

Le modèle SLW Généralisé.

Vladimir P. SOLOVJOV¹, Frédéric ANDRE^{2*}, Denis LEMONNIER³, Brent W. WEBB¹

¹Brigham Young University, CTB-435, Provo, UT 84602, USA

²Centre de Thermique et d’Energétique de Lyon,
INSA de Lyon – 9 rue de la Physique – 69621 Villeurbanne, France

³ISAE-ENSMA, BP 40109, 86961 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

* (auteur correspondant: frederic.andre@insa-lyon.fr)

Résumé – Le modèle SLW généralisé est formulé en termes de la fonction de distribution du coefficient d’absorption pondérée par la fonction de Planck (ALBDF dans la littérature anglo-saxonne) ainsi que de son inverse. Ceci produit deux modèles spectraux équivalents : les modèles SLW et SLW inverse. L’avantage de cette formulation, que l’on peut qualifier d’unifiée, est qu’elle simplifie l’emploi du modèle en éliminant tout recours à des résolutions d’équations implicites afin de l’appliquer à des milieux non isothermes.

Nomenclature

a	poids des gaz gris	<i>Symboles grecs</i>	
C	section efficace d’absorption, m^2/mol	κ	coefficient d’absorption, m^{-1}
E	puissance radiative, W/m^2	η	nombre d’onde, cm^{-1}
F	ALBDF	Ω	vecteur direction
N	nombre de molécules de gaz	<i>Indices et exposants</i>	
L	luminance, $W/m^2 sr$	0	associé au corps noir
T	température, K	P	pondération par la fonction de Planck
Y	fraction molaire en gaz	g	gaz

1. Introduction

Le modèle SLW (Spectral Line Weighted-sum-of-gray-gases, [1]) a été le premier modèle spectral pour les propriétés radiatives des gaz à hautes températures développé directement à partir des spectres d’absorption des gaz à hautes résolutions spectrales. Depuis, la méthode a connu de nombreuses extensions, interprétations et formulations différentes. Les approches ADF, FSK, CW et MBWSSG en sont des exemples récents. Le modèle SLW a aussi été utilisé, de façon hybride, en partant non pas des spectres raie-par-raie mais en basant ses paramètres sur d’autres modèles approchés (comme par exemple le modèle d’Edwards ou des modèles à bandes étroites de type CK [2-7]).

La quantité la plus importante dans l’approche SLW est la fonction de distribution $F(C, T_g, T_p, Y, p)$, que nous appellerons ALBDF dans la suite de ce travail en référence à sa dénomination usuelle, et qui correspond à la fraction du rayonnement émis par le corps noir à la température T_p moyennée sur l’ensemble des nombres d’onde tels que la section efficace d’absorption des molécules du gaz, C_η , prenne une valeur constante, C . Ce travail présente une formulation unifiée du modèle dit de somme pondérée de gaz gris utilisant aussi bien la fonction ALBDF directe, telle que définie précédemment, ou son inverse. Ceci produit deux modèles totalement symétriques et parfaitement équivalents rendant ainsi l’approche SLW universelle, et bien adaptée à des calculs en transfert radiatif aussi bien du point de vue de sa simplicité de mise en œuvre que de sa flexibilité. Les deux modèles utilisent aussi bien une discrétisation suivant la variable C (intimement liée au coefficient d’absorption), ce qui conduit au modèle SLW dit direct, que suivant les valeurs de la fonction de distribution F , conduisant alors à ce que nous appellerons ci-après le modèle SLW inverse. Dans le cas de

milieux non uniforme (anisothermes et/ou hétérogènes), l'hypothèse de corrélation de spectres considérés dans des conditions thermophysiques différentes repose sur l'utilisation de quatre fonctions ALBDF directes et inverses, calculées dans un état choisi comme référence ainsi que dans les conditions locales du calcul, permettant une plus large variété de choix possibles pour l'implémentation que le modèle SLW usuel.

Le modèle SLW généralisé admet deux formulations limites : le modèle dit SLW minimum, pour lequel seuls un gaz transparent et un gaz absorbant sont pris en compte, et le modèle dit SLW exact, qui correspond à la limite du modèle SLW lorsque le nombre de gaz gris tend vers l'infini.

2. Fonctions ALBDF et ALBDF inverse

La fonction de distribution $F(C, T_g, T_p, p, Y)$ constitue le paramètre clé dans l'approche SLW (et, de façon plus générale, dans tous les modèles globaux de rayonnement des gaz). Cette fonction représente la probabilité que la variable spectrale $C_\eta(T_g)$ prenne la valeur C pour un gaz considéré dans une condition thermophysique donnée : température T_g , pression totale p , et fraction molaire en espèce absorbante dans le mélange gazeux Y . Elle représente la fraction de rayonnement du corps noir $E^0(T_p) = \sigma T_p^4$ émise à la température T_p moyennée sur les portions du spectre telles que la section efficace d'absorption monochromatique du gaz $C_\eta(T_g)$ soit inférieure à une valeur prédéfinie C .

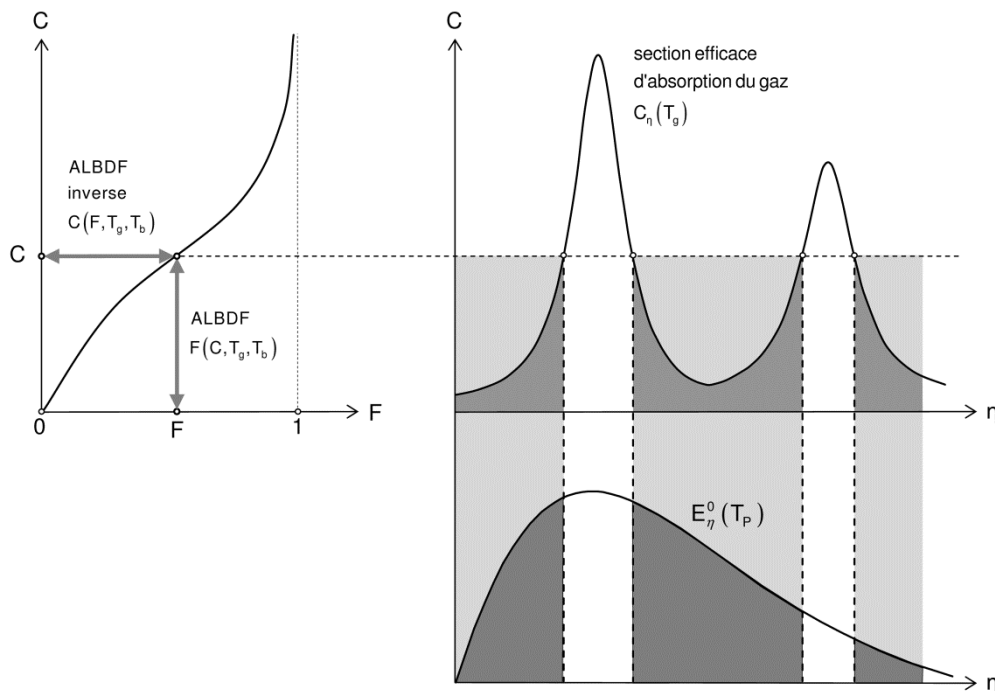


Figure 1 : Définition des fonctions ALBDF directe et Inverse

La fonction ALBDF est strictement monotone croissante et, de ce fait, inversible. Sa fonction inverse, notée ici $C(F, T_g, T_p)$, dépend de la variable F et est définie de façon implicite par les relations (équivalentes) $F[C(F, T_g, T_p), T_g, T_p] = F$ et $C[F(C, T_g, T_p), T_g, T_p] = C$. La

fonction ALBDF inverse correspond à la valeur de section efficace d'absorption telle que la fonction ALBDF directe prenne la valeur F .

Afin d'appliquer la méthode SLW avec un coût de calcul raisonnable, les fonctions de distribution précédentes doivent être évaluées préalablement au calcul de transfert radiatif à partir de coefficients d'absorption à haute résolution spectrale. Les valeurs prises par ces fonctions peuvent ensuite être tabulées, approximées par des corrélations, ou estimées par la méthode des moments généralisés [6].

3. Le modèle SLW généralisé pour des milieux uniformes homogènes isothermes

L'objectif principal du modèle SLW est de représenter l'Equation du Transfert Radiatif (ETR), initialement formulée en terme de luminance monochromatique $L_\eta(s)$, par un ensemble de luminances $L_j(s)$ associées à des gaz gris. Les étapes de construction du modèle pour un milieu uniforme à la température $T_g = T_p = T$ (ou dans un état de référence à la température $T_g = T_p = T^{ref}$ pour des cas non uniformes) sont les suivantes :

1. On commence par choisir les valeurs minimales et maximales prises par la variable C notées $\tilde{C}_0 = C_{min}$ et $\tilde{C}_n = C_{max}$, où n représente le nombre de gaz gris choisis dans le modèle.
2. Ensuite, on calcule les valeurs de la fonction ALBDF associées, définie par la relation :

$$F(C, T_g, T_p, p, Y) = \frac{1}{E^0(T_p)} \int_{\{\eta: C_\eta(T_g, p, Y) < C\}} E_\eta^0(T_p) d\eta \quad (1)$$

et notées $F_{min} = \tilde{F}_0 = F(C_{min}, T_g = T, T_p = T)$ et $F_{max} = \tilde{F}_n = F(C_{max}, T_g = T, T_p = T)$.

3. Il y a ensuite deux manières possibles de poser le problème : la première est de déterminer tout d'abord les valeurs de la variable C espacées de façon logarithmique entre les valeurs minimales et maximales définies précédemment $\tilde{C}_j^{ref} = C_{min} (C_{max}/C_{min})^{j/n}$, $j=0, 1, \dots, n$, puis de calculer les valeurs de la variable F prises par la fonction ALBDF en ces points par application de la définition $\tilde{F}_j = F(\tilde{C}_j, T_g = T, T_p = T)$; la seconde est de se fixer un ensemble de valeurs \tilde{F}_j , $j=0, 1, \dots, n$ (en utilisant par exemple une quadrature numérique de type Gauss-Legendre), puis de déterminer les valeurs de la variable C associées en utilisant la fonction ALBDF inverse : $\tilde{C}_j = C(\tilde{F}_j, T_g = T, T_p = T)$.

4. Le coefficient d'absorption pour la zone de transparence du spectre est alors donné par $\kappa_0 = 0$; les coefficients d'absorption des différents gaz gris sont calculés par :

$$\kappa_j = NY \sqrt{\tilde{C}_{j-1} \tilde{C}_j}.$$

5. Les poids relatifs aux coefficients d'absorption précédents sont ensuite estimés par application des relations suivantes : $a_0 = \tilde{F}_0$, $a_j = \tilde{F}_j - \tilde{F}_{j-1}$.

6. Les ETR associées aux différentes valeurs du coefficient d'absorption définies à l'étape 4 s'écrivent alors :

$$\frac{\partial L_0(s, \Omega)}{\partial s} = 0 \text{ et } \frac{\partial L_j(s, \Omega)}{\partial s} = -\kappa_j L_j(s, \Omega) + a_j \kappa_j L_j^0(T) \quad (2)$$

7. Après résolution des ETR décrites à l'étape 6, on peut calculer la luminance totale directionnelle en tout point du domaine de calcul par :

$$L(s, \Omega) = \sum_{j=0}^n L_j(s, \Omega) \quad (3)$$

Des détails concernant la construction des modèles spectraux SLW direct et inverse sont donnés sur la figure 2.

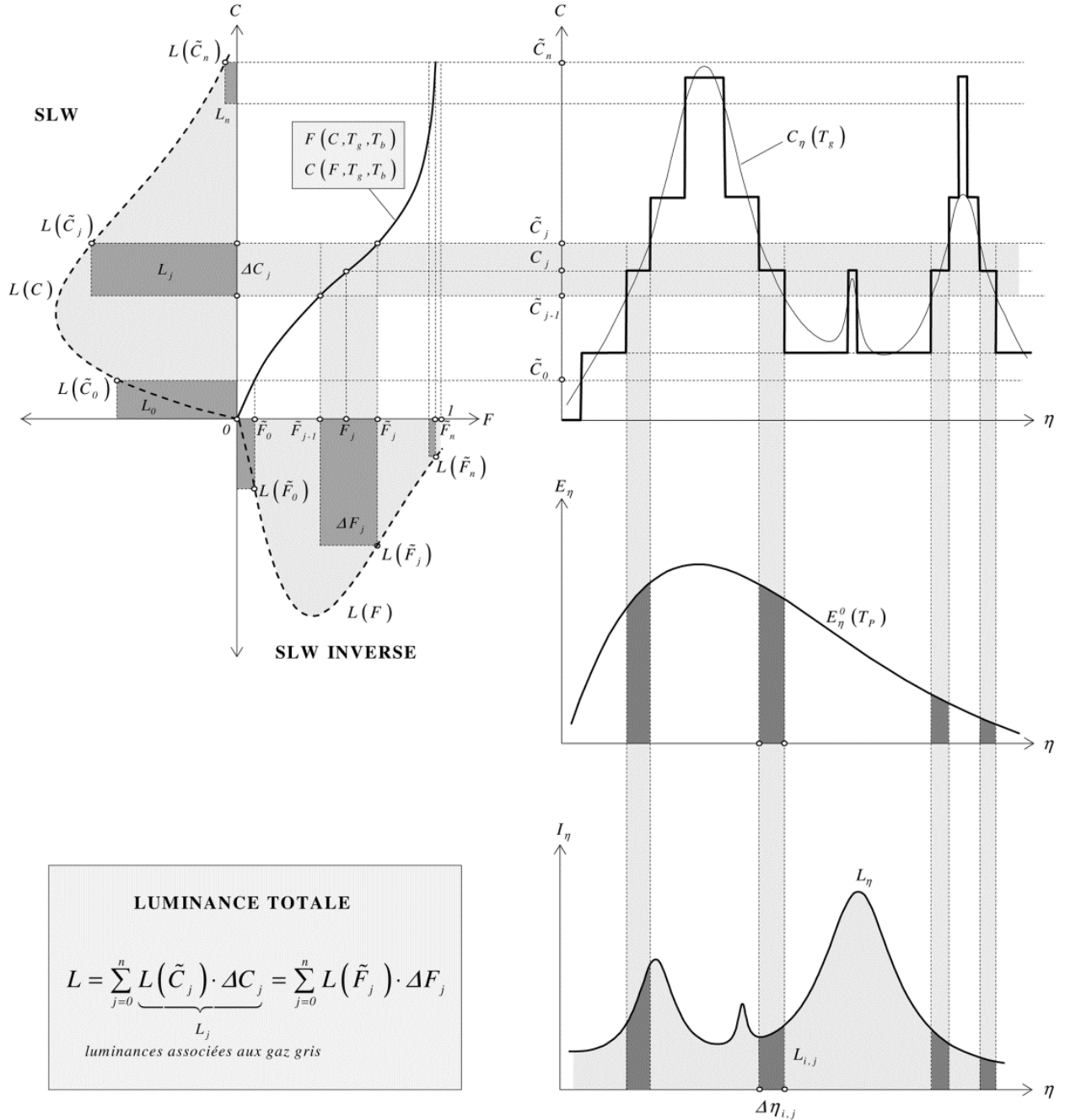


Figure 2 : Construction du modèle SLW généralisé pour un milieu homogène isotherme

4. Le modèle SLW généralisé pour des milieux non isothermes

4.1. Hypothèse de corrélation des spectres

L'hypothèse de spectres corrélés (parfois appelé spectres idéaux) consiste à supposer qu'à chaque valeur de la variable C , choisie dans une condition de référence préalablement fixée,

correspond une unique valeur de cette même quantité dans une autre condition thermophysique. Il existe alors une fonction strictement monotone (bijective) permettant de relier les valeurs du coefficient d'absorption dans la condition de référence à celle dans n'importe quelle autre condition et, de fait, le long de tout trajet non isotherme au sein du milieu. On montre que sous ces hypothèses :

$$\Delta\eta_{i,j} = \left\{ \eta : \tilde{C}_{j-1}^{ref} \leq C_\eta(T_g = T_{ref}, Y = Y_{ref}) \leq \tilde{C}_j^{ref} \right\} = \left\{ \eta : \tilde{C}_{j-1}^{loc} \leq C_\eta(T_g = T_{loc}, Y = Y_{loc}) \leq \tilde{C}_j^{loc} \right\} \quad (4)$$

Par suite de cette relation de correspondance entre les intervalles spectraux associés aux valeurs prises par la variable C dans différentes conditions thermophysiques, on peut déduire les relations implicites suivantes :

$$F\left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref}\right) = F\left(\tilde{C}_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{ref}\right) \quad (5)$$

$$F\left(C_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref}\right) = F\left(C_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{ref}\right) \quad (6)$$

de même que :

$$F\left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc}\right) = F\left(\tilde{C}_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc}\right) \quad (7)$$

$$F\left(C_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc}\right) = F\left(C_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc}\right) \quad (8)$$

Les valeurs de C recherchées peuvent être alors évaluées par résolution numérique des équations implicites précédentes. De façon plus directe et efficace, elles peuvent être obtenues à l'aide de la fonction ALBDF inverse (ce qui permet de s'affranchir de l'utilisation de méthodes souvent itératives de résolution de ces équations).

4.2. Construction du modèle spectral pour des milieux anisothermes – étapes de calcul

1. On commence par choisir une condition thermophysique de référence T_{ref} , Y_{ref} , p_{ref} (en prenant par exemple les moyennes volumiques de température, composition et pression).

2. On construit alors le modèle SLW généralisé dans la condition de référence ce qui nous fournit à la fois les quantités $\tilde{C}_0^{ref}, \tilde{C}_1^{ref}, \dots, \tilde{C}_n^{ref}$ and $C_1^{ref}, \dots, C_n^{ref}$ mais aussi les valeurs de la fonction ALBDF correspondantes (se référer à la Figure 3 pour plus de détails) :

$$\tilde{F}_j^{ref} = F\left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref}\right), \tilde{F}_j^{loc} = F\left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc}\right) \quad (9-a)$$

$$F_j^{ref} = F\left(C_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref}\right), F_j^{loc} = F\left(C_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc}\right) \quad (9-b)$$

3. On évalue ensuite les quantités suivantes, qui seront exploitées ultérieurement :

$$\Delta C_j^{ref} = \tilde{C}_j^{ref} - \tilde{C}_{j-1}^{ref}, \Delta C_0^{ref} = \tilde{C}_0^{ref} \quad (10-a)$$

$$\Delta F_j^{ref} = \tilde{F}_j^{ref} - \tilde{F}_{j-1}^{ref}, \Delta F_0^{ref} = \tilde{F}_0^{ref} \quad (10-b)$$

$$\Delta F_j^{loc} = \tilde{F}_j^{loc} - \tilde{F}_{j-1}^{loc}, \Delta F_0^{loc} = \tilde{F}_0^{loc} \quad (10-c)$$

4. On calcule les valeurs « locales » (idem aux points de calculs) de la variable C à l'aide de la fonction ALBDF inverse considérée à la température de référence de la source :

$$\tilde{C}_j^{loc} = C\left[F\left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref}\right), T_g = T_{loc}, T_P = T_{ref}\right] \quad (11-a)$$

$$C_j^{loc} = C\left[F\left(C_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref}\right), T_g = T_{loc}, T_P = T_{ref}\right] \quad (11-b)$$

ou, de façon alternative, à l'aide de la fonction ALBDF inverse prise à la température locale (qui peut être différente de la précédente si le spectre n'est pas exactement corrélé) :

$$\tilde{C}_j^{loc} = C \left[F \left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc} \right), T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right] \quad (12-a)$$

$$C_j^{loc} = C \left[F \left(C_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc} \right), T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right] \quad (12-b)$$

Les coefficients d'absorption associés aux gaz gris sont ensuite obtenus par :

$$\kappa_j(s) \equiv \kappa_j^{loc} = N^{loc} Y^{loc} C_j^{loc} \quad \text{et} \quad \kappa_0(s) \equiv \kappa_0^{loc} = 0 \quad (13)$$

5. On calcule les poids associés aux gaz gris à l'aide des équations suivantes :

$$\Delta F_j^{loc} \equiv a_j^{loc} = F \left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc} \right) - F \left(\tilde{C}_{j-1}^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc} \right) \quad (14-a)$$

$$\Delta F_j^{loc} \equiv a_j^{loc} = F \left(\tilde{C}_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right) - F \left(\tilde{C}_{j-1}^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right) \quad (14-b)$$

$$\Delta F_0^{loc} \equiv a_0^{loc} = F \left(\tilde{C}_0^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right) \quad (14-c)$$

$$\Delta F_0^{loc} \equiv a_0^{loc} = F \left(\tilde{C}_0^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right) \quad (14-d)$$

6. On écrit l'ETR pour les gaz gris :

$$\frac{\partial}{\partial s} L_j(s, \Omega) = -\kappa_j^{loc} L_j(s, \Omega) + a_j^{loc} \kappa_j^{loc} L^0(T_{loc}) \quad (15)$$

7. Deux formes mathématiques pour les ETR associées aux gaz gris (mises sous la forme d'incrément finis pour les variables C et F) peuvent alors être introduites en définissant :

- l'incrément en luminance pour les gaz gris sous la forme SLW usuelle :

$$L_j(s, \Omega) = L \left(\tilde{C}_j^{ref}, s, \Omega \right) \cdot \Delta C_j^{ref} \quad (16)$$

- l'incrément en luminance pour les gaz gris sous la forme SLW inverse :

$$L_j(s, \Omega) = L \left(\tilde{F}_j^{ref}, s, \Omega \right) \cdot \Delta F_j^{ref} \quad (17)$$

On peut enfin pour chacune des formes précédentes écrire l'ETR (ces deux formes sont équivalentes sous réserve que les spectres des gaz soient corrélés) :

$$\frac{\partial}{\partial s} L \left(\tilde{C}_j^{ref}, s, \Omega \right) = -\kappa_j^{loc} L \left(\tilde{C}_j^{ref}, s, \Omega \right) + \frac{\Delta F_j^{loc}}{\Delta C_j^{ref}} \kappa_j^{loc} L^0(T_{loc}) \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} L \left(\tilde{F}_j^{ref}, s, \Omega \right) = -\kappa_j^{loc} L \left(\tilde{F}_j^{ref}, s, \Omega \right) + \frac{\Delta F_j^{loc}}{\Delta F_j^{ref}} \kappa_j^{loc} L^0(T_{loc}) \quad (19)$$

où les poids associés aux différent gaz gris sont calculés à partir de l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta F_j^{loc} \equiv a_j^{loc} &= F \left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc} \right) - F \left(\tilde{C}_{j-1}^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{loc} \right) \\ &= F \left(\tilde{C}_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right) - F \left(\tilde{C}_{j-1}^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{loc} \right) \end{aligned} \quad (20-a)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_j^{ref} \equiv a_j^{ref} &= F \left(\tilde{C}_j^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref} \right) - F \left(\tilde{C}_{j-1}^{ref}, T_g = T_{ref}, T_P = T_{ref} \right) \\ &= F \left(\tilde{C}_j^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{ref} \right) - F \left(\tilde{C}_{j-1}^{loc}, T_g = T_{loc}, T_P = T_{ref} \right) \end{aligned} \quad (20-b)$$

8. A la limite $n \rightarrow +\infty$, ces deux modèles produisent deux formes rigoureusement équivalentes du modèle SLW exact tel que décrit dans la référence [7].

5. Conclusion

Ce travail décrit les différentes phases du développement du modèle SLW généralisé ainsi que les détails techniques à mettre en œuvre pour son utilisation dans un problème de transfert radiatif. La généralisation de l'approche SLW proposée explore différentes possibilités de construction du modèle par application des fonctions ALBDF directe ou inverse. Par cette approche, on s'affranchit de tout processus itératif de résolution d'équations implicites pour l'utilisation du modèle dans des cas non isothermes. L'approche décrite permet une grande flexibilité quant au choix du nombre de gaz gris à considérer, qui peut aller de deux (un gaz transparent et un gaz absorbant) conduisant alors au modèle appelé SLW-1 jusqu'à une infinité pour lequel la présente approche converge vers la méthode appelée SLW exacte.

Références

- [1] M.K. Denison and B.W. Webb, A spectral line based weighted-sum-of-gray-gases model for arbitrary RTE solvers, *ASME J. Heat Transfer*, 115 (1993), 1004-1012.
- [2] L. Pierrot, Ph. Rivière, A. Soufiani, J.Taine, A fictitious-gas-based absorption distribution function global model for radiative transfer in hot gases, *J. Quant. Spectr. Rad. Transfer*, 62 (1999), 609–624.
- [3] V.P. Solovjov, and B.W. Webb, The Cumulative Wavenumber Method for Modeling Radiative Transfer in Gas Mixtures with Soot,” *J. Quant. Spectr. Rad. Transfer*, 93 (2005), 273-287.
- [4] M.K. Denison, and W.A. Fiveland, A Correlation for the Reordered Wavenumber of the Wide Band Absorptance of Radiating Gases,” *ASME J. Heat Transfer*, 119 (1997), 853-856.
- [5] M.F. Modest, and H. Zhang, The full-spectrum correlated- k distribution for thermal radiation from molecular gas-particulate mixtures *ASME J. Heat Transfer*, 124 (2002), 30-8.
- [6] F. André, V. P. Solovjov, R. Vaillon, D. Lemonnier, Modeling the cumulative distribution of absorption coefficients of gases using the generalized k -moment method, *JQSRT*, 124 (2013), 49-61.
- [7] V.P. Solovjov, and B.W. Webb, Global Spectral Methods in Gas Radiation: The Exact Limit of the SLW Model and its Relationship to the ADF and FSK Methods, *ASME J. Heat Transfer*, 133 (2011), 788-798.

Remerciements

Les auteurs souhaitent exprimer leur gratitude à la Région Poitou-Charentes, France ainsi que remercier l'Agence Nationale de la Recherche pour son support financier dans le cadre du projet ANR-12-BS09-0018 SMART-LECT.