Diagnostic de structures de génie civil : Identification des propriétés spatiales et de la surface d'un défaut

Jordan BROUNS^{1*}, Antoine CRINIERE¹, Jean DUMOULIN¹, Alexandre NASSIOPOULOS¹, Frédéric BOURQUIN²

Résumé - Cette étude présente les résultats d'une procédure d'estimation de paramètres appliquée à un problème de transfert thermique tridimensionnel. Nous étudions l'influence du ratio d'éffusivités d'un défaut contenu dans une matrice isotrope sur la reconstruction de la surface du défaut et du champ de conductivité thermique. Trois type de défaut sont considérés, avec des ratios d'effusivités différents.

Nomenclature

 $\begin{array}{lll} \rho c & \text{capacit\'e thermique, J.°C^{-1}.m^{-3}} & \theta & \text{temp\'erature dans le domaine, °C} \\ k & \text{conductivit\'e thermique, J.°C^{-1}.m^{-1}.s^{-1}} & \theta^d & \text{mesures de temp\'erature de surface, °C} \\ \phi_0 & \text{densit\'e de flux d'excitation, W.m^{-2}} & J & \text{fonctionnelle de Tikhonov} \\ b & \text{effusivit\'e thermique, J.°C^{-1}.m^{-2}.s^{-1/2}} & \tilde{J}_k & \text{fonctionnelle du mod\`ele lin\'eaire tangent} \end{array}$

1. Introduction

La maitrise du vieillissement des structures de génie civil est un domaine de recherche important suscitant l'intérêt de l'IFSTTAR. Depuis plusieurs années, des techniques de collages composites sur structures béton à l'aide de résine époxy ont fait leur apparition. Ces méthodes de réparations créent des systèmes multicouches épais nécessitant des méthodes d'investigations fiables et robustes [1, 2]. Parmi les différentes méthodes de diagnostic non destructif, nous nous intéressons ici aux méthodes thermiques [3, 4]. La thermographie infrarouge, couplée à l'utilisation d'une procédure d'estimation de paramètres utilisant un modèle inverse [5, 6], permet de remonter aux propriétés intrinsèques du système étudié de manière non intrusive. De précédentes études en génie civil ont montré que l'utilisation de la thermographie infrarouge permet le contrôle non destructif de domaines multicouches épais [7], et ce de manière quantitative. Dans le cadre du contrôle non destructif de structures réparées par collage composite, l'étude [8] a montré que le ratio d'éffusivité était un facteur déterminant pour la qualité d'estimation des paramètres, tout comme le nombre de connaissances *a priori* sur le système. Ainsi, des matériaux présentant un ratio d'éffusivité inférieur à l'unité (par rapport à la résine époxy) sont difficilement caractérisables.

Dans les études précédentes, un modèle analytique 1D était utilisé pour modéliser le système multicouche [9]. La présente propose l'analyse d'une méthode de diagnostic multidimension-nelle basée sur une modélisation aux éléments finis. Partant des conclusions précédentes, nous proposons ici l'utilisation de travaux antérieurs [10] pour permettre l'estimation de grandeurs fonctionnelles au sein d'une matrice isotrope à l'aide de la méthode de l'état adjoint [11]. Nous cherchons alors à identifier un champ de conductivité thermique. L'enjeu est d'étudier si le modèle numérique est à même de s'affranchir de la corrélation entre épaisseur et conductivité, et donc de permettre la caractérisation de la taille du défaut considéré. Trois types de défaut sont étudiés, chacun représentatif d'un ratio d'éffusivité.

¹ LUNAM Université, IFSTTAR, CoSys, F-44344 Bouguenais, France

² Université Paris-Est, IFSTTAR, CoSys, F-77447 Champs-sur-Marne, France

^{* (}auteur correspondant : jordan.brouns@ifsttar.fr)

La modélisation directe est détaillée dans la section suivante, suivie de la méthode d'inversion. Les résultats sont analysés puis discutés dans la conclusion de l'étude.

2. Cas d'étude et modèle direct

Notre cas d'étude consiste en un cube Ω^c de 100 mm de côté, voir figure 1. Nous simulons un défaut en son sein, situé à proximité du bord Γ^c_{IR} . Par souci de clarté de l'exposé, nous utiliserons la symétrie du problème en travaillant sur le cas bidimensionnel. Nous nous ramenons donc à l'étude d'un matériau isotrope carré Ω de 100 mm de côté, appelé matrice, voir figure 2. Nous simulons un défaut Δ de 5×40 mm² en son sein, situé à 5 mm du bord Γ_{IR} .

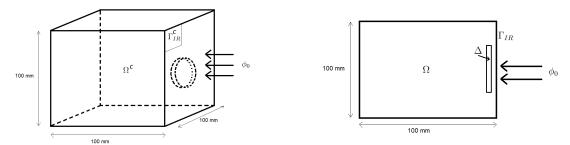


Figure 1: Cube considéré

Figure 2: Cas d'étude du modèle

Une densité de flux $\varphi_0=2000~{\rm W.m^{-2}}$ est appliquée durant un temps $t_0=450~{\rm s}$ sur la frontière Γ_{IR} , tandis que le temps total d'observation vaut $t_a=1000~{\rm s}$. Les frontières restantes sont notées $\Gamma_0=\partial\Omega\backslash\Gamma_{IR}$ et soumises à une condition de flux nul. L'évolution de la température θ est exprimée en terme de propriétés spatiales et modélisée à l'aide de l'équation aux dérivées partielles parabolique (1), avec ρc la capacité thermique spatiale, k la conductivité thermique spatiale, θ^0 le champ initial de température dans le domaine, et $\mathbf{1}_{t \le t_0}$ la fonction indicatrice de $\{t \le t_0\}$ qui vaut 1 lorsque $t \le t_0$ et 0 sinon.

$$\begin{cases}
\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta) = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Omega \\
k \nabla \theta \cdot n = \phi_0 \mathbf{1}_{t \le t_0} & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_{IR} \\
k \nabla \theta \cdot n = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_0 \\
\theta(x; 0) = \theta^0(x) & x \in \Omega
\end{cases} \tag{1}$$

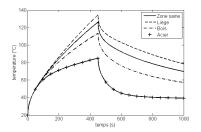
Le tableau 1 présente les propriétés thermiques de la matrice ainsi que des différents défauts étudiés, avec $b = \sqrt{k\rho c}$ l'effusivité. Le paramètre b_m/b est le ratio d'éffusivités entre la matrice et le défaut considéré. Les défauts étudiés ont été choisis en fonction de leur ratio d'éffusivités, qui est un facteur déterminant pour la qualité d'estimation des paramètres, voir [8].

Matériaux	k	ρc	b	b_m/b
matrice	0, 2	1200×1220	542, 5	1
liège	0,039	120×1800	91,8	5,91
bois	0,15	600×1900	431, 5	1,31
acier	15, 1	8055×480	7640,9	0,07

Tableau 1: Propriétés utilisées dans l'étude

Dans cette étude, nous avons choisi de résoudre le problème (1) par la méthode des éléments finis [12]. La résolution s'effectue à l'aide du solveur d'éléments finis P_1 pdetool disponible

sous MATLAB R2011b. Le système étudié est alors constitué de 19968 éléments. L'intégration en temps est effectuée par un schéma d'Euler implicite à pas constant $\Delta t = 5$ s. Sur la figure 3 sont présentés les thermogrammes en un point au dessus de chaque type de défaut et pour une zone saine.



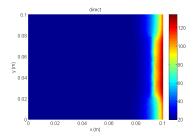


Figure 3: Thermogrammes de surface

Figure 4: État du système à $t = t_0 = 450 \text{ s}$

Nous observons une forte corrélation entre la température maximale de chaque thermogrammme et le ratio d'éffusivité des matériaux concernés. La figure 4 présente l'état du système en fin de chauffe $t=450\,\mathrm{s}$, pour un défaut de liège au sein de la matrice. Dans nos simulations, nous initialisons l'état thermique par un champ constant d'une valeur de 20 °C.

Dans la section suivante nous détaillons le modèle inverse permettant le calcul de la surface de la zone défectueuse ainsi que la caractérisation des défauts étudiés.

3. Formulation du problème inverse

La reconstruction d'états et de paramètres est un problème inverse dans lequel on cherche à identifier les paramètres d'un modèle à l'origine d'observations. Dans notre problématique, nous utiliserons des mesures de températures de surface obtenues par thermographie infrarouge. Nous notons $t_a=1000$ s la durée de l'observation, et nous supposons que nous disposons de mesures allant de l'instant initial au temps final $t_a:t\in[0;t_a]$. Nous notons $\theta^d(x;t)$ les mesures au temps t des températures de surface en $x\in\Gamma_{IB}$.

Nous nous intéressons ici à la caractérisation de la zone défectueuse. Ainsi, l'étude porte sur l'estimation de la conductivité thermique k et de la capacité thermique ρc . Cependant, les premières observations ont permit de mettre en évidence que l'estimation de la capacité thermique n'évolue pas au cours de la procédure d'estimation. Par conséquent, nous nous concentrons uniquement sur l'estimation du champ de conductivité spatiale, avec ρc fixée et égale à la capacité thermique de la matrice.

Nous étudions donc la possibilité de reconstruire le champ de conductivité thermique à partir de mesures des températures de surface (générées numeriquement puis bruitées) sur la frontière Γ_{IR} . Conformément à la procédure de Tikhonov [13], nous introduisons la fonctionnelle suivante :

$$J(k) = \frac{1}{2} \int_0^{t_a} \int_{\Gamma_{IR}} \left(\theta(k) - \theta^d\right)^2 d\sigma dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} (k - k_0)^2 dx \tag{2}$$

avec $d\sigma$ la mesure de frontière, ϵ le paramètre de régularisation de Tikhonov, et k_0 une ébauche de la conductivité. Le premier terme de cette fonctionnelle est le terme de fidélité et mesure l'écart entre les données et la réponse du modèle au paramètre k, tandis que le dernier est le terme de régularisation qui rend le problème bien posé au sens de Hadamard, voir [5]. Le problème inverse s'énonce ainsi : trouver $k \in L^{\infty}(\Omega)$ tel que $k = \arg\min_{h \in L^{\infty}(\Omega)} J(h)$.

Le modèle (1) est non-linéaire par rapport à la conductivité. Pour résoudre ce problème, nous

choisissons d'utiliser un algorithme de type Levenberg-Marquardt associé au gradient conjugué.

3.1. Algorithme itératif de Levenberg-Marquardt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt est un algorithme itératif qui permet de minimiser une fonctionnelle n'étant pas quadratique, voir [14]. C'est notamment le cas pour notre identification puisque la réponse du modèle est non linéaire en k. Cet algorithme consiste à trouver le nouvel itéré en minimisant une autre fonctionnelle issue de la linéarisation du modèle autour de l'itéré précédent, voir [10].

Soit $\delta k \in L^{\infty}(\Omega)$ une petite variation du paramètre recherché, l'approximation consiste à écrire $\theta(k+\delta k) \simeq \theta(k) + \delta \theta_k(\delta k)$, avec $\delta \theta_k(\delta k)$ la dérivée de Gâteaux de θ en k dans la direction δk , solution du modèle linéaire tangent autour de k décrit par (3).

$$\begin{cases}
\rho c \frac{\partial \delta \theta_k}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta \theta_k) = \nabla \cdot (\delta k \nabla \theta) & t \in [0; t_a], x \in \Omega \\
k \nabla \delta \theta_k \cdot n = -\delta k \nabla \theta \cdot n & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_{IR} \cup \Gamma_0 \\
\delta \theta_k(x; 0) = 0 & x \in \Omega
\end{cases}$$
(3)

Nous introduisons, en chaque point de linéarisation k, une nouvelle fonctionnelle :

$$\tilde{J}_k(\delta k) = \frac{1}{2} \int_0^{t_a} \int_{\Gamma_{IR}} \left(\theta(k) + \delta \theta_k(\delta k) - \theta^d \right)^2 d\sigma dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} \delta k^2 dx \tag{4}$$

Nous ne cherchons plus directement le paramètre k optimal, mais plutôt l'accroissement local δk optimal qui nous permettra de calculer la linéarisation à l'itération suivante $k+\delta k$. Ces minimisations successives sont bien définies puisque $\tilde{J}_k(\delta k)$ est strictement quadratique, donc strictement convexe et coercive [15]. L'équation d'Euler nous dit que le minimum se situe à la racine de la différentielle :

$$\delta k = \operatorname*{arg\,min}_{h \in L^{\infty}(\Omega)} \tilde{J}_{k}(h) \Longleftrightarrow \tilde{J}'_{k}(\delta k) = \mathbf{0}$$
(5)

Pour calculer les minimisations successives (5), nous avons choisi d'utiliser le gradient conjugué. L'algorithme a donc besoin de calculer la différentielle de la fonctionnelle (4). Nous avons choisi d'utiliser la méthode de l'état adjoint pour traiter le terme de fidélité de (4), voir [11]. Cette méthode, issue de la théorie du contrôle optimal, propose une expression exacte de la différentielle en résolvant un problème dit adjoint, dont la structure est similaire à celle du modèle direct.

$$\begin{cases}
-\rho c \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla p) = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Omega \\
k \nabla p \cdot n = \theta + \delta \theta_k - \theta^d & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_{IR} \\
k \nabla p \cdot n = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_0 \\
p(x; t_a) = 0 & x \in \Omega
\end{cases}$$
(6)

3.2. Méthode de l'état adjoint

Nous introduisons p la solution du modèle adjoint, voir [11]. Soit $\delta \tilde{k} \in L^{\infty}(\Omega)$ une petite perturbation de δk . La théorie du contrôle optimal nous permet d'obtenir la différentielle $\tilde{J}'_k(\delta k)$

à partir des solutions de trois problèmes de structure similaire : le modèle direct (1), le modèle linéaire tangent (3), et le modèle adjoint (6). Nous obtenons :

$$\tilde{J}'_{k}(\delta k)\delta \tilde{k} = -\int_{0}^{t_{a}} \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \, \nabla \theta \cdot \nabla p \, dx dt + \epsilon \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \delta k \, dx \tag{7}$$

Du fait de la variation spatiale du paramètre $\delta \tilde{k} \in L^{\infty}(\Omega)$, le calcul de la dérivée (7) intègre en temps le produit scalaire des gradients en espace. Nous ne pouvons donc pas utiliser les matrices des éléments finis. Ce type de calcul peut générer d'importantes erreurs numériques. Pour éviter cela, nous choisissons de projeter l'inconnue dans le sous-espace des éléments finis utilisé lors du calcul direct. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$k(x) = \sum_{i=1}^{N} k_i \psi_i(x) \tag{8}$$

avec ψ_i les fonctions de base des éléments finis, et N la dimension du sous-espace. Les paramètres δk et $\delta \tilde{k}$ se décomposent de la même manière. Ceci nous permet de récrire la différentielle $\tilde{J}'_k(\delta k)$ comme suit, $\forall i \in [1;N]$:

$$\tilde{J}'_k(\delta k)\delta \tilde{k}_i = -\delta \tilde{k}_i \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \psi_i \, \nabla \theta \cdot \nabla p \, dx dt + \epsilon \delta \tilde{k}_i \sum_{j=1}^N \delta k_j \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, dx \tag{9}$$

4. Résultats

Nous présentons dans cette section les résultats de la procédure d'identification pour les différents défauts, présentés dans le tableau 1. Pour chaque défaut, les mesures thermiques sont obtenues à l'aide du modèle (1). Dans un premier temps, les mesures sont donc parfaites. Dans un deuxième temps, ces mesures sont bruitées avec un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart type $\sigma=0.5$ °C. L'algorithme est systématiquement initialisé par un champ de conductivité homogène possédant les propriétés thermiques de la matrice. Le paramètre de régularisation ϵ vaut 10^{-1} . Les critères d'arrêt de l'algorithme portent principalement sur le nombre d'itérations du gradient conjugué (maximum 10 itérations) et de points de linéarisation de la procédure de Levenberg-Marquardt (maximum 20 linéarisation).

Les résultats de reconstruction des champs de conductivité pour les différents défauts sont présentés figure 5. Ces images sont un zoom des champs reconstruits autour du défaut Δ , le reste des valeurs étant uniformément égales à celles de la matrice. La première image correspond au champ cible de conductivité pour le défaut du liège. Il permet de visualiser la surface et l'emplacement du défaut (les contours irréguliers sont dus au maillage utilisé).

Étant donné que les champs reconstruits sont relativement lisses par rapport aux champs cibles, nous devons choisir un seuil de décision pour conclure à l'appartenance d'un point au défaut reconstruit. Pour cela, nous avons calculé le champ de conductivité moyen \overline{k} des points strictement inclus dans le défaut (pas de points sur le bord interne de Δ). Nous introduisons ensuite l'amplitude A du champ reconstruit.

$$\overline{k} = \int_{\Lambda} k(x)dx \qquad A = |\overline{k} - k_m| \tag{10}$$

avec $k_m=0,2$ la conductivité de la matrice considérée. Nous parcourons alors tous les points du champ reconstruit, et dès qu'une valeur dépasse 45% de l'amplitude A, nous considérons

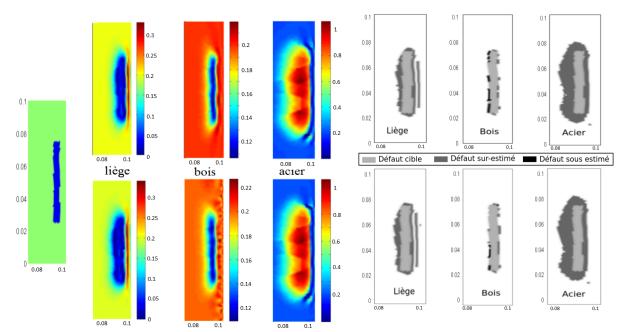


Figure 5: Reconstruction du champ k avec et sans bruit de mesure (haut et bas)

Figure 6: Estimation de la surface du défaut avec et sans bruit de mesure (haut et bas)

qu'elle appartient au défaut. L'intérêt de la définition d'un tel seuil est qu'il peut être utilisé sans connaissance a priori sur les propriétés du défaut. La figure 6 présente les estimations des différentes surfaces défectueuses. Pour chaque défaut, nous affichons les surfaces défectueuses cible et reconstruit. Le tableau 2 présente les résultats de la procédure d'estimation pour chacun des défauts considérés. Sont estimés, la profondeur moyenne e en m, la surface S en m², la conductivité moyenne au centre du défaut \overline{k} , la conductivité moyenne sur toute la surface identifiée k_S ainsi que les différents écarts types spatiaux σ_e , σ_s , $\sigma_{\overline{k}}$ et σ_{k_S} permettant d'apprécier la variabilité des résultats présentés.

Défauts	e	σ_e	S	%ErrS	$ \overline{k} $	$\sigma_{\overline{k}}$	k_S	σ_{k_S}
cible	$4,8.10^{-3}$	11.10^{-4}	$1,9.10^{-4}$	-				
liège	$2,9.10^{-3}$	$1,3.10^{-3}$	$3,5.10^{-4}$	85	0,0389	0,008	0,074	0,077
bois	5.10^{-3}	$7,8.10^{-4}$	$1,8.10^{-4}$	3	0,12	0,009	0,137	0,017
acier	$4,5.10^{-3}$	11.10^{-4}	$6,1.10^{-4}$	220	0,94	0,06	0,78	0,13
liège (bruit)	$2,7.10^{-3}$	$1,2.10^{-3}$	$3,6.10^{-4}$	91	0,037	0,009	0,073	0,082
bois (bruit)	$5,3.10^{-3}$	$6,7.10^{-4}$	$2,03.10^{-4}$	6,1	0,12	0,007	0,139	0,0162
acier (bruit)	$3,4.10^{-3}$	$5,3.10^{-4}$	$6,04.10^{-4}$	215	0,94	0,06	0,782	0,134

Tableau 2: Volumes et conductivités identifiés

4.1. Estimation de la surface du défaut

Pour le défaut de liège, la profondeur identifiée présente une erreur d'estimation conséquente ainsi qu'une variabilité spatiale importante. Ceci est dû aux oscillations présentes sur la nappe de conductivité, figure 5, faussant l'estimation du volume, figure 6. En effet, il est difficile, avec la procédure de minimisation des moindres carrés utilisée, de reconstruire des changements brutaux de propriétés. Nous retrouvons ainsi une sous estimation de l'épaisseur, ainsi qu'une sur estimation du volume pour les défauts de liège et d'acier, tandis que le défaut de bois est

fidèlement reconstruit. Cette sur estimation du volume est d'autant plus grande que le défaut considéré présente un effet diffusif (acier). En revanche, bien que la reconstruction du défaut de liège soit sensible aux oscillations de la procédure, le volume identifié apparaît satisfaisant. La reconstruction du volume du défaut de bois est une amélioration notable des précédentes études [8]. De plus, la procédure présente un bon comportement face à des mesures bruitées.

4.2. Estimation des conductivités thermiques k

Une fois la zone défectueuse identifiée, nous cherchons à caractériser le type de défaut. Le tableau 2 présente les résultats d'estimation du champ moyen \overline{k} précédemment défini, et du champ k_S qui est la conductivité moyenne au sein de la surface identifiée (voir figure 6). Comme pour l'estimation de la surface, il est intéressant de remarquer que, malgré son ratio d'effusivités proche de l'unité, le bois est bien caractérisé. D'après les écart-types spatiaux, il est faiblement impacté par les effets de bord ainsi que par la présence de mesure bruitées. Par conséquent, le champ de conductivité estimé capture bien la discontinuité brutale du défaut. De la même manière, le liège est lui aussi bien estimé au cœur du défaut. Cependant, la conductivité ainsi que l'écart type spatial au sein de la zone reconstruite sont eux d'une qualité plus faible. De nouveau, le comportement de la procédure d'estimation des moindres carrées semble être responsable. Bien qu'erronée, l'estimation du défaut d'acier permet de conclure à la présence d'un défaut conducteur au sein de la matrice. Le champ reconstruit sature autour de la valeur 1. Ce phénomène vient de la régularisation, qui n'est plus adaptée pour ce type de défaut. Contrairement à une modélisation 1D [8], nous remarquons que les matériaux présentant un ratio d'effusivités de l'ordre de l'unité sont mieux identifiés et caractérisés.

5. Conclusion

Cette étude présente une formulation en terme de variation spatiale de la conductivité d'un problème de transfert thermique tridimensionnel. En se basant sur la symétrie 2D du problème, nous avons développé un modèle direct ainsi qu'une procédure d'estimation de paramètres utilisant la méthode de l'état adjoint. Nous avons étudié l'influence du ratio d'effusivités d'un défaut contenu dans une matrice isotrope sur la reconstruction de la surface du défaut et du champ de conductivité thermique. Le nombre d'itérations de l'algorithme de minimisation a été borné pour des raisons de temps de calcul. Les différents résultats obtenus sont comparés à une précédente étude utilisant un modèle analytique 1D. Cette dernière avait conclu que les défauts présentant des ratios d'effusivités inférieurs ou égaux à l'unité étaient plus difficiles à caractériser. Les résultats de notre procédure d'estimation basée sur un modèle multidimensionnel montrent que nous sommes capables de caractériser la conductivité thermique ainsi que la surface d'un défaut de bois présentant un ratio d'effusivités proche de l'unité. Le paramètre estimé pour un défaut à fort ratio d'éffusivités (liège) est cohérent, mais apparaît sensible aux effets de bord. De plus, la présence d'oscillations dans les champ de propriétés estimés, imputables à la méthode des moindres carrés, fait apparaître des écarts type spatiaux élevés pour les matériaux présentant un ratio d'effusivités éloignés de l'unité. Un défaut d'acier, représentant un matériau à faible ratio d'effusivités, a aussi été utilisé dans cette étude. Sa surface identifiée est sur-estimée, mais la conductivité spatiale, bien qu'erronée, permet de conclure à la présence d'un défaut hautement diffusif au sein de la matrice. Ces résultats sont directement liés à notre choix du paramètre de régularisation, non adapté à ce type de défaut. Pour conclure, même si la zone défectueuse apparaît surestimée pour certains défauts, elle n'en reste pas moins une information utile au diagnostique.

La méthode développée dans cette étude permet l'identification de la surface ainsi que de

la conductivité spatiale d'un défaut au sein d'une matrice isotrope; et ce, même en présence de mesures bruitées. L'optimisation de la procédure d'inversion pourrait permettre l'utilisation d'un nombre plus important d'itérations et ainsi améliorer la convergence de l'algorithme de minimisation. L'influence du temps de chauffe (et du type de chauffe) sur la reconstruction de paramètres doit aussi être étudié. Une étude paramétrique ainsi qu'une étude de sensibilité complète apparaît nécessaire. Enfin, la redéfinition du modèle direct en terme de groupement de paramètres, tels que la diffusivité ou les résistances thermiques, semble être une perspective légitime.

Références

- [1] ACI, "Guide for the design and construction of externally bonded systems for strengthening concrete structures," Tech. Rep. 440.2R02-08, American Concrete Institute, Michigan, U.S.A, 2008.
- [2] AFGC, "Réparation et renforcement des structures en béton au moyen des matériaux composites, recommandations provisoires," tech. rep., Bulletin scientifique et technique de l'AFGC, 2011.
- [3] X. Maldague, *Theory and practice of infrared technology for non destructive testing*. John Wiley & sons, 2001.
- [4] D. Balageas and J. Roche, "Détection précoce et caractérisation de défauts par thermographie stimulée par échelon de flux et comparaison à la méthode impulsionelle," in *SFT* 2012, 2012.
- [5] J. V. Beck and K. J. Arnold, *Parameter estimation in engineering and science*. John Wiley and sons, 1977.
- [6] M. N. Özisik and H. R. B. Orlande, *Inverse heat transfer*. Taylor and Francis, 2000.
- [7] F. Taillade, M. Quiertant, K. Benzarti, and C. Aubagnac, "Shaerography and pulsed stimulated infrared thermography applied to a nondestructive evaluation of FRP strenghening system bonded on concrete structures," *Construction and Building Materials*, vol. 25, pp. 568–574, 2011.
- [8] A. Crinière, J. Dumoulin, C. Ibarra-Castanedo, and X. Maldague, "Inverse model for defect characterisation of externally glued cfrp on reinforced concrete structures: comparative study of square pulsed and pulsed thermography doi:10.1080/17686733.2014.897512," *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, pp. 1–31, 2014.
- [9] D. Maillet, S. Andre, J. Bastale, A. Degiovanni, and C. Moyne, *Thermal Quadrupoles*. Wiley, 2000.
- [10] A. Nassiopoulos and F. Bourquin, "On-site building walls characterization," *Numerical Heat Transfer*, vol. 63, pp. 1–22, 2013.
- [11] J.-L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [12] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1988.
- [13] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solutions of ill-posed problems. 1977.
- [14] J. J. Moré, "The Levenberg-Marquardt algorithm. Implementation and theory," in *Conference on Numerical Analysis*, 1977.
- [15] I. Ekeland and R. Témam, Convex analysis and variational problems. SIAM, 1999.