

Diagramme de Nyquist des impédances thermiques en excitation fréquentielle.

Sébastien VINTROU, Najib LARAQI, Abderrahmane BAÏRI

Université Paris Ouest - Nanterre La Défense, Laboratoire TIE, IUT Ville d'Avray
Département GTE, 50 R de Sèvres, F92410 Ville d'Avray.

Résumé – En électronique, les modèles d'impédances thermiques de sources de chaleur localisées sur des milieux solides diffusifs sont très utilisés pour calculer les températures de jonction de certains composants. Ils permettent de relier celles-ci directement aux puissances dissipées dans les composants. La connaissance de ces températures est indispensable pour la prédiction précise du comportement électronique des composants à base de semi-conducteur comme les transistors bipolaires à hétérojonction (TBH) par exemple. C'est ainsi que certains logiciels de simulation circuit intègrent des modèles d'impédances thermiques. Ceux-ci doivent être relativement simples et surtout fournir des résultats rapidement. Dans cette contribution nous proposons un modèle caractérisant le comportement thermique d'un composant dédié à un fonctionnement fréquentiel comme cela peut être le cas en transmission rapide de données. On établit des expressions analytiques des impédances thermiques $Z(j\omega)$ dues à des sources de chaleur localisées à la surface de milieux solides diffusifs. Les solutions proposées sont explicites et présentent les avantages de la rapidité en terme de temps de calcul et de la précision. On présente des diagrammes de Nyquist, c.à.d. $\text{Im}(Z)$ en fonction de $\text{Re}(Z)$, en fonction de la pulsation ω et des paramètres géométriques.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	Z	impédance thermique, $m^2.K.W^{-1}$
c	chaleur spécifique, $J.K^{-1}.kg^{-1}$	W,L,H	taille du solide suivant x, y et z, m
d	distance, m	w,l	taille de la source suivant x et y, m
j	nombre imaginaire pur	x,y,z	variables d'espaces, m
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$		
R	résistance thermique, $m^2.K.W^{-1}$		
S	aire, m^2		
s	variable de Laplace, s^{-1}		
T	température, K		
t	temps, s		

Symboles grecs

ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
φ	densité de flux, $W.m^{-2}$
ω	pulsation, $rad.s^{-1}$

1. Introduction

Dans de nombreux modèles de prédiction du comportement électronique des composants à base de semi-conducteur les températures de jonctions apparaissent de façon explicite. Pour améliorer la précision de ces modèles l'évolution transitoire des températures doit être prise en compte. Il est possible pour cela de simuler numériquement les structures détaillées des composants avec les méthodes classiques FEM, FVM ou BEM. Cependant avec ces méthodes les temps de calculs peuvent être relativement longs puisque pour calculer les températures de jonctions il faut au préalable calculer la distribution de températures dans toute la structure.

Dans la littérature, un certain nombre d'auteurs postulent, en émettant certaines hypothèses, que les phénomènes thermiques de ces composants peuvent être ramenés à ceux de sources de chaleurs localisées à la surface de milieux solides diffusifs. Il est alors possible d'utiliser des méthodes analytiques pour relier les températures de jonction à la puissance dissipée par l'intermédiaire d'une impédance thermique Z (en régime permanent c'est la résistance thermique). C'est ainsi que dans [1] les auteurs utilisent une solution analytique

approchée d'une source de chaleur circulaire uniforme et constante sur un milieu semi-infini pour calculer la température de jonction d'un TBH SiGe. Plus récemment dans [2] les auteurs ont utilisé, pour le même type de composant, une solution analytique d'une source de chaleur rectangulaire sur un milieu fini. Les solutions utilisés dans les diverses références que nous avons étudiées sont issus de la résolution de l'équation parabolique de la chaleur. Souvent, quand le régime est transitoire, les auteurs utilisent la transformée de Laplace pour calculer $Z(s)$ (avec s la variable de Laplace). En effet, la transformée de Laplace permet de « capturer » tout le régime transitoire, c.à.d. du point de repos à un régime établi. Dans la mesure où certaines applications, comme en transmission rapide de données, les composants fonctionnent en régime fréquentiel, il peut être intéressant de ne s'occuper que du régime établi. Il convient alors de résoudre l'équation de la chaleur dans le domaine fréquentiel pour trouver l'impédance complexe $Z(j\omega)$ (j est l'imaginaire pur et ω la pulsation). C'est ainsi que dans [3] les auteurs résolvent semi-analytiquement l'équation de la chaleur fréquentielle pour une source carrée uniforme sur un milieu semi-infini. Dans [4] ces mêmes auteurs utilisent la méthode BEM pour résoudre, toujours dans le domaine fréquentiel, le cas d'une source localisée sur un milieu fini.

Dans les références citées précédemment les modèles sont tous à source de chaleur unique, idéals pour traiter les cas de composants mono doigt. Mais les composants peuvent aussi avoir plusieurs doigts pour permettre une meilleure dissipation de la chaleur. Pour traiter le cas des composants multi doigts, on peut alors se tourner vers des modèles thermiques analytiques multi sources [5].

Dans cette contribution nous présentons une solution analytique en régime fréquentiel pour N_s sources de chaleurs sur un milieu fini. Après l'avoir validé pour le cas d'une source unique, nous employons ce modèle pour le cas de 3 sources. Les résultats des impédances fréquentielles sont présentés sur des diagrammes de Nyquist c.à.d. $\text{Im}(Z)$ en fonction de $\text{Re}(Z)$, avec la pulsation ω comme paramètre. Nous étudierons pour les différents cas l'influence des paramètres géométriques.

2. Description du problème

Nous considérons la configuration géométrique de la figure 1 consistant en N_s sources de chaleur rectangulaires φ_n localisées à la surface d'un milieu solide parallélépipédique de dimension ($W \times L \times H$). La source n de dimension ($w_n \times l_n$) est centrée sur le point (x_n, y_n) et la densité de puissance φ_n est supposée uniforme sur la surface $S_n = w_n \times l_n$.

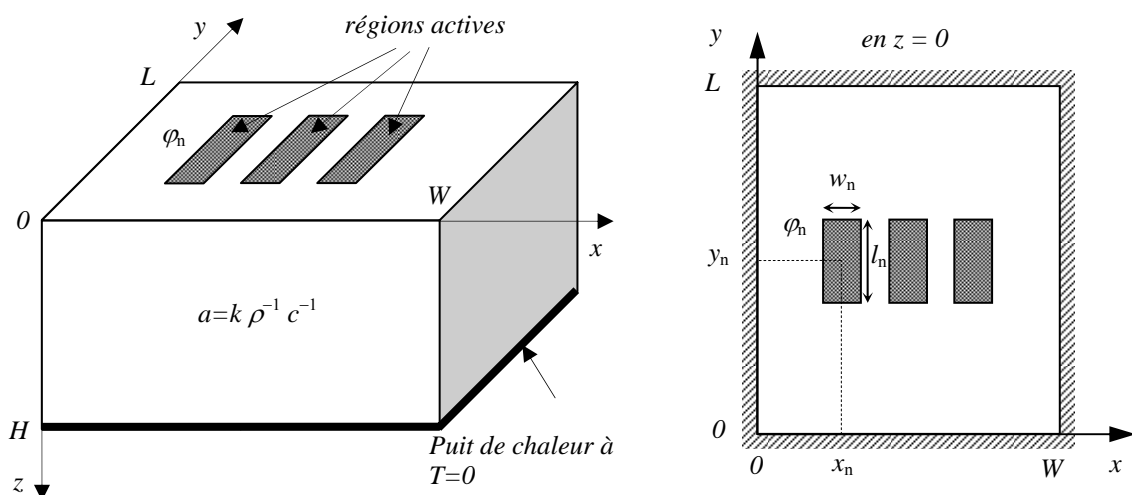


figure 1: configuration d'un composant électronique multi doigts

Le champ de température est déterminé en résolvant l'équation parabolique linéaire de la diffusion dans le solide. Bien entendu le champ de température dépend complètement des conditions initiales et aux limites. Nous considérons la température initiale à la référence 0 partout dans le solide. Les faces latérales du substrat, c'est-à-dire en $x = 0$, $y = 0$, et en $x = W$ et $y = L$, sont supposées isolées. Dans le cas d'un TBH, cela peut-être justifié par la présence de tranchés d'isolation. Sur la face inférieure, en $z = H$, le solide est maintenu à la référence 0 par un puit de chaleur. Enfin, sur la face supérieure, en $z = 0$ le solide est supposé isolé sauf là où les sources sont localisées.

3. Impédance thermique fréquentielle

En appliquant la transformée de Fourier (équation 1), où j est l'imaginaire pur, le système d'équations peut être réécrit dans le domaine fréquentiel. Puis l'application de la transformée intégrale spatiale, définie par l'équation 2, permet de transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire (équation 3) et les équations aux limites (équations 4). Notons que puisque les conditions aux limites dans les directions x et y sont homogènes, l'équation 3 reste homogène.

$$\hat{T}(x, y, z, \omega) = \int_{t=0}^{\infty} T(x, y, z, t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$\tilde{T}(n_x, n_y, z, \omega) = \int_{y'=0}^L \int_{x'=0}^W \hat{T}(x', y', z, \omega) \cos\left(\frac{n_x \pi}{W} x'\right) dx' \cos\left(\frac{n_y \pi}{L} y'\right) dy' \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \tilde{T}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{T}(z) = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{d\tilde{T}(z)}{dz} \right|_{z=0} = \sum_{n=1}^{N_s} \tilde{\varphi}_n / k \quad \text{et} \quad \tilde{T}(z) \Big|_{z=H} = 0 \quad (4)$$

où

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \frac{j\omega}{a}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \left(\frac{n_x \pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L}\right)^2 \quad (5)$$

La solution de l'équation 3 est donnée par l'équation 6:

$$\tilde{T}(z) = \frac{\sinh[\gamma(H-z)]}{k\gamma \cosh(\gamma H)} \sum_{n=1}^{N_s} \hat{\varphi}_n F_n \quad (6)$$

où

$$F_n = \frac{4WL}{\pi^2 n_x n_y} \cos\left(\frac{n_x \pi}{W} x_n\right) \sin\left(\frac{n_x \pi}{W} \frac{w_n}{2}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L} y_n\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} \frac{l_n}{2}\right) \quad (7)$$

Finalement la transformée spatiale inverse donne le champ de température dans le domaine fréquentiel (équation 8).

$$\hat{T}(x, y, z, \omega) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_{n_x} \varepsilon_{n_y}}{WL} \cos\left(\frac{n_x \pi}{W} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \frac{\sinh[\gamma(H-z)]}{k\gamma \cosh(\gamma H)} \sum_{n=1}^{N_s} \hat{\phi}_n F_n \right) \quad (8)$$

où $\varepsilon_\nu = 1$ pour $\nu = 0$ et $\varepsilon_\nu = 2$ pour $\nu = 1, 2, \dots, \infty$ (9)

En pratique les valeurs des bornes supérieures des séries dans l'équation 8 sont finies. Comme mentionné dans [2], pour assurer la convergence de la solution, les bornes doivent être au moins 3 fois le max de W/w_n dans la direction x et 3 fois le max de L/l_n dans la direction y .

Nous définissons alors l'impédance thermique fréquentielle adimensionnelle dite locale associée à une source m (équations 10), la température moyenne \bar{T}_m étant donnée par l'intégrale de l'équation 8 sur S_m .

$$Z_m^*(j\omega) = \frac{k\bar{T}_m}{\hat{\phi}_m \sqrt{S_m}} \text{ avec } \bar{T}_m = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \left(\frac{F_m}{w_m l_m} \frac{\varepsilon_{n_x} \varepsilon_{n_y}}{WL} \frac{\tanh(\gamma H)}{k\gamma} \sum_{n=1}^{N_s} \hat{\phi}_n F_n \right) \quad (10)$$

De façon similaire l'équation 11 définit l'impédance thermique fréquentielle adimensionnelle dite globale Z^* de l'ensemble de la structure.

$$Z^*(j\omega) = \frac{k \sum_m^{N_s} S_m \bar{T}_m}{\left(\sum_m^{N_s} S_m \hat{\phi}_m \right) \sqrt{\sum_m^{N_s} S_m}} \quad (11)$$

4. Résultats et Discussions

Dans un premier temps nous exposons le cas d'une source carré uniforme sur un solide cubique (figure 2). Les résultats pourront être comparés avec ceux de [3] obtenu avec une solution semi-analytique et avec ceux de [4] obtenu avec la méthode BEM. Puis nous traitons le cas de 3 sources carrés identiques, distantes de d les unes des autres, à la surface d'un solide cubique 20 fois plus grand que les sources (figure 3). Nous étudions l'influence de d sur l'impédance thermique.

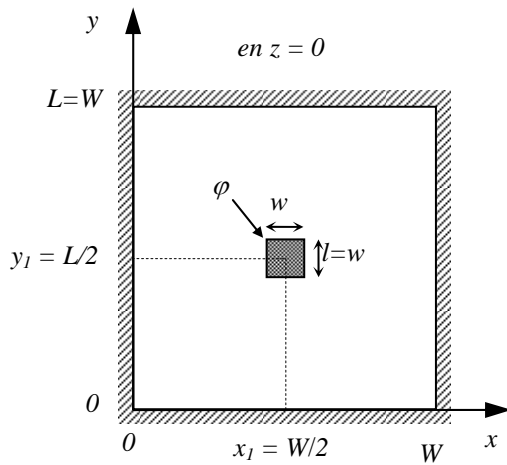


figure 2 : Une source centrée

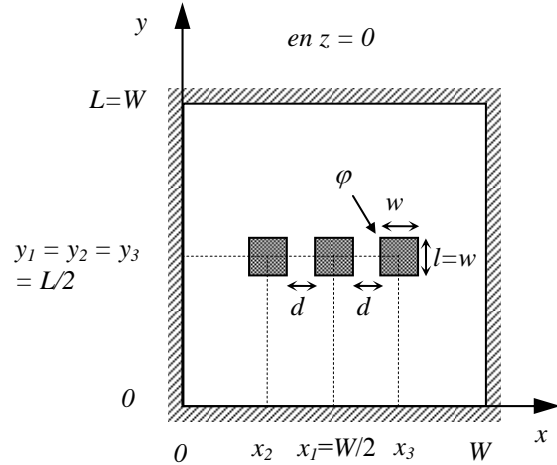


figure 3: Trois sources espacées d'une distance d

4.1 Structures mono source

La figure 4 est le diagramme de Nyquist de l'impédance thermique adimensionnée Z^* (avec la pulsation ω^* ($\omega S/\pi a$) comme paramètre) pour plusieurs tailles de substrats. Les 2 arcs de hautes et de basses pulsations observés dans [4] sont présents pour chaque courbe. L'échelle de l'arc des basses pulsations varie avec les dimensions du substrat alors que l'arc des hautes pulsations se superpose presque parfaitement pour toutes les tailles de substrats. Cela montre qu'au-delà d'une pulsation limite ω_{lim} séparant les deux arcs, l'impédance thermique ne dépend plus des dimensions du substrat. Comme on peut le voir sur la figure 5 cette pulsation est la limite à partir de laquelle le comportement fréquentiel de la structure est celui du milieu semi-infini. Au regard des courbes tracés sur cette même figure 5, il semble que les résultats de [4] obtenu avec la méthode BEM souffre d'un manque de précision.

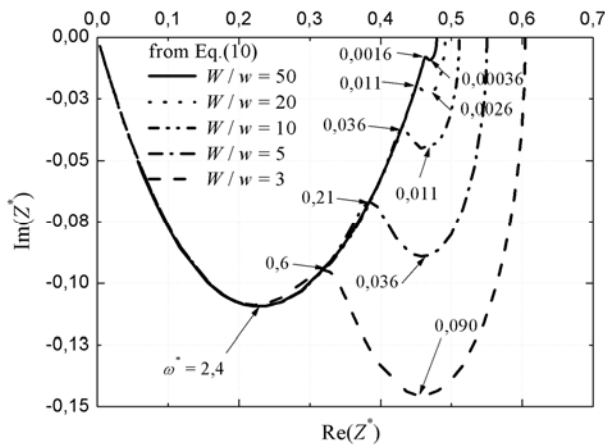


figure 4 : Nyquist des impédances : Eq.(10)

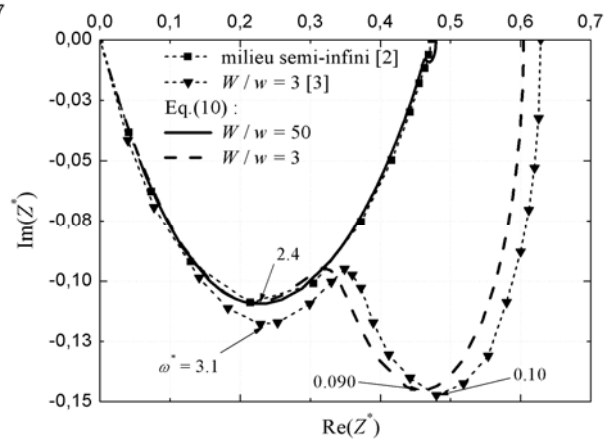


figure 5 : Nyquist des impédances : comparaison [3][4]

4.2 Structures multi source

Pour différentes valeurs du rapport d/w (de 0 à 8) nous avons tracé sur la figure 6 le diagramme de Nyquist de l'impédance globale Z^* et sur les figures 7 et 8 les impédances locales Z_1 et Z_2 ($Z_2 = Z_3$ du fait de la symétrie). Enfin, sur la figure 9 nous avons tracé les résistances thermiques globale et locales en fonction du rapport d/w (elles sont les limites des impédances quand la pulsation ω tend vers 0). On voit que la distance d entre les sources influe largement sur l'échelle de l'arc des hautes pulsations tandis que l'arc des basses pulsations reste inchangé. Ces figures montrent clairement l'intérêt des structures multi-source : en choisissant bien l'espacement entre les sources on peut considérablement diminuer l'impédance thermique de la structure.

On observe sur la figure 9 que la résistance thermique de la source centrale R_1 diminue toujours avec l'augmentation de d/w alors que celles des autres sources R_2 et R_3 passe par un minimum. On peut trouver la valeur de d/w qui permet obtenir des résistances thermiques R_1 , R_2 et R_3 égales. Dans notre cas elle est entre 5,66 et 5,67. Cette valeur est prévisible et elle peut être calculée par la relation (12) dans le cas où il y aurait N_s sources alignées. Dans notre cas elle vaut plus précisément 5,666.... Pour cette valeur les courbes des impédances Z_1 , Z_2 et Z_3 coïncide parfaitement.

$$\left(\frac{d}{w}\right)_{R_1=R_2=R_3} = \frac{1}{N_s} \frac{W}{w} - 1 \quad (12)$$

Nous avons également approché la valeur de d/w qui minimise les résistances locales R_2 et R_3 , elle vaut 5,19. Elle diffère de celle qui minimise la résistance globale qui vaut 5,60.

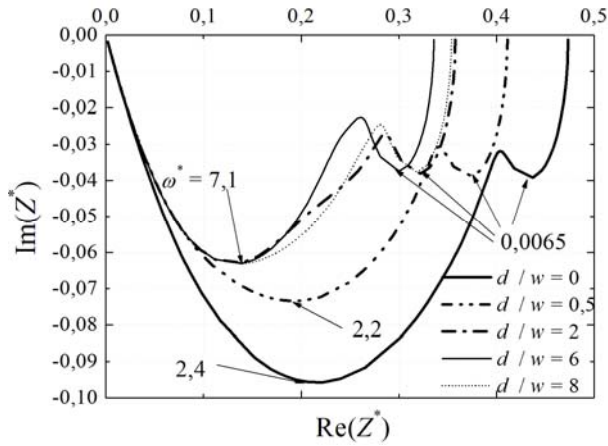


figure 6 : Nyquist de Z^*

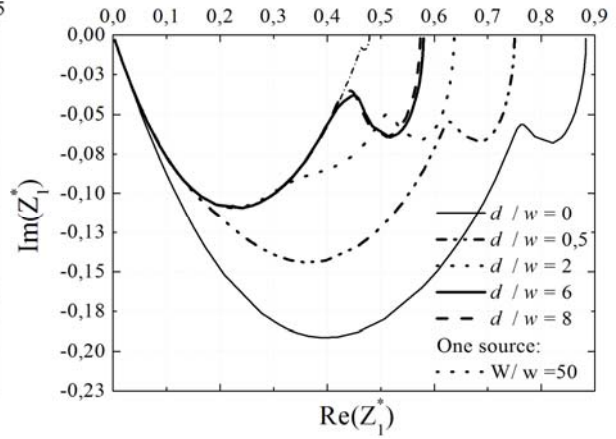


figure 7 : Diagramme de Nyquist de Z_1^*

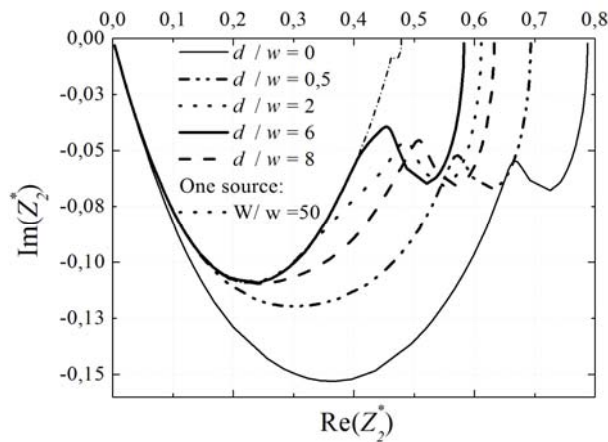


figure 8 : Diagramme de Nyquist de Z_2^* et Z_3^*

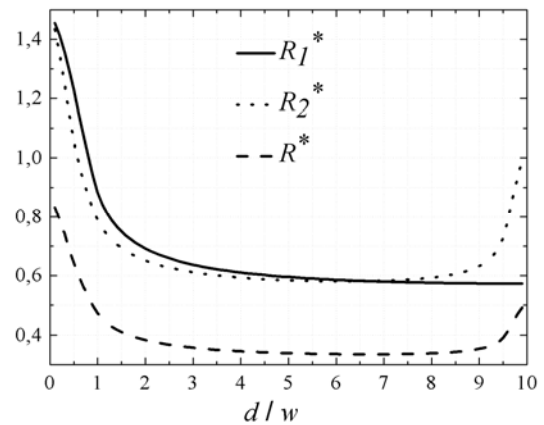


figure 9 : Résistance thermique

5. Conclusion

Avec le modèle thermique multi sources que nous avons présenté, l'impédance thermique de composants électroniques multi doigts peut être déterminée analytiquement en régime fréquentiel. Nous avons vu qu'il y'a une distance optimum pour laquelle la dissipation d'énergie dans les composants est la meilleure, c'est celle qui permet d'obtenir la résistance thermique globale la plus faible.

Références

- [1] Mnif, H., Zimmer, T., Battaglia, J.-L., et Fregnose, S. (2004). Analysis and modeling of the self-heating effect in sige hbts. *The European Physical Journal Applied Physics*, 25 : 11–23.
- [2] Sulima, P. Y., Battaglia, J.-L., Zimmer, T., et Batsale, J. C. (2007). Self-heating modeling of sige heterojunction bipolar transistor. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34(5) : 553–563.
- [3] Vermeersch, B. et De Mey, G. (2007). Influence of substrate thickness on thermal impedance of microelectronic structures. *Microelectronics Reliability*, 47(2-3) : 437–443.
- [4] Vermeersch, B. et De Mey, G. (2006). Thermal impedance plots of micro-scaled devices. *Microelectronics and Reliability*, 46(1) : 174–177.
- [5] Liou, L. et Bayraktaroglu, B. (1994). Thermal stability analysis of algaas/gaas heterojunction bipolar transistors with multiple emitter fingers, *IEEE Transactions on Electron Devices*, 41(5) : 629–636.
- [6] Özişik, M.N. (1989). *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover, USA.