

# Seuils d'instabilité d'un écoulement tournant de convection mixte sous champ magnétique

Brahim MAHFOUD<sup>1</sup>, Rachid BESSAIH<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées, Université Akli Mohand Oulhadj-Bouira, Algérie

<sup>2</sup>Faculté des Sciences de la Technologie, Université Constantine 1, Constantine 25000, Algérie

\* (auteur correspondant : bessaih.rachid@gmail.com)

**Résumé-** Nous étudions numériquement l'écoulement engendré par deux disques en contre-rotation à l'intérieur d'une enceinte cylindrique. Nous avons fait varier les nombres de Reynolds, Richardson et Hartmann. Nous calculons ensuite les états stables successivement rencontrés par l'écoulement : des états stationnaires correspondant au mode azimutal  $m = 1, 2$  et  $3$ . Enfin, un diagramme de stabilité a été établi, donnant ainsi les limites d'existence de la solution axisymétrique et présentant l'effet du champ magnétique vertical sur la stabilité de l'écoulement de convection mixte.

## Nomenclature

$B$	champ magnétique, $T$	$u, v, w$	composantes de la vitesse dans les directions radiale, axiale, et azimutale
$g$	accélération de la pesanteur, $m \cdot s^{-2}$		
$H$	hauteur du cylindre, $m$		
$Ha$	nombre de Hartmann		
$J$	densité de courant électrique adimensionnelle, $A \cdot m^{-2}$		
$P$	pression adimensionnelle		
$Pr$	nombre de Prandtl		
$R$	rayon du cylindre, $m$		
$Re$	nombre de Reynolds		
$Re_{cr}$	nombre de Reynolds critique		
$Ri$	nombre de Richardson		
$T$	température, $K$		
$T_c$	température locale du disque froid, $K$		
$T_h$	température locale du disque chaud, $K$		
$U$	vitesse adimensionnelle		
			<i>Symboles grecs</i>
		$\Omega$	vitesse angulaire, $rad \cdot s^{-1}$
		$\Phi$	potentiel électrique adimensionnel
		$\Theta$	température adimensionnelle
		$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$
		$\beta$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
		$\gamma$	rapport d'aspect
		$\nu$	viscosité cinématique, $m^2 \cdot s^{-1}$
		$\rho$	masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
		$\sigma$	conductivité électrique, $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
		$\tau$	temps adimensionnel

## 1. Introduction

L'étude d'un écoulement laminaire en régime de convection mixte à faible nombre de Prandtl (métaux liquide) dans une géométrie cylindrique a fait l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales au cours des dernières années du fait de ses nombreuses applications industrielles tels que le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des cristaux par le procédé de tirage Czochralski [1-2]. En outre si l'écoulement n'est pas stable, des défauts dans le cristal formé, apparaissent (des problèmes d'impureté et non-homogénéité des métaux liquides). Une approche à l'obtention de cristaux de haute qualité est de contrôler la convection dans le fluide. Puisqu'un champ magnétique influence le mouvement d'un fluide électriquement conducteur, il est suggéré que le mouvement du fluide peut être contrôlé en cultivant un cristal en présence d'un champ magnétique.

Notre objectif consiste à étudier un écoulement engendré par deux disques tournants en contre-rotation des disques d'extrémités, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique fixe remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ), soumise à un champ magnétique orienté

verticalement et un gradient de température en montrant que l'axisymétrie de l'écoulement est brisée par une bifurcation régulière dont nous présentons les seuils en fonction du nombre de Richardson ( $Ri=0,0.5,1, 2$ ) et l'intensité du champ magnétique ( $Ha=0, 5, 10, 20$ ), donnant ainsi les limites d'existence de la solution axisymétrique. Enfin, nous présentons l'aspect d'un écoulement pleinement tridimensionnel, obtenu grâce au code Fluent.

## 2. Géométrie et model mathématique

La géométrie considérée (Fig. 1) est une enceinte cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ , dont le rapport d'aspect ( $\gamma = H/R = 2$ ). L'enceinte contient de l'aluminium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ). Le disque inférieur est en rotation à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  et maintenu à la température locale  $T_h$ , le disque supérieur est en contre-rotation, maintenu à la température locale  $T_c$  ( $T_h > T_c$ ). La paroi latérale rigide est adiabatique. L'ensemble est soumis à un champ magnétique  $B$  uniforme orienté verticalement. Les parois de l'enceinte cylindrique sont considérées électriquement isolées. Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, et du potentiel électrique sous formes adimensionnelles sont données par :

$$\nabla U = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \cdot \nabla U = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 U + Ri \Theta e_z + \frac{Ha^2}{Re} (J x e_z) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \cdot \nabla \Theta = \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^2 \Theta \quad (3)$$

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (U x e_z) \quad (4)$$

$$J = -\nabla \Phi + U x e_z \quad (5)$$

$U (u, v, w)$  représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale,  $J$  densité de courants électriques et  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  (axial): le vecteur du champ magnétique, les nombres successive de Reynolds  $Re (= \Omega R^2 / \nu)$ , nombre de Richardson.  $Ri = (g\beta (T_h - T_c) / R \Omega^2)$ , nombre de Hartmann  $Ha = BR \sqrt{\sigma / \rho \nu}$  et nombre de Prandtl  $Pr = \nu / \alpha$ .

Les conditions initiales à  $\tau = 0$  :  $u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 0, \Phi = 0$

Les conditions aux limites, pour un instant  $\tau > 0$  on a :

- A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1)$$

- Au disque inférieur chaud et en rotation

$$u = 0, v = 0, w = r, \Theta = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -1/2\gamma)$$

- Au disque supérieur froid, en contre-rotation

$$u = 0, v = 0, w = -r, \Theta = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 1/2\gamma)$$

## 3. Validation des résultats

Nous procédons à la validation des résultats de la simulation obtenue à l'aide du logiciel FLUENT en comparant avec ceux obtenus par d'autres auteurs. La comparaison des résultats

a été faite sur une configuration hydrodynamique en contre-rotation des disques d'extrémités dans une cavité cylindrique de rapport de forme  $\gamma=2$  étudié par Nore et al. [3]. La figure 2 représente les contours des vecteurs du champ méridien (à droite) et les isocontours de la vitesse azimutale (à gauche) dans le plan ( $r=0$ ) à  $Re = 300$ .

## 4. Résultats et discussion

### 4.1 Ecoulement de base

A faibles vitesses de rotation, les visualisations du dessus de l'écoulement en contre-rotation sont axisymétriques stationnaires. La configuration étudiée est invariante par rotation autour de l'axe vertical et par rotation d'angle  $\pi$  autour d'un axe horizontal arbitraire  $R_\pi(\theta)$ . Ces deux groupes de symétries confèrent la symétrie  $O(2)$  au système pour tout rapport de forme, d'après Nore et al. [3]. Les disques en rotation entraînent dans leur mouvement les couches de fluide immédiatement adjacentes du fait de viscosité. Cela crée une couche de cisaillement de vitesse azimutale, sous l'effet de la force centrifuge, les particules sont rejetées vers le centre à une hauteur. L'écoulement caractérisé par la juxtaposition de deux tourbillons contre-rotatifs séparés par une couche de transition, noté que  $u$  est invariant au cours de la réflexion en  $z$  tandis que  $v$  et  $w$  changent de signe. Les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées (Fig.3). La contre-rotation crée une couche de mélange azimutale équatoriale, chaque disque donne lieu à une couche d'Ekman [4].

### 4.2 Ecoulement sans champ magnétique

Dans le cas de convection forcée, l'écoulement présente une couche de cisaillement horizontale séparant deux cellules de recirculation associées à la rotation de chaque disque. Cette couche de cisaillement n'est de même nature que la couche décollée. Cette couche de cisaillement est sujette à une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, donnant lieu à des tourbillons radiaux co-rotatifs. La nature des bifurcations susceptibles d'intervenir dans les écoulements en cavité axisymétrique dépend du détail des symétries des conditions aux limites. Tandis que l'écoulement de base contient plusieurs symétries, les différentes bifurcations sont classiquement associées à des brisures successives de ces symétries, l'écoulement bifurqué ne possédant pas alors que des symétries issues d'un sous-groupe des symétries initiales. Si l'on se concentre sur le cas particulier  $H/R = 2$ , le mode le plus instable est le mode  $m = 1$ , appelé "mode mixte" (M). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des ondes tournantes (TW) [3], pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire  $m = 2$ , appelés "mode pur" (P) (Fig.4). Physiquement, l'état de mode mixte M peut être comme résultat de la première instabilité correspond à une modulation azimutale de la couche de cisaillement équatoriale qui donne naissance à un tourbillon radial stationnaire. Ces solutions deviennent instables à  $Re=412$  et se transforment en ondes tournantes, droites ou gauches. Ces cycles sont détruits à  $Re=418$  où la branche de solutions devient celle des modes  $m = 2$ . La branche de mode pur est instable à la première apparition à  $Re=401$ , elle devient stable à  $Re = 452$  par l'intermédiaire d'une séquence de bifurcations, l'état stable de mode pur à  $Re = 500$  est montré dans la figure (5). Les isocontours de la vitesse radiale montrent deux vortex monopole à  $r=0.7$ , centré autour du point elliptique près de  $\theta=\pi, z=0$  et diamétralement opposé au point hyperbolique près de  $\theta=0, z=0$  (Fig.5 à droite).

Un gradient de température provoque une structure différente à celle de l'écoulement de base si on augmente le nombre de Richardson à  $Ri=0.5$ , l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire à  $Re=275$ . En augmentant le nombre de Reynolds jusqu'à  $Re=450$  dans le cas de  $Ri=0.5$ , on remarque que la structure continue le changement avec toujours le mode  $m=1$  à l'équateur du cylindre  $z=0$ . La figure 6 expose les isocontours et les isosurfaces de la vitesse radiale à  $Re=450$ ,  $Ri=0.5$  qui montre un tourbillon (vortex) à  $r=0.70$ . Le champ de vecteurs vitesses ( $v$ ,  $w$ ) à  $r=0.70$ , présentent au milieu un tourbillon géant corotatif (Figure 6, à droite). A la valeur critique du nombre de Reynolds estimée à  $Re\approx 592$ , l'écoulement subit une deuxième bifurcation oscillatoire périodique.

### 4.3 Ecoulement avec champ magnétique

Au-delà d'une valeur critique du nombre de Reynolds, l'écoulement présente des oscillations périodiques. Si on applique un champ magnétique l'écoulement se stabilise et redevient stationnaire et retrouve la symétrie de réflexion. Pour le cas de convection forcée ( $Ri=0$ ), l'état de base perd la stabilité aux modes non- axisymétriques  $m = 2$  au nombre de Reynolds  $Re = 506$  ;  $Ha=5$  et  $Re=910$  ;  $Ha=10$  respectivement .Ainsi que l'état de base perd la stabilité au mode non- axisymétrique  $m = 3$  au nombre de Reynolds  $Re = 2150$  et  $Ha=20$ . Prenant un cas, c'est celui avec un nombre de Hartmann modéré,  $Re=2300$ ,  $Ri=0$  et  $Ha=20$ , concernant les modes  $m=3$ . Nous avons présenté les isosurfaces de la vitesse axiale (à droite de la figure 7) et la vitesse radiale (au milieu), ainsi que les isocontours de la vitesse radiale (à gauche de la figure 7). Nous avons observé trois tourbillons radiaux corotatifs apparaît à  $r= 0.7$ , ce qui caractérise le mode  $m=3$ .

Si le gradient de densité est suffisamment important (il dépasse une valeur critique) et il y a naissance d'un mouvement convectif, qui permet de transporter la chaleur du bas vers le haut de la couche de fluide plus efficacement que la conduction seule [5]. Donc, dans le cas de  $Ri>0$ , l'état de base perd la stabilité et la branche de solutions devient celle des modes  $m = 1$  quelque soit l'intensité de champ magnétique ( $Ha=5,10$  et  $20$ ). Dans le but de comprendre l'effet de gradient de température sur l'écoulement en contre-rotation avec champ magnétique, nous avons augmenté cette fois l'intensité du champ magnétique jusqu'à  $Ha=20$ , soit par exemple le cas de  $Ri=2$  avec  $Re=400$  et  $Ha=20$ . Nous avons observé quelques changements dans la structure concernant le détachement du vortex en deux et la déformation de la structure du potentiel (Figure 8, au milieu). L'état est convectif et les isothermes sont déviées vers la mi-hauteur pendant que le fluide chaud est poussé vers le haut à partir du disque inférieur (Figure 8, à droite).

### 4.4 Diagramme de stabilité

Les résultats quantitatifs de l'écoulement en contre-rotation avec gradient de température et soumis à un champ magnétique  $B$  de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut, sont visualisées graphiquement dans le plan ( $Re-Ha$ ) sous forme de courbes paramétriques aux différentes valeurs du nombre de Richardson,  $Ri$  (Fig.9). Cette figure montre que pour des valeurs du nombre de Reynolds,  $Re$  et de Hartmann,  $Ha$  situées sous la courbe l'écoulement reste laminaire stable axisymétrique et au-dessus de la courbe l'écoulement est asymétrique. Pour la courbe  $Ri=0$ , les traces au dessus de la courbe représentent les isocontours de vitesse verticale à mi-hauteur ( $z=0$ ) de la cavité cylindrique, pour les différents modes ( $m=1, 2, 3$ ). Dans le cas  $Ri > 0$  les modes ( $m=1$ ) évalués au voisinage des points de bifurcation primaire, dans ce cas le mode  $m=1$  apparaît tout au long  $Ha$  croissants.

## 5. Conclusion

Une étude numérique de la convection mixte dans une enceinte cylindrique remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ), soumise à un champ magnétique orienté verticalement, a été faite. Notre étude est divisée en deux parties : la première partie est une étude de l'écoulement sans champ magnétique et la deuxième partie, avec champ magnétique. La grande diversité des structures que nous venons d'observer est remarquable en regard de l'apparente simplicité de notre géométrie. Cette situation est typique des systèmes gouvernés par des équations non-linéaires, dans la classe desquels entrent les écoulements des fluides : aux solutions de bases, en général simple, car la géométrie possède un grand nombre de symétrie, se substitue des motifs beaucoup plus variés, pouvant parfois coexister entre eux.

Une validation des résultats a été faite, par comparaison avec des données numériques trouvées dans la littérature. Nos simulations numériques avec et sans champ magnétique ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ( $Ha=0, 5, 10$  et  $20$ ) et différentes valeurs du nombre de Richardson ( $Ri=0, 0.5, 1$  et  $2$ ), afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique,  $Re_{cr}$

En contre-rotation, l'écoulement est plus instable et présente une grande richesse dans les structures engendrées. Dans le cas de convection forcée ( $Ri=0$ ), le mode le plus instable est le mode  $m = 1$ , appelé "mode mixte" (M). À mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des ondes tournantes (TW), pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire  $m = 2$ , appelés "mode pur" (P). En augmentant le nombre de Richardson ( $Ri=0.5, 1$  et  $2$ ), l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire avec  $m=1$ . Toutefois, en présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement garde sa stabilité jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds plus grande. Pour le cas de convection forcée ( $Ri=0$ ), l'état de base perd la stabilité aux modes non- axisymétrique  $m = 2$  à partir de Reynolds  $Re = 506$  ;  $Ha=5$  et  $Re=910$  ;  $Ha=10$  respectivement et aux modes non- axisymétriques  $m = 3$  à  $Re = 2150$  et  $Ha=20$ . Dans le cas  $Ri>0$  avec champ magnétique le mode  $m=1$  apparaît tout au long  $Ha$  croissants.

En conséquence, un champ magnétique plus fort est nécessaire pour garder l'écoulement stable axisymétrique pour certaines valeurs élevées du nombre de Reynolds. Les résultats obtenus mettent en évidence la fiabilité de la technique de stabiliser les écoulements, par l'application d'un champ magnétique vertical.

## Références

- [1] J.E. Hart and S.Kittelman, Instabilities of the sidewall boundary layer in a differentially driven rotating cylinder, *Phys. Fluids*. 8 (1996) 692–696.
- [2] E.Knobloch, Rotating convection: recent developments, *Int. J. Eng. Sci.*, 36 (1998) 1421-1450.
- [3] C. Nore, M. Tartar, O.Daube and L.S.Tuckerman, Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks, *J. Fluid Mech.*, 511(2004) 45-65.
- [4] B. Mahfoud and R. Bessaïh, Oscillatory Swirling Flows in a Cylindrical Enclosure with Co-/Counter-Rotating end Disks Submitted to a Vertical Temperature Gradient , *Fluid Dynamics & Materials Processing* , 284, no.1 (2011)1-26.
- [5] B. Mahfoud and R.Bessaïh, Stability of Swirling Flows with Heat Transfer in a Cylindrical Enclosure with Co/Counter-Rotating End Disks Under an Axial Magnetic Field, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 61 ( 2012) 463-482.

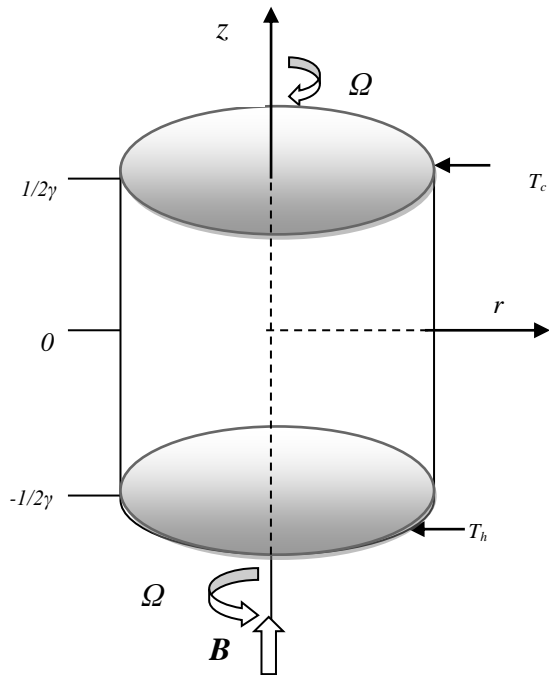


Figure 1 : Géométrie du problème

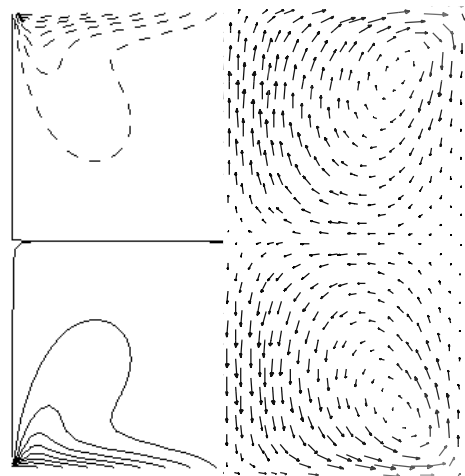


Figure 2 : Contours des vecteurs du champ méridien (à droite) et les isocontours de la vitesse azimutale (à gauche) dans le cas  $Re = 300$ .

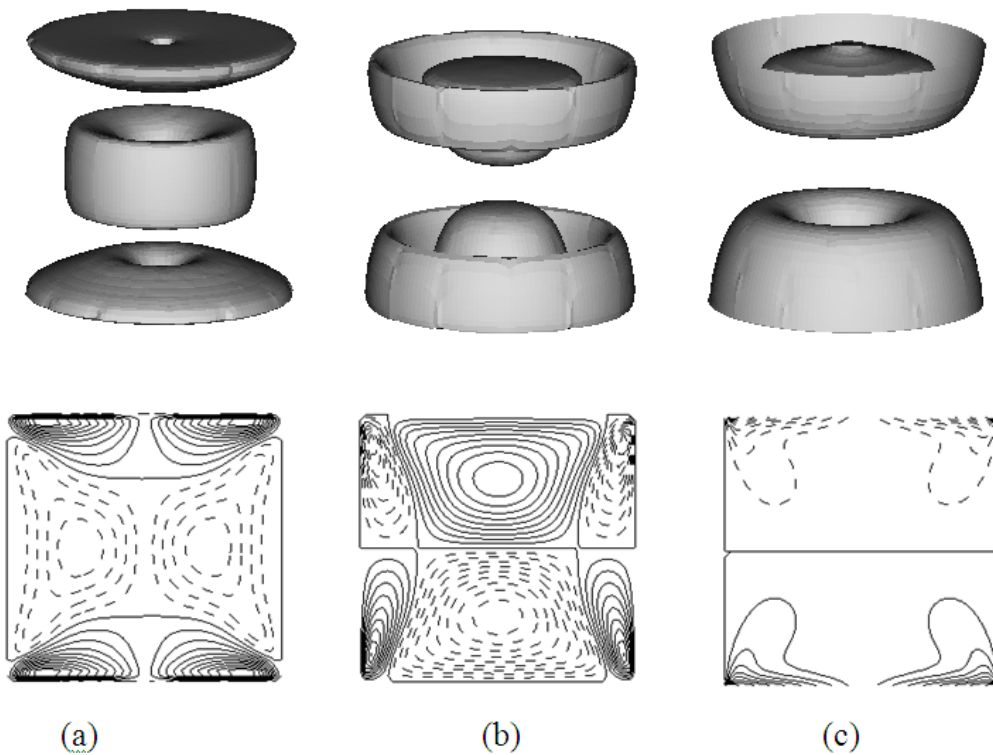


Figure 3: Etat de base à  $Re=300$  : Isosurfaces (haut), isocontours (bas) de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimutale.

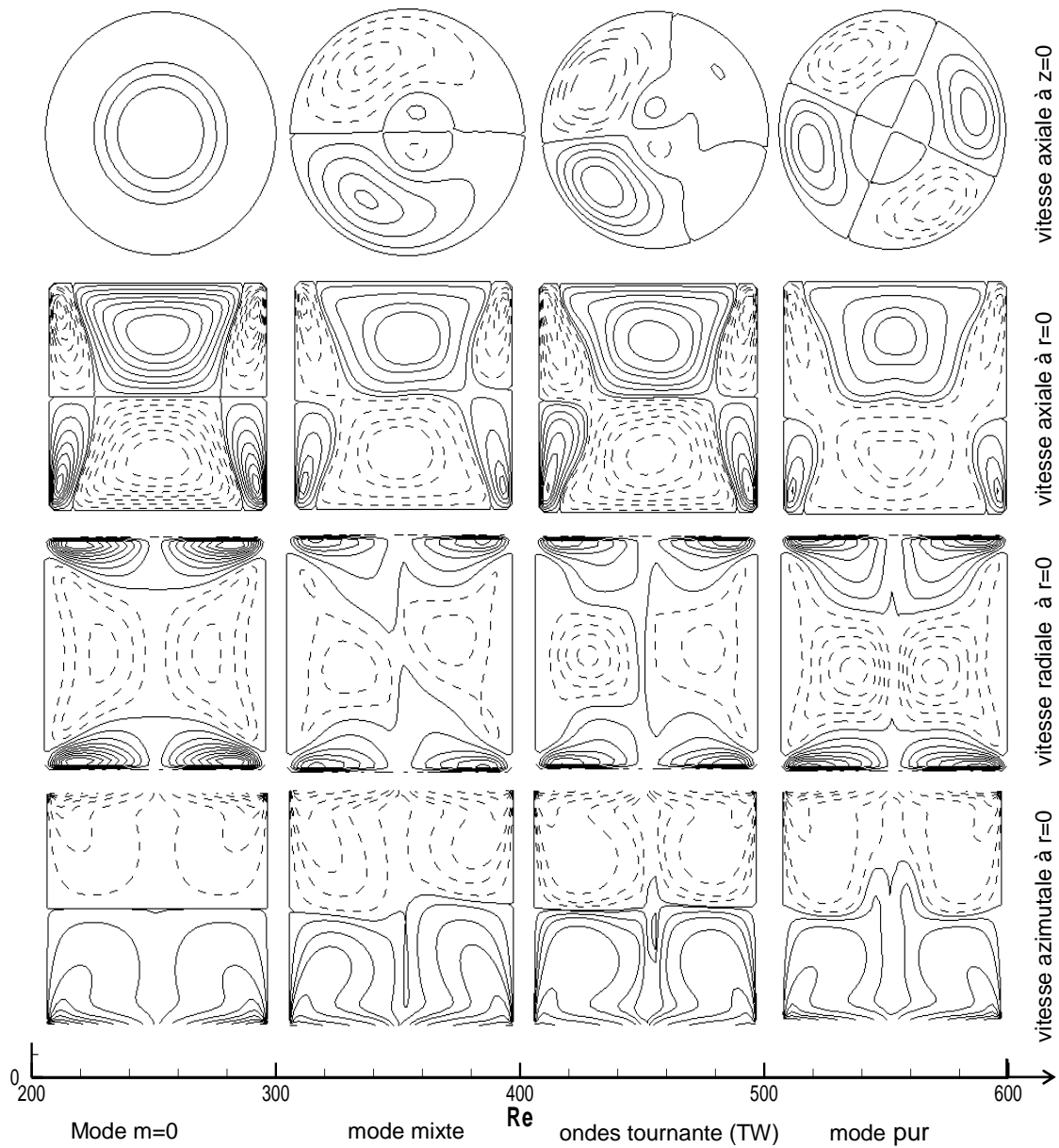


Figure 4 : Diagramme de bifurcation en fonction de  $Re$ , présente les différentes modes à  $z=0$  et  $r=0$ .

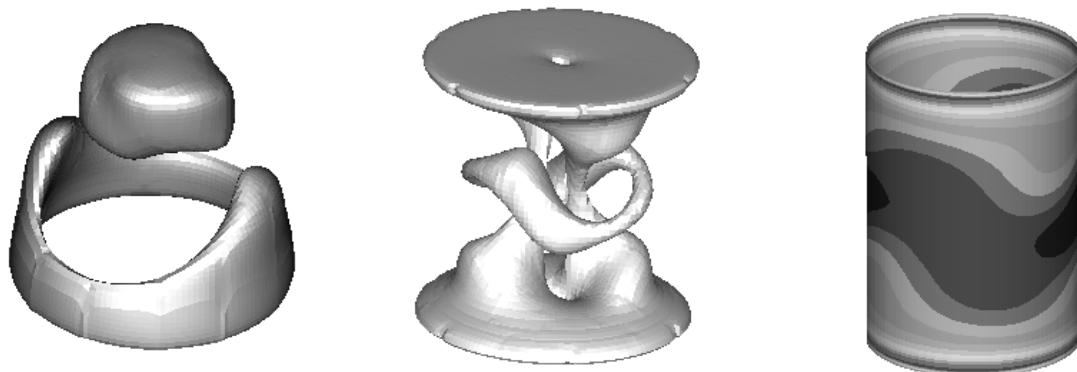


Figure 5 : Isosurfaces de la vitesse axiale (à gauche) radiale (au milieu) et isocontours de la vitesse radiale à  $r=0.70$  (à droite) pour le cas de mode Pur,  $m=2$  à  $Re=500$ ,  $Ri=0$  et  $Ha=0$ .

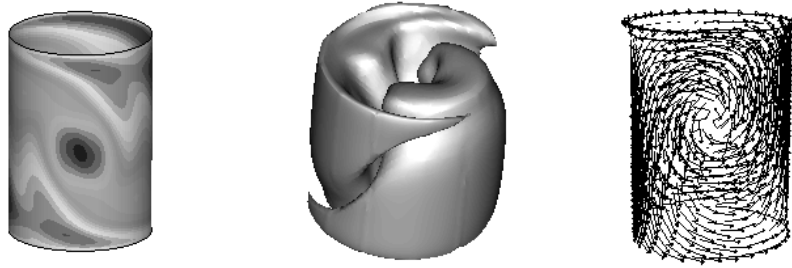


Figure 6 : Mode  $m=1$  à  $Re=450$ ,  $Ri=0.5$  et  $Ha=0$ . Isocontours de la vitesse radiale (à gauche) isosurfaces de la vitesse axiale (au milieu) et le champ de vecteurs vitesses  $(v, w)$  à  $r=0.70$  (à droite).

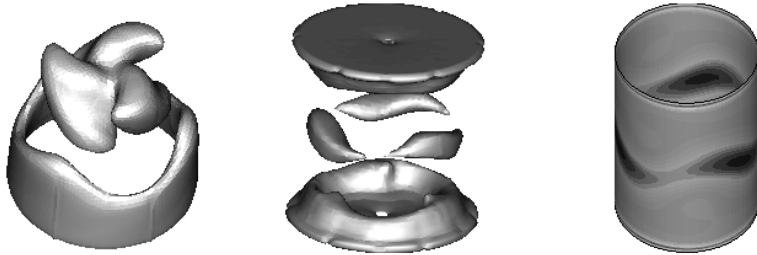


Figure 7 : Mode  $m=3$  à  $Re=2300$ ,  $Ri=0$  et  $Ha=20$ . Isosurfaces de la vitesse axial (à gauche) radiale (au milieu) et isocontours de la vitesse radiale à  $r=0.70$  (à droite).

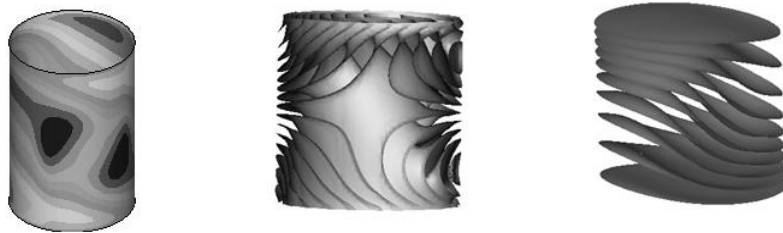


Figure 8 : Les isosurfaces de la vitesse radiale à  $r=0.70$  (à gauche) potentiel électrique (au milieu) champ de température (à droite), dans le cas  $Re=400$ ,  $Ri=2$  et  $Ha=20$ .

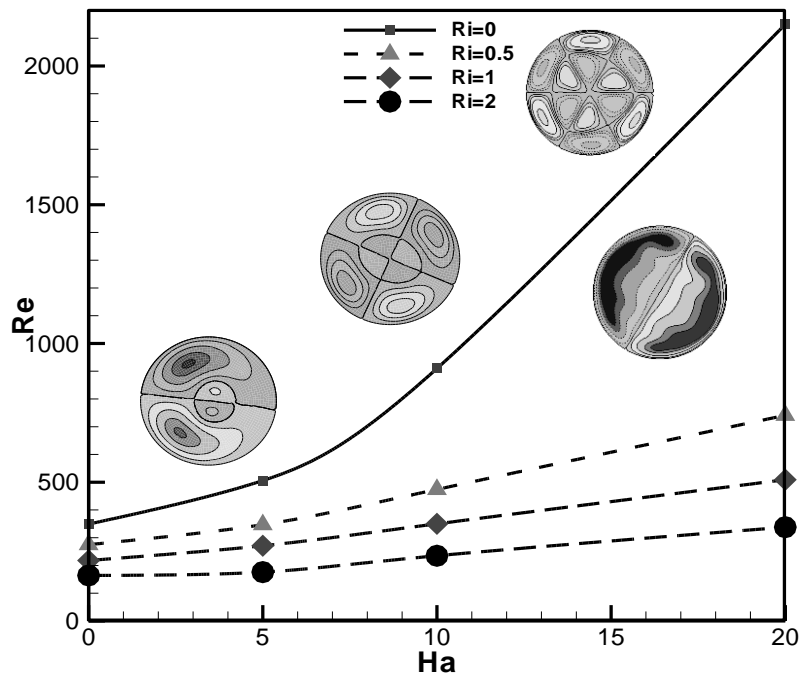


Figure 9 : Diagramme paramétrique de stabilité ( $Re_{cr}-Ha$ )