur près d'un an). Dans cet exercice nous avons supposé que l'humidité varie linéairement entre la surface où elle y est fixée au niveau résiduel θ_{res} de 7%, et une profondeur de 1m à partir de laquelle θ est fixée à la capacité au champ θ_{sup} de 38%. Dans cette partie, nous avons artificiellement maintenu constant ce profil. La capacité thermique associée est fournie par le modèle de DeVries et la conductivité par le modèle de Johansen modifié par Lu et Horton [10]. Ainsi, la capacité thermique volumique varie de 1.3 à 2.6 MJ.K⁻¹.m⁻³ et l'effusivité de 879 à 2008 J.m⁻².K⁻¹.s^{-1/2} entre la surface et 1 m de profondeur. Le paramètre γ n'est pas uniforme dans cette couche : il décroît de 1.1·10⁻³ à 7.0·10⁻⁵ s^{-1/2}. Modéliser cette couche avec un seul quadripôle à γ uniforme ne sera donc a priori pas suffisant ; une discrétisation en plusieurs sous-couches permettra de gagner en précision. L'exercice a été fait avec des quadripôles à γ uniforme et des quadripôles classiques à effusivité et diffusivité uniformes. Le sol au-delà de 1m de profondeur a été modélisé comme un milieu semi-infini d'effusivité uniforme. Le résultat de calcul de la température de surface, sur une durée de 30 jours et avec une stratification à 50 sous-couches à γ uniforme, a servi de référence. L'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre de sous-couches est rapportée sur la fig. 1.

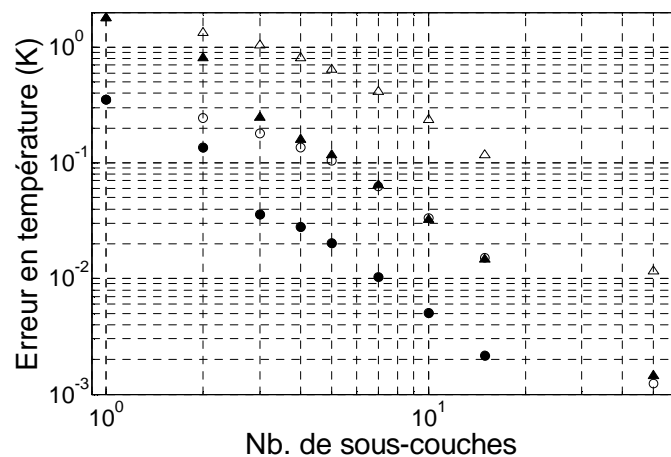


Figure 1 : Erreur quadratique suivant le nombre de sous-couches utilisées pour discrétiser la couche supérieure de sol, siège d'un profil linéaire d'humidité. Triangles : couches à effusivité/diffusivité uniformes, cercles : couches à γ uniforme. Symboles vides : découpage régulier, symboles pleins : découpage quadratique.

La stratification opérée était soit régulière soit quadratique, les sous-couches étant alors plus minces près de la surface. On constate que les quadripôles à γ uniforme offrent un gain en précision d'un facteur allant de 5 à 7. Pour atteindre une erreur quadratique d'environ 0.1K, deux sous-couches à γ uniforme sont nécessaires. Avec des quadripôles classiques, il en faut quinze avec des épaisseurs identiques, ou cinq avec une épaisseur croissant en z^2 .

3. Utilisation des quadripôles à γ uniforme pour le transfert hydrique et pour les transferts couplés thermique/hydrique

Le transfert d'eau dans les sols insaturés est décrit par l'équation de Richard qui, dans sa forme en H , la charge hydraulique, avec $H = h - z$, où h est la pression capillaire ou pression matricielle, s'écrit :

$$c_h \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_h \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right) \right) \quad (10)$$

La relation qui lie la pression capillaire et la teneur en eau dépend du type de sol. Différentes lois paramétriques ont été proposées pour la courbe de rétention associée [11]. L'équ. (10) est de la même forme que l'équ. (1), on peut donc utiliser les mêmes outils qu'en thermique. Ainsi, lorsque la capacité capillaire c_h et la conductivité hydraulique k_h dépendent seulement de l'espace, une solution analytique peut être proposée avec les quadripôles décrits ci-dessus. Il est nécessaire d'introduire l'effusivité hydraulique $b_h = \sqrt{k_h c_h}$ pour définir, de la même façon que dans l'éq. (5), le paramètre de gradient hydraulique γ_h . Dans la réalité, l'équation de Richard est fortement non-linéaire ; en effet, les paramètres k_h et c_h dépendent de l'humidité, selon des lois en puissance du degré de saturation [11]. Une solution semi-analytique approchée peut néanmoins être obtenue par une méthode séquentielle : au cours de chaque période, k_h et c_h sont figées aux valeurs dictées par le champ d'humidité prévalant au début la période. Le problème est donc périodiquement linéarisé. A l'issue de chaque période, le champ de la charge hydraulique obtenu constitue la condition initiale pour la période suivante. Pour simplifier, ce champ est interpolé linéairement sur chaque couche suivant ξ à partir des valeurs de charge hydraulique calculées aux bornes des couches. La relation quadripolaire hydrique devient alors :

$$\begin{pmatrix} \overline{H} - H_0/p \\ \overline{\phi}_h/b_h \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{H} - H_0/p \\ \overline{\phi}_h/b_h \end{pmatrix}_S - \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} \quad (8)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \frac{H'_0}{p} \left[\frac{2\gamma_h}{p} \begin{pmatrix} A_h - 1 \\ C_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_h \\ 1 - D_h \end{pmatrix} \right] \quad (11)$$

La fig. 2 illustre une simulation de couplage thermique et hydrique dans un sol.

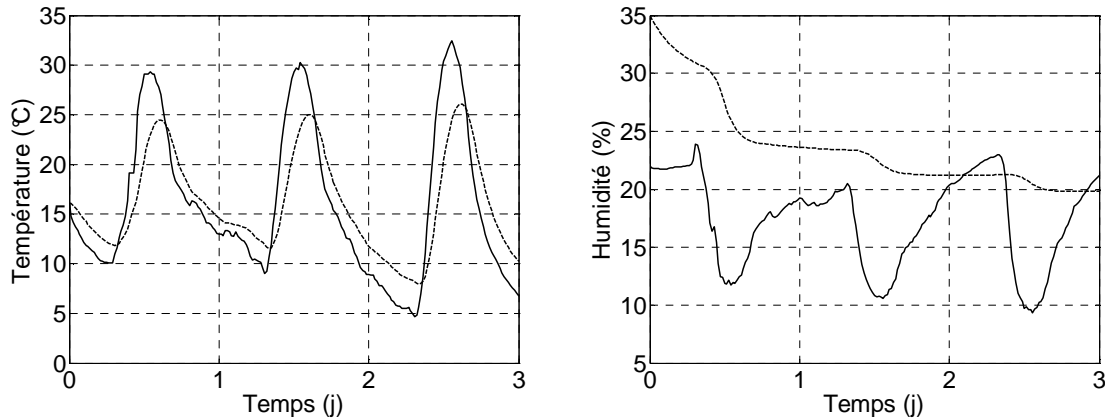


Figure 2 : Résultats d'une simulation sur trois jours de la diffusion couplée hydrique/thermique dans un sol bicouche. Trait continu : en surface, tirets : à l'interface

Le sol est scindé en deux couches de 10 et 30 cm à facteurs γ thermique et hydrique uniformes. Les variables température et humidité à la base de la couche inférieure sont maintenues constantes. La température initiale est considérée uniforme et égale à la température de l'air alors que la charge hydraulique initiale évolue linéairement entre les valeurs prescrites par une humidité de 22%, 35% et 30% aux profondeurs de 0, 10 et 40 cm. Le couplage thermique/hydrique se manifeste par le fait que les propriétés thermiques dépendent de l'humidité et par le fait que le flux hydrique d'évaporation/condensation à la surface dépend de la température de surface en référence à celle de l'air. Pour gagner en stabilité, il a été nécessaire, au cours de chaque séquence de progression analytique, de calculer les flux thermiques et hydrique par un schéma semi-implicite, c'est-à-dire en moyennant leurs valeurs dictées par les variables T et H en surface au début et à la fin de la séquence, ce qui impose une démarche itérative.

4. Conclusion

Nous avons présenté un nouvel outil pour le calcul semi-analytique de la température dans un milieu présentant des variations continues de propriétés. Cet outil peut aussi être utilisé pour les calculs de transfert couplés thermique/hydrique dans les sols insaturés. Pour remédier au caractère non-linéaire de l'équation hydrique nous avons appliqué une procédure séquentielle où l'on fige les profils des propriétés sur chaque période.

Références

- [1] J.-C. Krapez, Thermal effusivity profile characterization from pulse photothermal data, *J. Appl. Phys.*, 87-9 (2000), 4514-4524.
- [2] A. K. S. Thakur, Periodic heat transfer through an inhomogeneous medium, *Lett. Heat Mass Transfer*, 9 (1982), 385-394.
- [3] J. Fivez, C. Glorieux, Case hardening inspection of steel using photothermal phase maxima, *J. Appl. Phys.*, 108 (2010), 103506-1-6.
- [4] M. A. Karam, A thermal wave approach for heat transfer in a non uniform soil, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 64 (2000), 1219-1225.
- [5] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Oxford Sc. Pub., 2nd ed. (1959).
- [6] T. Ishiguro, A. Makino, N; Araki, N. Noda, Transient temperature response in functionally gradient materials, *Int. J. Thermophys.*, 14-1 (1993), 101-121.
- [7] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal quadrupoles*, Wiley, (2000).
- [8] F.R. De Hoog, J.H. Knight, A.N. Stokes, An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 3 (3) (1982) 357–366.
- [9] <http://w3.avignon.inra.fr/reseda/>
- [10] O.T. Farouki, *Thermal properties of soils*, Trans Tech Publ., (1986).
- [11] M. T. Van Genuchten, A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Sc. Soc. Am. J.*, 44 (1980), 892-898.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet de recherche ENVIRO de l'ONERA. Les auteurs tiennent à remercier A. Oliosio pour l'accès à la base de données de la campagne de télédétection Alpilles-RESEDA.