

# Conditions théoriques optimales de fonctionnement d'un élément thermoélectrique en mode refroidissement, incluant l'effet Thomson

Damien SGORLON\*, Gilles FRAISSE, Julien RAMOUSSE

Laboratoire Optimisation de la Conception et Ingénierie de l'Environnement  
Savoie Technolac – 73376 Le Bourget-du-Lac

\* (auteur correspondant : damien.sgorlon@univ-savoie.fr)

**Résumé** - La modélisation simplifiée retenue habituellement pour décrire le comportement énergétique d'un système thermoélectrique ne tient pas compte de l'effet Thomson. Cette hypothèse n'est plus valable dans le cas où les écarts de température sont importants. De ce fait, elle peut induire des erreurs non négligeables dans l'estimation des performances, et notamment du COP maximal. Ces dernières sont généralement exprimées en fonction du facteur de mérite, déterminé à partir des caractéristiques du matériau. En intégrant l'effet Thomson, on obtient de nouvelles expressions définissant les conditions optimales de fonctionnement. On observe que l'effet Thomson est mal pris en compte dans le cas du matériau étudié ( $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ), lorsque le coefficient Seebeck est supposé constant. Il est alors nécessaire d'ajouter au modèle la dépendance vis-à-vis de la température des faces du coefficient Seebeck. On obtient ainsi un nouveau facteur de mérite, qui n'est plus une propriété intrinsèque au matériau, car il dépend également des températures.

## Nomenclature

*COP* coefficient de performance  
*I* intensité, *A*  
*K* conductance thermique,  $W.K^{-1}$   
*P* puissance électrique, *W*  
*Q* flux de chaleur, *W*  
*R* résistance électrique,  $\Omega$   
*T* température, *K*  
*U* tension, *V*  
*Z* facteur de mérite,  $K^{-1}$   
*ΔT* écart de température ( $T_C - T_F$ ), *K*

*Symboles grecs*  
 $\alpha$  coefficient Seebeck,  $V.K^{-1}$   
 $\lambda$  conductivité thermique,  $W.m^{-1}.K^{-1}$   
 $\rho$  résistivité électrique,  $\Omega.m$   
 $\tau$  coefficient Thomson,  $V.K^{-1}$

*Indices et exposants*  
*C* côté chaud  
*F* côté froid  
*m* moyen  
*opt* optimal – à  $COP_{\text{maximal}}$

## 1. Introduction

Les effets thermoélectriques sont utilisés dans les pompes à chaleur thermoélectriques (PACTE) pour la production de chaleur ou de froid. Le COP de ces systèmes dépend du matériau, du courant électrique appliqué et de la différence de température entre les sources chaude et froide de la pompe. Comparé aux pompes à chaleur thermodynamiques, les PACTE présentent de nombreux avantages : absence de compresseur et de fluide frigorigène, réduction des opérations de maintenance et augmentation de la fiabilité du système [1]. Les PACTE rivalisent avec les pompes à chaleur traditionnelles en terme de performance, dès lors que les écarts de température entre les faces sont faibles (quelques dizaines de degrés au plus), ce qui peut correspondre à des applications « bâtiment » [2]. Les performances sont limitées, en particulier à cause des propriétés des matériaux thermoélectriques habituellement utilisés : les semi-conducteurs. Ces propriétés jouent un rôle important dans la définition du facteur de mérite *Z*, avec le produit  $Z.T_m$  généralement situé entre 0,6 et 1 pour ces matériaux.

Bien souvent, la modélisation simplifiée employée pour dimensionner les systèmes thermoélectriques et décrire leur comportement énergétique n'est pas complète. En effet, l'effet Thomson est tout d'abord quasi systématiquement négligé à tort. Les auteurs de [3] ont ainsi montré, grâce à une étude analytique 1D, que l'effet Thomson joue un rôle direct sur la distribution de température dans un élément thermoélectrique. Par ailleurs, on considère habituellement que les propriétés du matériau thermoélectrique sont constantes dans tout le volume et déterminées en fonction de la température moyenne. Concernant l'effet Seebeck, il est présent aux interfaces des matériaux. Une solution est alors de considérer deux coefficients Seebeck, tenant compte des températures de chaque face de l'élément thermoélectrique [4].

Les résultats de l'étude permettent de définir le point de fonctionnement optimal d'une PACTE, correspondant au COP maximal en refroidissement. Les expressions analytiques simplifiées des grandeurs (COP, intensité, tension, puissance électrique, et flux de chaleur) optimales sont obtenues selon le modèle utilisé : le modèle « Standard » (équations habituellement considérées : coefficients constants calculés à  $T_m$ , sans Thomson), le modèle « Thomson » (qui intègre l'effet Thomson, avec un coefficient Seebeck constant, pris à  $T_m$ ), et le modèle « Thomson-Seebeck » (prise en compte de l'effet Thomson et définition de deux coefficients Seebeck calculés à  $T_F$  et  $T_C$ ).

## 2. Modélisation simplifiée d'un élément thermoélectrique

### 2.1. Modèle « Standard »

Le modèle « Standard » est le plus couramment utilisé [1-2]. Les propriétés du matériau (conductivité thermique  $\lambda$ , résistivité électrique  $\rho$ , et coefficient Seebeck  $\alpha$ ) sont prises à la température  $T_m$  de la jambe, définie comme la moyenne des températures des jonctions :

$$T_m = \frac{T_C + T_F}{2} \quad (1)$$

Cette hypothèse sur la température reste valable dans le cas où l'effet Joule n'est pas trop important. Par ailleurs, l'écart de température entre les faces étant faible en mode refroidissement, la valeur de  $T_m$  restera proche des températures de face. Les équations (2) et (3) donnent les flux de chaleur côté froid et côté chaud respectivement.

$$Q_F = \alpha \cdot I \cdot T_F - \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T \quad (2)$$

$$Q_C = \alpha \cdot I \cdot T_C + \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T \quad (3)$$

La puissance électrique nécessaire à la production de ces flux est alors :

$$P = Q_C - Q_F = R \cdot I^2 + \alpha \cdot I \cdot \Delta T \quad (4)$$

Enfin, les expressions (5) et (6) indiquent respectivement les COP froid (mode refroidissement) et chaud (mode chauffage) :

$$COP_F = \frac{Q_F}{P} = \frac{\alpha \cdot I \cdot T_F - \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T}{R \cdot I^2 + \alpha \cdot I \cdot \Delta T} \quad (5)$$

$$COP_C = \frac{Q_C}{P} = \frac{\alpha \cdot I \cdot T_C + \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T}{R \cdot I^2 + \alpha \cdot I \cdot \Delta T} \quad (6)$$

## 2.2. Modèles « Thomson » et « Thomson-Seebeck »

Bien que le modèle « Thomson » ( $\alpha$  constant) soit en contradiction avec l'équation (7), cette approche est également utilisée dans les modèles analytiques [5]. Lorsqu'on intègre l'effet Thomson, il est nécessaire de tenir compte de la variation du coefficient Seebeck en fonction de la température [4], comme dans le modèle « Thomson-Seebeck ».

### 2.2.1. Modèle « Thomson »

Le coefficient Thomson est défini par l'équation (7). On suppose, comme pour l'effet Joule, que l'effet Thomson est réparti de manière symétrique entre les côtés chaud et froid [4], et les flux chaud et froid sont décrits par (8) et (9), en supposant  $\alpha$  constant ( $\alpha = \alpha_{(T_m)}$ ).

$$\tau = T \cdot \left( \frac{\partial \alpha(T)}{\partial T} \right) \Big|_{T_m} \quad (7)$$

$$Q_F = \alpha \cdot I \cdot T_F - \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T + \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot I \cdot \Delta T \quad (8)$$

$$Q_C = \alpha \cdot I \cdot T_C + \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T - \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot I \cdot \Delta T \quad (9)$$

On en déduit une nouvelle expression de la puissance électrique (10), qui permet de déterminer les COP correspondant aux côtés chaud et froid de l'élément thermoélectrique.

$$P = Q_C - Q_F = R \cdot I^2 + (\alpha - \tau) \cdot I \cdot \Delta T \quad (10)$$

### 2.2.2. Modèle « Thomson-Seebeck »

On définit ici deux coefficients Seebeck, fonctions des températures de jonction, tels que :

$$\alpha_F = \alpha(T_F) \quad \alpha_C = \alpha(T_C)$$

Les flux froid et chaud et la puissance électrique sont donnés par les relations (11) à (13), avec  $\tau$  défini à partir de l'équation (7) :

$$Q_F = \alpha_F \cdot I \cdot T_F - \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T + \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot I \cdot \Delta T \quad (11)$$

$$Q_C = \alpha_C \cdot I \cdot T_C + \frac{1}{2} R \cdot I^2 - K \cdot \Delta T - \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot I \cdot \Delta T \quad (12)$$

$$P = (\alpha_C \cdot T_C - \alpha_F \cdot T_F) \cdot I + R \cdot I^2 - \tau \cdot I \cdot \Delta T \quad (13)$$

## 3. Performances optimales d'une PACTE

### 3.1. Comparaison des expressions

L'intensité correspondant au fonctionnement optimal est celle pour laquelle le COP atteint sa valeur maximale, c'est-à-dire l'intensité pour laquelle l'équation (14) est vérifiée. Connaissant l'expression de l'intensité optimale, on déduit ensuite les autres grandeurs optimales (COP, flux froid et chaud, puissance électrique, tension) en injectant simplement l'expression obtenue pour  $I_{opt}$ .

$$\frac{\partial COP}{\partial I} = 0 \quad (14)$$

<i>Modèle</i>	<b>STANDARD</b>	<b>THOMSON</b>	<b>THOMSON – SEEBECK</b>
Facteur de mérite	$Z = \frac{\alpha^2}{\rho \cdot \lambda}$	$Z' = \frac{\alpha(\alpha - \tau)}{\rho \cdot \lambda}$	$Z'' = \frac{\left( \frac{\alpha_C \cdot T_C - \alpha_F \cdot T_F - \tau}{\Delta T} \right)^2}{\rho \cdot \lambda}$
Facteur M	$M = \sqrt{1 + Z \cdot T_m}$	$M' = \sqrt{1 + Z' \cdot T_m}$	$M'' = \sqrt{1 + Z'' \cdot T_m}$
Facteur A	-	$A' = \alpha - \tau$	$A'' = \frac{\alpha_C \cdot T_C - \alpha_F \cdot T_F - \tau}{\Delta T}$
Intensité	$I_{opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{\alpha \cdot T_m} (1 + M)$	$I'_{opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{\alpha \cdot T_m} (1 + M')$	$I''_{opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{\alpha \cdot T_m} (1 + M'')$
Tension optimale	$V_{opt} = A \cdot \Delta T \frac{M}{(M-1)}$	$V'_{opt} = A' \cdot \Delta T \frac{M'}{(M'-1)}$	$V''_{opt} = A'' \cdot \Delta T \cdot \left( 1 + \frac{A''}{\alpha \cdot (M''-1)} \right)$
Puissance froide optimale	$Q_{F\_opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{T_m} \left[ (M+1) \cdot \left( T_F - \frac{\Delta T}{2} \left( \frac{1}{M-1} \right) \right) - T_m \right]$	$Q'_{F\_opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{T_m} \left[ (M'+1) \cdot \left( T_F - \frac{\Delta T}{2} \left( \frac{A'}{\alpha \cdot (M'-1)} \right) \right) - T_m \right]$	$Q''_{F\_opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{T_m} \left[ (M''+1) \cdot \left( T_F - \frac{\Delta T}{2} \left( \frac{A''}{\alpha \cdot (M''-1)} \right) \right) - T_m \right]$
Puissance chaude optimale	$Q_{C\_opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{T_m} \left[ (M+1) \cdot \left( T_C - \frac{\Delta T}{2} \left( \frac{1}{M-1} \right) \right) - T_m \right]$	$Q'_{C\_opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{T_m} \left[ (M'+1) \cdot \left( T_C + \frac{\Delta T}{2} \left( \frac{A'}{\alpha \cdot (M'-1)} \right) \right) - T_m \right]$	$Q''_{C\_opt} = \frac{K \cdot \Delta T}{T_m} \left[ (M''+1) \cdot \left( T_C + \frac{\Delta T}{2} \left( \frac{A''}{\alpha \cdot (M''-1)} \right) \right) - T_m \right]$
COP froid maximal	$COP_{F\_opt} = \frac{T_m}{\Delta T} \left( \frac{M-1}{M+1} \right) - \frac{1}{2}$	$COP'_{F\_opt} = \left( \frac{\alpha}{A'} \right) \frac{T_m}{\Delta T} \left( \frac{M'-1}{M'+1} \right) - \frac{1}{2}$	$COP''_{F\_opt} = \left( \frac{\alpha}{A''} \right) \frac{T_m}{\Delta T} \left( \frac{M''-1}{M''+1} \right) - \frac{1}{2}$
COP chaud maximal	$COP_{C\_opt} = \frac{T_m}{\Delta T} \left( \frac{M-1}{M+1} \right) + \frac{1}{2}$	$COP'_{C\_opt} = \left( \frac{\alpha}{A'} \right) \frac{T_m}{\Delta T} \left( \frac{M'-1}{M'+1} \right) + \frac{1}{2}$	$COP''_{C\_opt} = \left( \frac{\alpha}{A''} \right) \frac{T_m}{\Delta T} \left( \frac{M''-1}{M''+1} \right) + \frac{1}{2}$

Tableau 1 : Expressions des performances optimales d'une PACTE, en fonction de la modélisation retenue

Le tableau 1 donne les expressions issues des modèles « Thomson » et « Thomson-Seebeck », mises sous des formes similaires à celles données dans la littérature (cas « Standard »).

Bien que les expressions des différents modèles aient des formes similaires, on note quelques différences par rapport au modèle « Standard », à commencer par le facteur de mérite  $Z$ , qui n'est fonction, dans ce cas, que des propriétés du matériau [6]. C'est également le cas dans le modèle « Thomson », où intervient toutefois le coefficient  $\tau$ , notamment dans l'expression du COP maximal. En revanche, le facteur de mérite défini dans le modèle « Thomson-Seebeck » est fonction des niveaux de température. Cela s'explique par la dépendance à la température des faces du coefficient Seebeck, ce qui améliore la précision du modèle. Dans ce cas, le COP maximal dépend du coefficient  $\tau$  mais aussi de  $T_C$  et  $T_F$ .

### 3.2. Validation des expressions liées au point de fonctionnement optimal

On note d'abord qu'en imposant aux modèles « Thomson » et « Thomson-Seebeck » les hypothèses du cas « Standard » ( $\tau = 0$ ,  $\alpha_F = \alpha_C = \alpha$ ) [6], les expressions deviennent identiques. Par ailleurs, la figure 1 montre bien que les expressions du tableau 1 fournissent les valeurs des paramètres de fonctionnement optimal liés au modèle auquel elles se rapportent. En effet, l'évolution du  $COP_C$  en fonction de l'intensité atteint un optimum correspondant à la valeur déterminée à partir des expressions du tableau 1, pour les modèles « Thomson » et « Thomson-Seebeck ». Nous avons également validé cet aspect pour les autres paramètres.

On modélise ensuite sous ANSYS (logiciel d'éléments finis) un élément de  $Bi_2Te_3$  (voir propriétés dans le tableau 2 [7]), de longueur 1,4 mm, avec une section de 1,4 mm<sup>2</sup> et soumis aux températures  $T_C = 300K$  et  $T_F = 270K$ . La sensibilité au maillage a été étudiée, et nous avons retenu 5000 mailles. On considèrera par la suite ce modèle comme référence, car il intègre l'effet Thomson comme défini dans l'équation (6) et permet une description plus précise du coefficient Seebeck et des autres paramètres au sein du matériau.

Conductivité thermique	$\lambda(T) = (62605 - 277,7 * T + 0,4131 * T^2) * 10^{-4}$	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
Résistivité électrique	$\rho(T) = (5112 + 163,4 * T + 0,6279 * T^2) * 10^{-10}$	$[\Omega.m]$
Coefficient Seebeck	$\alpha(T) = (22224 + 930,6 * T - 0,9905 * T^2) * 10^{-9}$	$[V/K]$
Coefficient Thomson	$\tau(T) = (930,6 - 2 * 0,9905 * T) * 10^{-9} * T$	$[V/K]$

Tableau 2 : Propriétés de l'élément en  $Bi_2Te_3$  [7]

La figure 2 représente les écarts relatifs entre les modèles simplifiés et la référence, pour chaque grandeur (COP, intensité, tension, puissance électrique et flux chaud et froid). Comme prévu, on observe que le modèle « Thomson » ne permet pas d'être précis sur la détermination du point de fonctionnement optimal, car l'erreur est proche de 10% sur les différents paramètres (-9,5% pour le  $COP_C$  par exemple). En revanche, les modèles « Standard » et « Thomson-Seebeck » donnent des résultats proches de la référence. Cela met en évidence la nécessité d'inclure la dépendance du coefficient Seebeck aux températures de face, dès lors qu'on souhaite prendre en compte l'effet Thomson. Le modèle « Standard » reste toutefois suffisant pour déterminer le point de fonctionnement optimal d'un système thermoélectrique en mode refroidissement, tant que les écarts de température restent faibles.

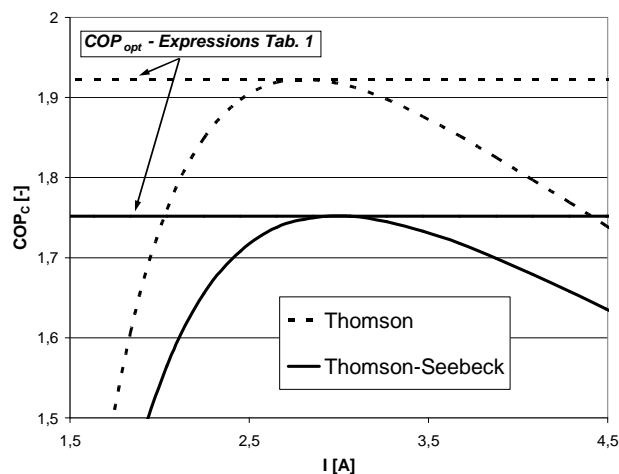


Figure 1 : Evolution du  $COP_C$  en fonction de  $I$ , pour les modèles « Thomson » et « Thomson-Seebeck »

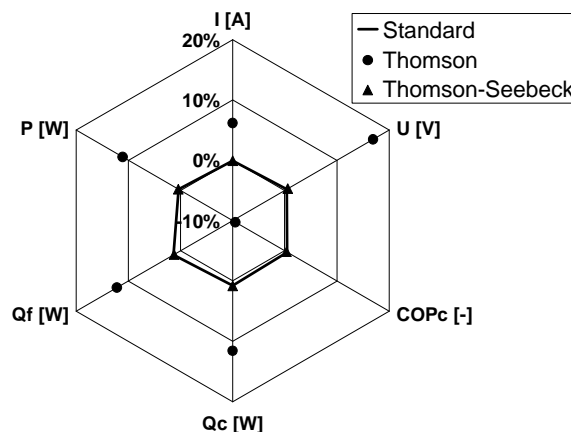


Figure 2 : Erreur relative sur les paramètres optimaux

## 4. Conclusion

On a déterminé des expressions simples pour les grandeurs liées au fonctionnement optimal d'un système thermoélectrique, selon l'hypothèse retenue sur l'effet Thomson. Ces grandeurs dépendent uniquement des facteurs de mérite relatifs à chaque approche, et des écarts de température, qui restent faibles dans le cas considéré.

Bien qu'en apparence incomplète, la modélisation simplifiée standard donne des résultats relativement précis quant au point de fonctionnement optimal, dans le cas considéré. Ce n'est plus vrai en génération de courant, car les écarts de températures sont plus importants. La prise en compte de l'effet Thomson ne peut se faire qu'en considérant la dépendance du coefficient Seebeck aux températures de faces, sans quoi la modélisation n'est pas valide.

## Références

- [1] B.J. Huang, C.J. Chin, C.L. Duang, A design method of thermoelectric cooler. *Int. Journal of refrigeration*, 23 (2000), 208-218.
- [2] M. Cosnier, G. Fraisse, L. Luo. An experimental and numerical study of a thermoelectric air-cooling and air-heating system, *Int. Journal of refrigeration*, 31 (2008), 1051 – 1062.
- [3] M.J. Huang, R.H. Yen, A.B. Wang, The influence of the Thomson effect on the performance of a thermoelectric cooler, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), 413 – 418.
- [4] G. Fraisse, Les performances énergétiques des systèmes thermoélectriques, de l'échelle élémentaire au bâtiment, *Réunion du GDR Thermoélectricité*, (Grenoble, 6-7 juil. 2010).
- [5] A. Chakraborty, B.B. Saha, S. Koyama, K.C. Ng, Thermodynamic modelling of a solid state thermoelectric cooling device: Temperature–entropy analysis. *Int. Journal of Heat Mass Transfer*, 49 (2006), 3547-3554.
- [6] D. M. Rowe, *CRC Handbook of Thermoelectrics*, D.M. Rowe, 3 (1995).
- [7] S.B. Riffat, X. Ma, R. Wilson, Performance simulation and experimental testing of a novel thermoelectric heat pump system, *Applied Thermal Engineering*, 26 (2006), 494-501.

## Remerciements

Les auteurs remercient pour son soutien le projet SYSPACTE (FUI 7).