

Étude numérique du développement de rouleaux longitudinaux dans un écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard

Sílvia da Costa HIRATA^{1*}, Sophie MERGUI¹

¹FAST - UMR CNRS 7608 (Univ. Paris VI et Paris XI), Bât. 502, 91405 Orsay Cedex, France

* (auteur correspondant : silvia@fast.u-psud.fr)

Résumé - Une étude numérique est proposée portant sur le déclenchement d'instabilités thermoconvectives dans un écoulement de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas et refroidie par le haut, dit écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Dans ce type de configuration, rencontrée par exemple dans les procédés de dépôt par vapeur chimique, plusieurs types de structures thermoconvectives sont susceptibles d'apparaître. En particulier, pour des nombres de Rayleigh supérieurs à une valeur critique ($Ra_{cr} = 1708$) et pour des nombres de Reynolds modérés ($Re > O(10)$ dans l'air), on observe des structures stationnaires sous forme de rouleaux longitudinaux orientés dans le sens de l'écoulement. C'est à ce type de structure, responsable des non-homogénéités dans les transferts, que l'on s'intéresse dans le présent travail. Les résultats numériques ont été obtenus à l'aide d'un code spatio-temporel pour la résolution des équations de Navier-Stokes en trois dimensions, utilisant la méthode des différences finies. Nous montrons que le nombre de rouleaux observés dépend non seulement du rapport de forme transverse, mais également de la température d'entrée de l'écoulement dans le canal et des conditions limites thermiques appliquées aux parois latérales, qui conditionnent la mise en place des gradients de température à l'origine du déclenchement des rouleaux. Les prévisions numériques présentent un bon accord avec des résultats expérimentaux obtenus au laboratoire.

1. Introduction

Cette étude porte sur les conditions de développement d'un type d'instabilité rencontré dans un écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB), dont la configuration consiste en un écoulement forcé en conduite rectangulaire chauffée par le bas et refroidie par le haut. Étant riche en types de structures thermoconvectives susceptibles d'apparaître (sous forme de rouleaux longitudinaux, transverses, sinueux, variqueux, etc.), cette configuration a fait l'objet de nombreux travaux de recherche fondamentale. En outre, l'étude de l'écoulement de PRB présente également des applications industrielles, comme l'amélioration du procédé de dépôt par vapeur chimique (CVD). Dans ce procédé, parmi les différents types de réacteur existants, on rencontre des réacteurs thermiques rectangulaires à parois froides, dont la configuration est précisément celle de PRB. Dans ce type de configuration et pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés (typiquement $Re > O(10)$ dans l'air), on observe l'apparition de structures sous forme de rouleaux longitudinaux, i.e., des rouleaux orientés dans le sens du gradient de pression imposé. Dans le procédé CVD, ces structures sont responsables de la formation de dépôts non-uniformes (en forme de stries parallèles à l'axe du canal), préjudiciables à la qualité du produit final.

Les premières études dédiées à la stabilité des rouleaux longitudinaux dans un canal d'extension latérale infinie différentiellement chauffé ont été développées dans les années 1960's et 1970's [1-4]. Dans cette configuration, les rouleaux longitudinaux représentent une instabilité de type convectif, et sont ainsi le résultat de l'amplification de perturbations présentes dans l'écoulement [5]. Dans un écoulement réel, les parois latérales du canal jouent le rôle d'une telle perturbation, et les rouleaux longitudinaux se développent grâce au confinement.

Récemment, Pabiou *et al.* [6] ont mené une étude expérimentale portant sur les rouleaux sinueux, instabilité secondaire résultant de la déstabilisation des rouleaux longitudinaux. Dans cette étude, il a été détecté une forte sensibilité de l'état de base en rouleaux longitudinaux aux conditions limites, qui

s'est avéré très difficile à contrôler expérimentalement. La nécessité d'une meilleure compréhension de l'influence des différents paramètres sur le développement des rouleaux longitudinaux a motivé la présente étude numérique. Nous analysons l'influence du rapport de forme transverse, de la température d'entrée de l'écoulement dans le canal et des conditions limites thermiques appliquées aux parois latérales sur le développement des rouleaux. Il est montré qu'il existe une longueur d'onde critique pour laquelle on observe dislocation/coalescence des rouleaux, et que le gradient horizontal de température dans la couche limite thermique au voisinage des parois latérales joue un rôle fondamental dans le nombre de rouleaux observé. Les résultats des simulations numériques montrent un très bon accord avec les résultats des expériences menées par ailleurs au laboratoire.

2. Procédure numérique

Pour l'obtention des résultats numériques, nous avons utilisé un code spatio-temporel, performant pour la NEC-SX5, permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes 3D instationnaires, sous l'hypothèse de Boussinesq. Le code a été réalisé afin de pouvoir reproduire les expériences sur les écoulements de PRB réalisées en [6], dont la configuration consiste en un canal rectangulaire de dimensions $H \times W \times L$ (cf. Figure 1). Les parois inférieure et supérieure sont maintenues respectivement aux températures chaude T_h et froide T_c . Les conditions limites imposées aux parois latérales peuvent être du type Neumann ou Dirichlet. Une zone d'entrée de température constante T_e et de longueur L_e est placée en amont du canal. Finalement, un écoulement de Poiseuille à température T_e est imposé à l'entrée. Les grandeurs choisies pour adimensionner le problème sont la hauteur du canal H , la vitesse moyenne de l'écoulement U_{moy} et l'écart de température imposée entre les parois supérieure et inférieure du canal $\Delta T = T_c - T_h$. L'origine du système étant placée au début de la plaque chauffée, le domaine de calcul est défini par $(X, Y, Z) \in [-A_e, A - A_e] \times [0, B] \times [0, 1]$ en coordonnées cartésiennes sans dimensions, où $A = L/H$, $B = W/H$ et $A_e = L_e/H$.

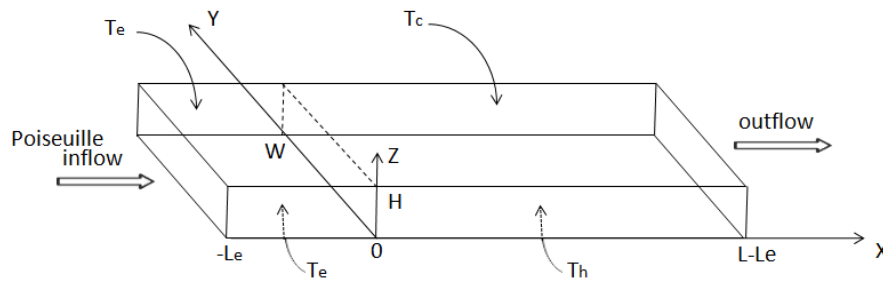


Figure 1 : Configuration géométrique du problème étudié.

Dans le code, les équations sont discrétisées au second ordre en temps et en espace. Une méthode de différences finies centrées est appliquée en espace, sur un maillage décalé cartésien, uniforme dans la direction X et qui peut être raffiné aux parois dans les directions Y et Z. Le schéma temporel en $O(\Delta t^2)$ est du type Adams-Bashforth : traitements explicite des termes convectifs et implicite de la diffusion. L'algorithme d'intégration temporelle et la méthode de découplage vitesse/pression sont basés sur la méthode de projection de Goda. Une description détaillée du code numérique est présentée dans [7].

3. Évolution spatio-temporelle des rouleaux

À l'instant initial, tout le système (parois et écoulement) est isotherme, à la température adimensionnée $\theta_e = (T_e - T_c)/(T_h - T_c)$. Le chauffage ($\theta_h = 1$) est alors imposé à la paroi inférieure tandis que la paroi supérieure est refroidie ($\theta_c = 0$). Sur les parois latérales, nous imposons soit une condition d'adiabaticité, soit une condition de parois chaudes à $\theta_h = 1$. Nous suivons alors

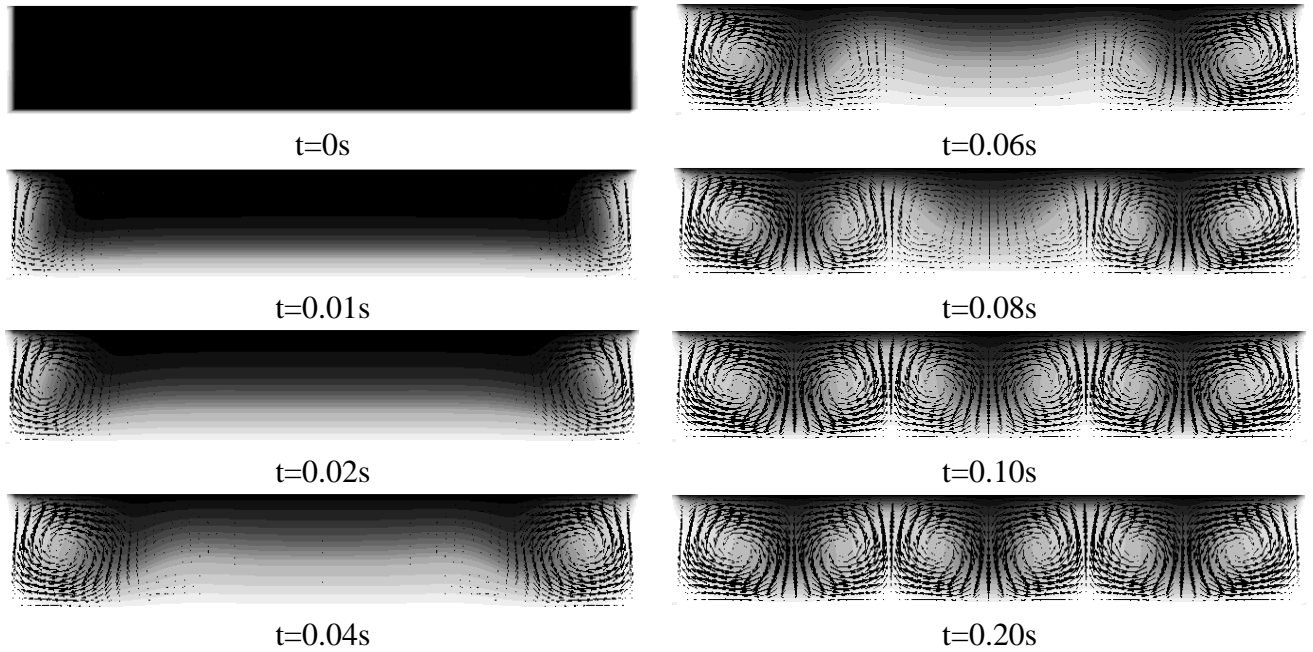


Figure 2 : Évolution temporelle des rouleaux longitudinaux. Coupe transverse ($x = 70H$) du champ de températures et vecteurs vitesse, pour $B = 6$, $\theta_e = 0$ et condition limite de parois latérales chaudes.

l'évolution au cours du temps des structures qui se développent dans le canal. Un scénario typique du développement séquentiel de rouleaux longitudinaux à partir des parois latérales est montré dans la Figure 2, pour des parois latérales chaudes et un rapport de forme $B = 6$. Le temps initial correspond au début du chauffage.

Afin de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux, les paramètres suivants sont fixés : $Ra = 4500$, $Re = 40$ et $Pr = 0.7$. Nous avons vérifié que le nombre de rouleaux observé est indépendant des nombres de Rayleigh et de Reynolds, pour la gamme de paramètres étudié (cf. tableau 1).

Ra	Re	Pr	A_e	A	B	θ_e	CL thermique parois latérales
4500	40	0.7	5	100	$4 \leq B \leq 20$	$0 \leq \theta_e \leq 1$	adiabatiques ou isothermes

Tableau 1 : Gamme de variation des paramètres ajustables du code numérique.

4. Résultats

La Figure 3 présente une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux du nombre de rouleaux N en fonction du rapport de forme transverse du canal B , obtenus pour $\theta_e = 0$. Tout d'abord, on remarque que le nombre de rouleaux dans le canal est pair quel que soit le rapport de forme, grâce à la symétrie du problème. L'observation de la transition de $N = 4$ à $N = 6$ permet de constater que les résultats numériques s'approchent mieux des expériences pour des conditions limites de parois latérales chaudes que pour des parois adiabatiques. Les valeurs maximales du rapport de forme pour l'obtention d'un nombre de rouleaux $N = 4$ sont : $B_{\max} = 4.8$ (numérique, parois adiabatiques), $B_{\max} = 5.2$ (numérique, parois chaudes) et $B_{\max} = 5.4$ (expérimental).

Dans les expériences, les parois latérales sont conductrices de la chaleur. Elles se rechauffent donc progressivement au contact de la paroi inférieure et par l'apport de chaleur dû au mouvement ascendant de la première paire de rouleaux au contact des parois latérales. Dans leur état stationnaire,

ces parois sont alors plus chaudes que le fluide qui entre dans le canal à la température froide. Dans toute la suite, les calculs seront menés pour des conditions limites de parois latérales chaudes.

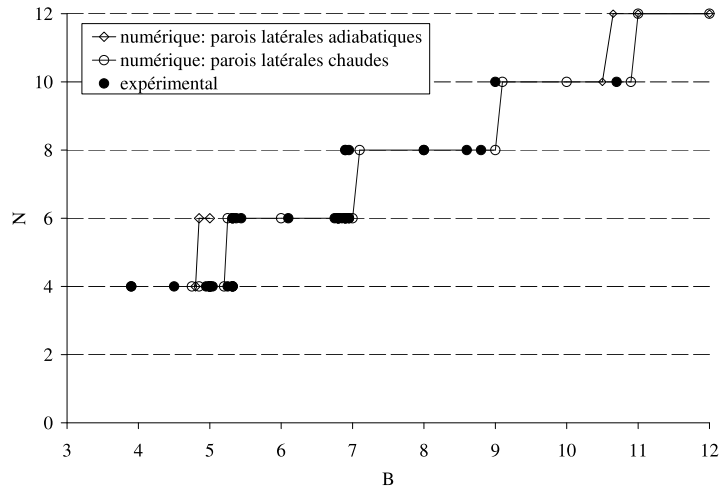
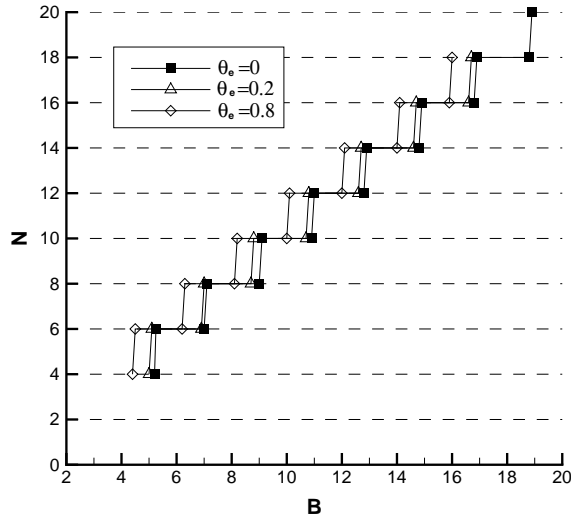


Figure 3 : Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux du nombre de rouleaux N en fonction du rapport de forme B , pour $\theta_e = 0$.

Les rouleaux longitudinaux prennent naissance au voisinage des parois latérales grâce au confinement, c'est-à-dire, grâce à la présence des couches limites dynamiques et thermiques. Nous nous sommes intéressés à analyser l'influence de la température d'entrée de l'écoulement sur le comportement des couches limites et, par conséquent, sur le nombre de rouleaux observé. Les transitions du nombre de rouleaux en fonction du rapport de forme sont présentées dans la Figure 4, pour trois valeurs de la température d'entrée θ_e . Nous observons que, en augmentant θ_e , la transition se produit pour des valeurs plus petites de B (cf. tableau). En effet, pour un rapport de forme fixé, l'augmentation de θ_e diminue les gradients horizontaux de température le long des parois latérales chaudes en début de canal, conduisant à un affaiblissement de l'intensité de convection des rouleaux latéraux lors de leur apparition. Par conséquent, la taille de ces premiers rouleaux diminue, laissant la place pour l'apparition d'une paire supplémentaire de rouleaux au centre. Ce résultat confirme le fait que le comportement des rouleaux longitudinaux est totalement conditionné par les propriétés de l'écoulement le long des parois latérales.

La variation de la taille des rouleaux latéraux dans la zone d'entrée, en fonction de θ_e et pour un rapport de forme fixé, est présentée dans le tableau 2.

Nous avons constaté, numériquement et expérimentalement, l'existence d'un espace critique pour l'apparition d'une paire supplémentaire de rouleaux au centre du canal. Les figures 5a, 5b et 5c montrent la structure de l'écoulement et les profils transverses de température, dans le cas limite où une paire supplémentaire est sur le point d'apparaître au centre du canal, pour $B = 9$. En analysant le profil de température obtenu à $x = 13H$ (Fig. 5b), on détermine l'espace central critique pour l'apparition de la paire supplémentaire, soit environ $2.6H$. Cette valeur est une constante indépendante du rapport de forme, de la température d'entrée et des conditions limites appliquées aux parois latérales, et correspond à la valeur trouvée expérimentalement. Par ailleurs, on peut, à partir de même type de profil tracé loin de la zone d'entrée (Fig. 5c), montrer que la taille des rouleaux est uniforme sur toute la largeur du canal, sauf bien entendu en ce qui concerne les deux rouleaux latéraux. On peut alors définir une longueur d'onde moyenne, λ_{centre}^* , telle que $\lambda_{centre}^*/2 = (B - 2 d_{lat}^*)/(N - 2)$.



N	B_{\max}		
	$\theta_e = 0$	$\theta_e = 0.2$	$\theta_e = 0.8$
4	5.2	5.0	4.4
6	7.0	6.8	6.2
8	9.0	8.7	8.1
10	10.9	10.7	10.0
12	12.8	12.6	12.0
14	14.8	14.6	14.0
16	16.8	16.6	15.9
18	18.8	18.5	17.9

Figure 4 : Résultats numériques du nombre de rouleaux N en fonction du rapport de forme B , pour $\theta_e = 0$, $\theta_e = 0.2$ et $\theta_e = 0.8$.

θ_e	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
d_{lat}^*	1.3 ± 0.05	1.2 ± 0.05	1.1 ± 0.05	1.0 ± 0.05	0.9 ± 0.05	0.8 ± 0.05
N	16	16	16	16	18	18

Tableau 2 : Variation de la taille des rouleaux latéraux (d_{lat}^*) dans la zone de développement, et nombre de rouleaux observés (N), en fonction de la température d'entrée de l'écoulement (θ_e). Valeurs obtenues pour $B = 16$.

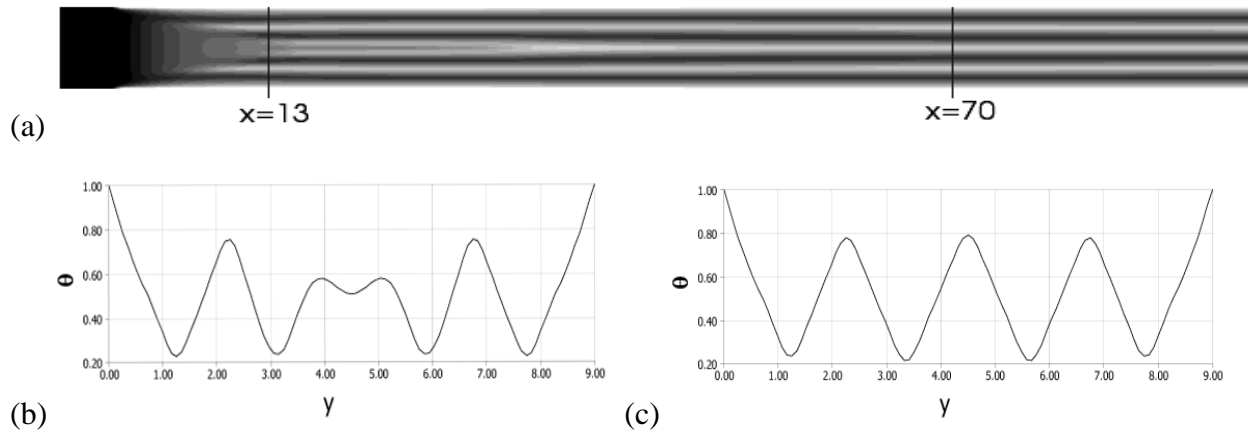


Figure 5 : (a) Coupe horizontale du champ de température stationnaire et profils transverses de température (obtenus à (b) $x = 13H$ et (c) $x = 70H$) pour $z = 0.5H$, $B = 9$ et $\theta_e = 0$.

La Figure 6 montre la longueur d'onde moyenne des rouleaux qui se développent dans le canal dans l'état stationnaire en fonction de B , juste avant l'apparition d'une paire supplémentaire (en ne tenant pas compte de la paire de rouleaux en contact avec les parois latérales). On constate que la longueur d'onde critique des rouleaux centraux tend asymptotiquement vers $\lambda_{centre}^*/2 \approx 1.0125$, correspondant à un nombre d'onde $\alpha = 3.1$. Cette valeur se rapproche des prévisions du nombre d'onde critique le plus instable du problème de Rayleigh-Bénard ($\alpha_c = 3.117$). En observant la figure, on vérifie également que l'influence des parois latérales peut être négligée pour des rapports de forme transverse supérieurs à environ 12.

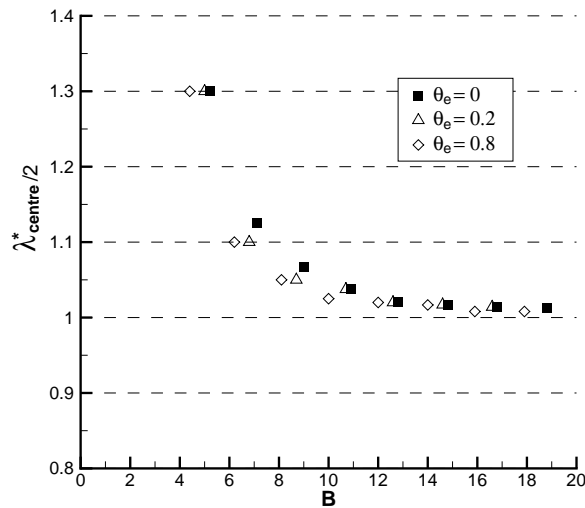


Figure 6 : Longueur d'onde moyenne adimensionnée des rouleaux centraux $\lambda_{centre}^*/2$ en fonction du rapport de forme B , pour différentes valeurs de la température d'entrée.

5. Conclusions

Dans un écoulement de PRB réel, les rouleaux longitudinaux sont déclenchés grâce à la présence des couches limites le long des parois latérales. La température d'entrée de l'écoulement dans le canal, ainsi que les conditions limites thermiques appliquées aux parois latérales, déterminent les gradients de température et donc le comportement du premier rouleau au voisinage des parois, qui va lui même conditionner le développement du reste de la structure. Nous avons par ailleurs montré que l'approximation du canal infini dans la direction transverse est justifiée pour un rapport de forme supérieur à 12. Cette étude a ainsi permis de comprendre la mise en place de la structure en rouleaux longitudinaux et son comportement asymptotique, ce qui permettra aux expérimentateurs de mieux contrôler leurs expériences en se plaçant dans des conditions pour lesquelles la sensibilité aux conditions aux limites est minimale.

Références

- [1] K. S. Gage and W. H. Reid, The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 33 (1968), 21-32.
- [2] F. H. Busse, On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J. Math. & Phys.*, 46 (1967), 140-150.
- [3] F. H. Busse and J. A. Whitehead, Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.*, 47 (1971), 305-320.
- [4] F. H. Busse and R. M. Clever, Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J. Fluid Mech.*, 91 (1979), 319-335.
- [5] P. Carrière and P. A. Monkewitz, Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection, *J. Fluid Mech.*, 384 (1999), 243-262.
- [6] H. Pabiou, S. Mergui and C. Bénard, Wavy secondary instability of longitudinal rolls in Rayleigh-Bénard-Poiseuille flows, *J. Fluid Mech.*, 542 (2005), 175-194.
- [7] A. Benzaoui, X. Nicolas and S. Xin, Efficient vectorized finite difference method to solve the incompressible Navier-Stokes equations for 3D mixed convection flows in high aspect ratio channels, *Num. Heat Transf. Part B*, 48 (2005), 277-302.