

# Modèle éléments finis de type moindres carrés pour des applications en Tomographie Optique

Olivier BALIMA<sup>1</sup>, Thomas PIERRE<sup>2\*</sup>, André CHARETTE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Groupe de Recherche en Ingénierie des Procédés et Systèmes, Université du Québec à Chicoutimi, QC, Canada G7H 2B1.

<sup>2</sup> LIMAT<sup>B</sup>, Université de Bretagne Sud, Rue de Saint Maudé, BP 92 116, 56 321 Lorient Cedex, France.

(\*auteur correspondant : [thomas.pierre@univ-ubs.fr](mailto:thomas.pierre@univ-ubs.fr))

**Résumé** – Cette communication présente une extension d’une formulation moindres carrés/éléments finis associée à la méthode des ordonnées discrètes pour résoudre des problèmes de rayonnement collimaté dans le domaine fréquentiel. Une des caractéristiques de cette méthode est la distinction entre la partie collimatée et la partie diffusée du rayonnement pour une meilleure considération et une meilleure maîtrise des discontinuités dues aux conditions limites de type Dirichlet, notamment utilisées dans des applications en Tomographie Optique. Comparés à des solutions références, des tests numériques évaluent la sensibilité du modèle pour les cas suivants : milieux diffusants isotrope et anisotrope, avec et sans modulation fréquentielle.

## Nomenclature

$I$	luminance, $W.m^{-2}.sr^{-1}$	$\Delta, \partial\Delta^-$	domaines
$P$	éclairage, $W.m^{-2}$	$\Phi$	fonction de phase
$S_c$	terme source, $W.m^{-2}$	$\Omega$	direction du rayonnement
$c$	vitesse de la lumière, $m.s^{-1}$	<i>Indices et exposants</i>	
$q_o$	densité de flux, $W.m^{-2}$	$c$	collimaté(e)
$w_m$	coefficient de pondération	$m$	ordonnée discrète
<i>Symboles grecs</i>		$s$	diffusé(e)
$\delta$	fonction Dirac, $sr^{-1}$	$1$	partie réelle
$\sigma$	coefficient de diffusion, $m^{-1}$	$2$	partie imaginaire
$\kappa$	coefficient d’absorption, $m^{-1}$		
$\omega$	pulsation, $s^{-1}$		

## 1. Introduction

Au cours de ces dernières années des techniques de contrôles cliniques et de diagnostics médicaux se sont significativement développées. Ceci a été rendu possible d’une part grâce à une meilleure compréhension de l’interaction entre la lumière et les propriétés optiques des milieux semi-transparents tels que les tissus humains ; et d’autre part par l’amélioration des systèmes d’émission et de détection de la lumière. Une des avancées les plus spectaculaires est la possibilité de cartographier les propriétés optiques de différentes parties du corps humain à partir de mesures superficielles, permettant ainsi de connaître l’état physiologique et pathologique des tissus. Cette technologie d’imagerie est un problème inverse appelée Tomographie Optique : elle consiste à identifier les paramètres d’un modèle numérique basé sur l’Équation de transfert radiatif (ETR) à travers la minimisation de l’écart entre les mesures et les prédictions du modèle.

De nos jours, les principales améliorations dans la Tomographie Optique concernent la rapidité et la précision des algorithmes dans la transformation des mesures en cartographie de propriétés optiques des tissus [1]. Parmi ces améliorations, et c’est une des orientations de cette communication, la formulation de l’ETR dans le domaine fréquentiel a reçu un grand intérêt [2, 3]. Elle propose une alternative à certaines méthodes ayant recours à l’utilisation de l’ETR mais avec une dépendance au temps posant des problèmes techniques [4]. De plus, une

attention particulière a été apportée à la formulation en éléments finis associée aux ordonnées discrètes pour résoudre l'ETR, grâce notamment à sa simplicité, à sa flexibilité, et à sa capacité de gérer des géométries complexes et des équations d'advection.

À partir de la formulation standard de Galerkin, de nombreuses études ont tenté d'améliorer la précision des modèles telles que les formulations Petrov-Galerkin, moindres carrés, ou encore Galerkin discontinu [5]. Une étude comparative a montré que les formulations moindres carrés et Galerkin discontinu présentaient relativement la même précision quand les parties collimatée et diffusée du rayonnement étaient séparées [5]. Cette technique de séparation supprime les fortes discontinuités liées aux conditions limites de type Dirichlet utilisées en Tomographie Optique avec un rayonnement collimaté. Cependant, si la formulation Galerkin discontinu est souvent utilisée pour gérer les discontinuités, elle ne permet pas de remonter aux solutions aux conditions limites, ces dernières étant mal définies. Par ailleurs, sa discrétisation conduit à un système relativement lourd comparé à celui que donne les moindres carrés. Par conséquent, couplée à la méthode des gradients conjugués, la formulation moindres carrés, utilisée dans cette étude, présente une alternative intéressante pour obtenir un modèle précis.

## 2. Le transfert radiatif dans le domaine fréquentiel

La formulation fréquentielle de l'ETR dans un domaine  $\Delta$  est donnée par [1] :

$$\left[ \Omega \cdot \nabla + \left( \frac{i\omega}{c} + \kappa + \sigma \right) \right] I(r, \Omega, \omega) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} I(r, \Omega', \omega) \Phi(\Omega', \Omega) d\Omega', \quad (1)$$

où  $\Omega$  est la direction de propagation de la lumière,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  est la fréquence de modulation,  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu,  $\kappa = \kappa(r)$  et  $\sigma = \sigma(r)$  sont respectivement les coefficients d'absorption et de diffusion,  $I(r, \Omega, \omega)$  est la luminance, puissance par unité d'angle solide et de surface normale à la direction de propagation à la position  $r$  (position spatiale  $\in \Delta$ ) et dans la direction  $\Omega$ . La fonction de phase  $\Phi(\Omega', \Omega)$  (voir §5) est celle de Henyey-Greenstein [6] :

$$\Phi(\Omega', \Omega) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos(\Theta))^{3/2}}, \quad (2)$$

$g$  étant le facteur d'anisotropie et  $\Theta$  l'angle de diffusion entre les directions  $\Omega$  et  $\Omega'$ . La condition limite de (1) est un flux extérieur qui pénètre dans le milieu suivant une direction collimatée  $\Omega_c$  de telle sorte que :

$$I(r_o, \omega, \Omega) = q_o(r_o, \omega) \delta(\Omega - \Omega(r_o)) \quad \Omega \cdot \bar{n} < 0, \quad (3)$$

où  $q_o$  est une densité de flux et  $\delta$  une fonction Dirac. Comme traitée dans [6, 7], la luminance  $I$  est séparée en deux composantes collimatée  $I_c$  et diffusée  $I_s$ . La composante collimatée obéit à la loi d'extinction :

$$\left[ \frac{i\omega}{c} + \Omega \cdot \nabla + (\kappa + \sigma) \right] I_c(r, \omega) = 0, \quad (4)$$

dont la condition limite est  $I_c(r_o, \omega) = q_o(r_o, \omega)$ . La solution de la composante collimatée est utilisée comme terme source dans l'équation de la composante diffusée :

$$\left[ \Omega \cdot \nabla + \left( \frac{i\omega}{c} + \kappa + \sigma \right) \right] I_s(r, \Omega, \omega) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} I_s(r, \Omega', \omega) \Phi(\Omega', \Omega) d\Omega' + S_c, \quad (5)$$

où  $S_c = S_c(r, \Omega, \omega)$  est donné en (6).

$$S_c = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} I_c(r, \omega) \delta(\Omega - \Omega_c) \Phi(\Omega', \Omega_c) d\Omega' = \frac{\sigma}{4\pi} I_c(r, \omega) \Phi(\Omega_c, \Omega) \quad (6)$$

Pour une application en Tomographie Optique, la quantité mesurable utilisée est l'éclairement à la frontière :

$$P(r) = \int_{\Omega \cdot \vec{n} > 0} I(r, \Omega, \omega) \Omega \cdot \vec{n} d\Omega \quad \forall r \in \partial\Delta. \quad (7)$$

### 3. La méthode des ordonnées discrètes

Dans cette formulation, les intégrales sur l'angle solide sont remplacées par une quadrature numérique [8]. Ainsi l'équation (5) est-elle réécrite, en prenant compte d'améliorations données par [9], pour chaque direction  $\Omega_m$  de la façon suivante :

$$\left[ \Omega_m \cdot \nabla + \left( \frac{i\omega}{c} + \kappa + \sigma - \frac{\sigma}{4\pi} \Phi(\Omega_m', \Omega_m) w_m \right) \right] I_s^m = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{m'=1, m' \neq m}^M I_s^{m'} \Phi(\Omega_m', \Omega_m) w_{m'} + S_c^m \quad (8)$$

avec  $M$  le nombre de directions de la quadrature, et  $w_m$  et  $I_s^m$  respectivement le coefficient de pondération [10] et la luminance dans la direction  $\Omega_m$ . La condition limite correspondante s'écrit sous la forme  $I_s^m(r_o, \omega) = 0$  avec  $\Omega_m \cdot \vec{n} < 0$ . Associée à cette condition limite, l'équation (8) doit être résolue dans les  $M$  directions de la quadrature. Mais auparavant, la fonction de phase doit aussi être re-normalisée pour éviter les erreurs de normalisation sous la forme  $\bar{\Phi}(\Omega_m', \Omega_m) = f_{m'} \Phi(\Omega_m', \Omega_m)$  où  $f_{m'}$  est le facteur de re-normalisation :

$$f_{m'} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^M w_i \Phi(\Omega_m', \Omega_i). \quad (9)$$

### 4. La formulation moindres carrés/éléments finis

L'équation (8) et sa condition limite forment une équation d'advection qui peuvent être résolues par différentes méthodes numériques, c'est celle par moindres carrés/éléments finis qui est présentée ici. Pour simplifier la présentation de la méthode, il est possible de l'écrire et de la compacter sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \beta \cdot \nabla u + bu = f & \Rightarrow L(u) = f & \in \Delta \\ u = h & \Rightarrow G(u) = h & \in \partial\Delta^- \end{aligned} \quad (10)$$

$\beta$  étant la direction d'advection,  $u$  les champs de valeurs complexes,  $b$  le coefficient complexe d'extinction,  $f$  le terme source complexe,  $h$  la fonction complexe incidente appliquée à la frontière du système,  $L(u)$  et  $G(u)$  des opérateurs, et enfin  $\partial\Delta^-$  le domaine tel que  $\Omega_m \cdot \vec{n} < 0$ .

La formulation moindres carrés/éléments finis de (10) consiste à trouver  $u \in X$  tel que :

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in X, \quad (11)$$

où  $X$  est l'espace des éléments finis où  $u$  est recherché.  $B(u, v)$  et  $F(v)$  sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire définies par :

$$\begin{aligned} B(u, v) &= (L(u), L(v))_{\Delta} + \varepsilon (G(u), G(v))_{\partial\Delta^-}, \\ F(v) &= (f, L(v))_{\Delta} + \varepsilon (h, G(v))_{\partial\Delta^-}, \end{aligned} \quad (12)$$

où  $\varepsilon + 1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un paramètre de pénalisation de la condition limite. À noter que les parties réelle et imaginaire des équations détaillées précédemment, respectivement d'indice 1 et 2, s'écriront par la suite sous la forme suivante :  $u = u_1 + iu_2$  ;  $b = b_1 + ib_2$  ;  $f = f_1 + if_2$  ;  $h = h_1 + ih_2$ . Une fois la relation (12) développée, la matrice obtenue relative au problème posé par  $u \in X$  est telle que  $B(u,v) = F(v)$ ,  $\forall v \in X$  :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

avec :

$$A_{11} = \int_{\Delta} [(\beta \cdot \nabla u_1 + b_1 u_1)(\beta \cdot \nabla v_1 + b_1 v_1) + b_2^2 u_1 v_1] dx + \varepsilon \int_{\partial \Delta^-} u_1 v_1 ds,$$

$$A_{12} = \int_{\Delta} [(\beta \cdot \nabla u_2 + b_1 u_2) b_2 v_1 - (\beta \cdot \nabla v_1 + b_1 v_1) b_2 u_2] dx,$$

$$A_{21} = \int_{\Delta} [(\beta \cdot \nabla v_2 + b_2 v_2) b_2 u_1 - (\beta \cdot \nabla u_1 + b_2 u_1) b_2 v_2] dx,$$

$$A_{22} = \int_{\Delta} [(\beta \cdot \nabla u_2 + b_2 u_2)(\beta \cdot \nabla v_2 + b_1 v_2) + b_2^2 u_2 v_2] dx + \varepsilon \int_{\partial \Delta^-} u_2 v_2 ds,$$

$$F_1 = \int_{\Delta} (\beta \cdot \nabla v_1 + b_1 v_1 - b_2 v_2) f_1 dx + \varepsilon \int_{\partial \Delta^-} v_1 h_1 ds,$$

$$F_2 = \int_{\Delta} (\beta \cdot \nabla v_2 + b_1 v_2 - b_2 v_1) f_2 dx + \varepsilon \int_{\partial \Delta^-} v_2 h_2 ds.$$

## 5. Tests numériques sans modulation fréquentielle

Dans un premier exemple (Figure 1), un milieu bidimensionnel carré de propriétés  $\kappa = 0\text{m}^{-1}$ ,  $\sigma = 1\text{m}^{-1}$ ,  $L = H = 1\text{m}$ , est considéré et reçoit un rayonnement collimaté  $I_c$  en son sommet transparent sous incidence normale. Les autres faces sont opaques. La fréquence  $\omega$  est nulle et c'est la quadrature  $S_{14}$  (112 directions) qui est utilisée et comparée à [7].

La formulation moindres carrés/éléments finis est appliquée avec les solutions analytique (exacte) et numérique de  $I_c$ . Les résultats sont comparés avec [7] pour une fonction de phase diffusante isotrope et une solution exacte de  $I_c$  (Figure 2). Il apparaît que les résultats obtenus avec la formulation moindres carrés/éléments finis s'ajustent bien sur ceux de [7]. Cette procédure de résolution s'applique donc bien pour résoudre précisément les parties collimatée et diffusée du rayonnement.

La diffusion anisotrope arrière (type B1) est également présentée en Figure 3 et comparée à [7] : de même que précédemment, les résultats concordent très bien. Il est intéressant de voir à présent la prise en compte de la modulation fréquentielle.

## 6. Tests numériques avec modulation fréquentielle

Le second test est présenté Figure 4 : c'est un milieu bidimensionnel ( $0,02 \times 0,02\text{m}^2$ ) absorbant et diffusant avec un rayonnement d'incidence normale qui pénètre le domaine par le milieu du côté gauche sur une largeur  $d = 0,0004\text{m}$ . Vingt détecteurs sont distribués sur la face opposée, le facteur d'anisotropie  $g$  de (2) vaut 0,9 et la fréquence  $\omega$  est fixée à 600MHz. Le milieu est finement discrétisé autour de la source collimatée pour bien considérer le gradient de la luminance à la frontière gauche.

La solution est calculée avec la quadrature  $T_6$  de Thurgood [10] pour différentes valeurs des coefficients d'absorption et de diffusion (Tableau 1). Les Figures 5 et 6 présentent respectivement les amplitudes normalisées et les déphasages correspondants par rapport à la

source incidente collimatée. Il apparaît qu'à fréquence constante, une augmentation des coefficients d'absorption et de diffusion entraîne une diminution de l'amplitude calculée aux détecteurs comme précisée dans [6].

La sensibilité de la solution est également liée à la finesse du maillage (Tableau 2) et aussi à l'ordre de la quadrature. Des résultats sont présentés Figures 7 et 8. L'amplitude du signal augmente quand le maillage s'affine tandis que le décalage de phase devient moins sensible. Ceci est dû à l'amélioration de la prise en compte des conditions limites quand le maillage devient plus fin. Concernant l'ordre de la quadrature (non présenté graphiquement), le plus grand donne de meilleurs résultats avec une solution plus fine [10]. Au cours de ces tests, la quadrature T5 est suffisante pour obtenir de bons résultats.

Cas tests	1	2	3
$\kappa(\times 10^3 \text{m}^{-1})$	1	5	1
$\sigma(\times 10^3 \text{m}^{-1})$	10	10	50

Tableau 1 : valeurs des coefficients d'absorption et de diffusion.

Maillage	1	2	3	4
Degrés de liberté	1 266	4 837	10 784	19 019
Nb. de triangles	2 416	9 448	21 232	37 592
Taille min. des côtés ( $\times 10^{-3} \text{m}$ )	0,038	0,018	0,012	0,090
Taille max. des côtés ( $\times 10^{-3} \text{m}$ )	1,208	0,601	0,043	0,032

Tableau 2 : caractéristiques des maillages.

## 7. Conclusion

Dans cette étude, une extension des moindres carrés/éléments finis associée à la méthode des ordonnées discrètes pour résoudre des problèmes de milieu irradié dans le domaine fréquentiel a été présentée. Les résultats des tests numériques d'abord sans puis avec une modulation fréquentielle ont montré que cette méthode est précise comparée à d'autres solutions de référence, dans les deux cas de diffusions isotrope et anisotrope. À l'avenir, cette formulation sera ainsi utilisée pour résoudre des modèles directs dans des applications de Tomographie Optique dans le domaine fréquentiel.

## Références

- [1] S. R. Arridge, Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems* 15 (1999), R41–R93.
- [2] K. Ren, G. Bal, A. H. Hielscher, Frequency domain optical tomography based on the equation of radiative transfer, *Society for Industrial and Applied Mathematics* 28 (4) (2006), 1463–1489.
- [3] H. K. Kim, A. Charette, Frequency domain optical tomography using a conjugate gradient method without line search, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 104 (2007), 248–256.
- [4] A. Klose, U. Netz, J. Beuthan, A. H. Hielscher, Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer - part 1: forward model, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 72 (2002), 691–713.
- [5] O. Balima, A. Charette, D. Marceau, Comparison of light transport models in view of optical tomography applications, *Advanced Computational Methods in Engineering*, Liege (Belgium, May, 2008).
- [6] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Mechanical Engineering, McGraw Hill (1993).
- [7] T. Kim, H. Lee, Radiative transfer in two-dimensional anisotropic scattering media with collimated incidence, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 42-3 (1989), 225–238.
- [8] W. Fiveland, Discrete ordinates solutions of the radiation transport equation for rectangular enclosures, *Journal of Heat Transfer* 106 (1984), 699–706.
- [9] J. Chai, H. Lee, S. Patankar, Improved treatment of scattering using the discrete ordinates method, *Journal of Heat Transfer* 116 (1994), 260–263.

[10] C. Thurgood, *A critical Evaluation of the Discrete Ordinates Method using the HEART and  $T_n$  Quadrature*, Ph.D. thesis, Department of Chemical Engineering Queen's University, Kingston (1992).

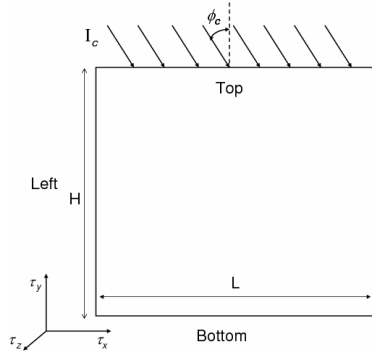


Figure 1 : géométrie du cas test sans modulation fréquentielle.

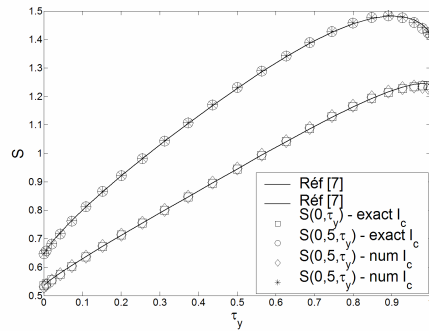


Figure 2 : évolution du terme source pour une diffusion isotrope.

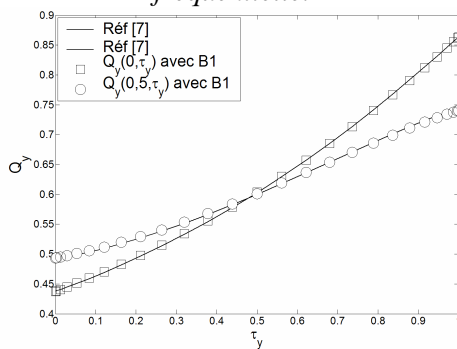


Figure 3 : flux avec la fonction de phase B1.

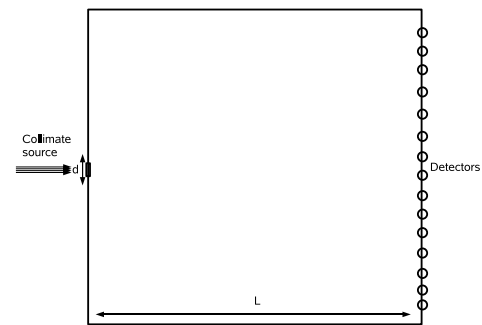


Figure 4 : géométrie du cas test avec modulation fréquentielle.

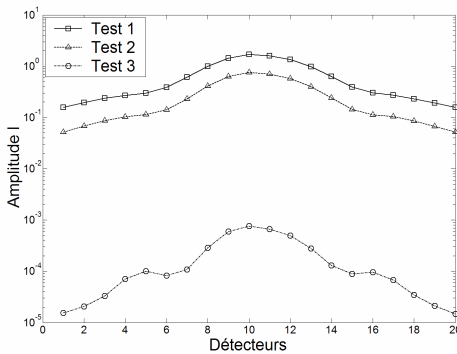


Figure 5 : amplitudes aux détecteurs pour différents  $\kappa$  et  $\sigma$ .

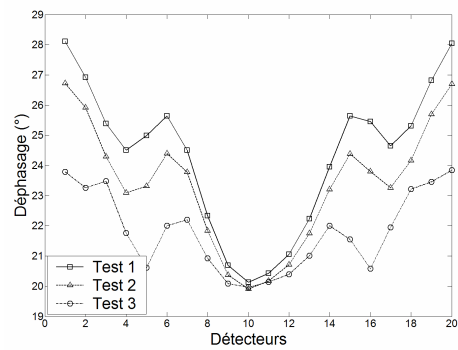


Figure 6 : déphasage aux détecteurs pour différents  $\kappa$  et  $\sigma$ .

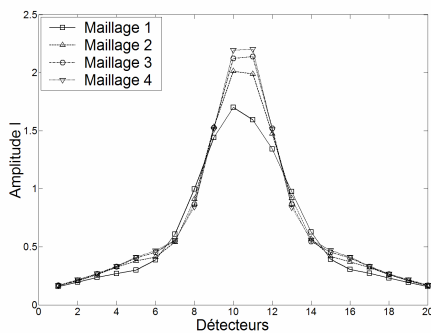


Figure 7 : amplitudes aux détecteurs pour différents maillages.

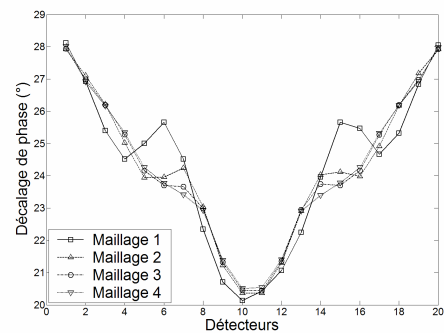


Figure 8 : déphasage aux détecteurs pour différents maillages.