

Solution semi-analytique du transfert de chaleur convectif dans un film liquide s'écoulant sur une plaque plane chauffée.

Adrien AUBERT¹, Fabien CANDELIER¹ et Camille SOLLIEC^{1*}

¹GEPEA, Ecole des Mines de Nantes
Département Systèmes Energétiques et Environnement
4 rue Alfred Kastler, BP 20722
Nantes, Cedex 3

* (auteur correspondant : camille.solliec@emn.fr)

Résumé – Dans cet article, nous proposons une solution semi-analytique sous la forme d'une somme de fonctions, à l'établissement de la couche limite thermique d'un film d'eau s'écoulant sur une paroi inclinée chauffée à température constante. La solution permet d'appréhender de manière explicite le poids de chaque paramètre physique intervenant dans ce type de problème (propriétés du fluide, température de paroi, débit ...). Ainsi, l'utilisation d'un tel résultat permet de réduire le temps de calcul numérique, mais aussi d'extraire des données très utiles comme le champ de température dans le fluide ou le flux thermique à la paroi.

Nomenclature

A	constante
C_n	$n^{\text{ième}}$ constante d'intégration
g	constante gravitationnelle, $m^2.s^{-1}$
L	longueur de la paroi, m
M	fonction de Whittaker
Pe	nombre de Peclet
Q	débit volumique, $m^3.s^{-1}.m_{\text{paroi}}^{-1}$
T	température, K
u	vitesse du film d'eau, $m.s^{-1}$
X_n	$n^{\text{ième}}$ racine de $M_{\frac{A-1}{4}, \frac{1}{4}}(A)$
x	coordonnée, m
y	coordonnée, m

Symboles grecs

α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
β	angle d'inclinaison de la paroi, rad
δ	épaisseur du film d'eau, m
η	paramètre adimensionné, $m^2.s^{-1}$
φ	flux échangé à la paroi, $W.m^{-2}$
λ	conductivité thermique de l'eau, $W.m^{-1}.K$
ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
θ	température sans dimension

Indices et exposants

e	de l'eau
p	de la paroi
*	sans dimension

1. Introduction

Les écoulements de film liquide avec transferts de chaleur et de masse font l'objet d'une recherche très active du fait de leurs grandes diversités d'applications. On retrouve en effet les films liquides dans des procédés industriels très variés tels que le refroidissement de réacteurs nucléaires [1], certaines techniques de désalinisation d'eau de mer [2], la protection solaire des bâtiments [3] ou encore la protection de réservoir d'hydrocarbures en cas d'incendie [4]. L'idée unissant ces applications est l'exploitation des forts échanges de chaleur et de masse mis en jeu dans les films liquide (convection, évaporation...), tout en nécessitant une faible quantité d'eau.

Cependant, malgré de nombreuses études approfondies, on ne trouve que peu de résolution analytique de ce type de problème (voir par exemple [5]). Ceci résulte principalement du fort

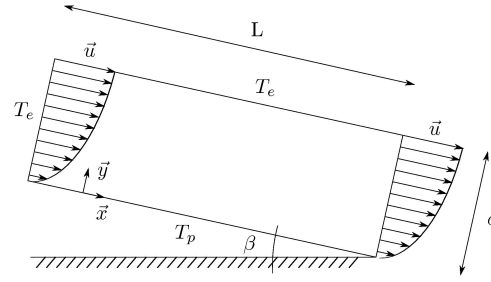


Figure 1 Schéma de la situation considérée

couplage entre les différents phénomènes qui y prennent place et donc d'une difficulté accrue à extraire des solutions simples. On observe alors de manière quasi-systématique que le problème est résolu par l'utilisation de méthodes numériques. Bien qu'efficace, l'approche numérique ne permet pas d'identifier le lien réel entre les différents paramètres mis en jeu dans le transfert de chaleur, à moins d'effectuer une étude paramétrique complète du problème.

Cette lacune nous a conduit à chercher une solution analytique dans un cas simplifié, soit l'établissement de la couche limite thermique dans un fluide s'écoulant sur une paroi inclinée chauffée à température constante, comme décrit dans la suite.

2. Résolution semi-analytique

2.1. Mise en équations

Le film d'eau est considéré comme étant établi et en régime laminaire. Ainsi, la théorie de Nusselt nous renseigne sur l'allure du profil de vitesse (voir Figure 1):

$$u(y) = \frac{g}{\nu} \sin(\beta) \left(y\delta - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (1)$$

L'intégration de ce profil (Eq (1)) nous amène à une relation simple entre l'épaisseur du film et le débit :

$$\delta = \left(\frac{3Q\nu}{g \sin(\beta)} \right)^{1/3} \quad (2)$$

D'autre part en se plaçant dans le cadre des hypothèses de couche limite, l'équation de la chaleur peut s'écrire sous la forme :

$$u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

En terme de conditions aux limites, on considère que l'eau arrive sur la paroi à la température T_e et que tout au long du calcul, la surface libre reste à cette même température (on fait l'hypothèse que la couche limite thermique δ_{th} n'atteint pas la surface). Moyennant une écriture sous forme adimensionnelle ($\theta = \frac{T_p - T}{T_p - T_e}$, $x^* = \frac{x}{\delta Pe}$ et $y^* = \frac{y}{\delta}$) et deux changements de variables ($\eta = 1 - y^*$ et $\theta' = \theta - (1 - \eta)$), on se ramène à l'équation de la chaleur suivante :

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial \theta'}{\partial x^*} - \alpha \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \eta^{*2}} = 0 \quad (4)$$

On montre alors en utilisant une méthode de séparation de variable (voir [6]) que la solution de cette équation s'écrit :

$$\theta' = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n M_{\frac{X_n}{4}, \frac{1}{4}}(X_n \eta^2) e^{-X_n^2 x^*} \quad (5)$$

où C_n sont des constantes d'intégration, M la fonction spéciale de Whittaker et X_n la $n^{\text{ième}}$ racine de la fonction $M_{\frac{A}{4}, \frac{1}{4}}(A)$.

Afin d'exploiter cette solution, reste seulement à déterminer les constantes C_n et X_n .

2.2. Détermination des constantes

La détermination des constantes s'avère plus délicate que dans les problèmes classiques. En effet, les fonctions habituellement impliquées dans la résolution de l'équation de la chaleur (fonctions trigonométriques, de Bessel) ont souvent des propriétés d'orthogonalité qui permettent de déterminer chacune des constantes de manière indépendante. Ce n'est malheureusement pas le cas des fonctions de Whittaker, nous devons donc nous assurer que le nombre d'éléments considérés est suffisant pour ne pas affecter les constantes.

Dans un premier temps, nous avons calculé les valeurs des racines (X_n) de la fonction $M_{\frac{x^*}{4}, \frac{1}{4}}(x^*)$ par un algorithme de type Newton. Ensuite pour déterminer les coefficients C_n , nous utilisons la condition à la limite $\theta'(x^* = 0, \eta) = \eta$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_{\frac{X_n}{4}, \frac{1}{4}}(X_n \eta^2) = \eta^{3/2} \quad (6)$$

En réduisant le nombre de terme dans l'équation (6) à un nombre fini et en définissant le produit scalaire $\langle f(\eta) | g(\eta) \rangle = \int_0^1 f(\eta) g(\eta) d\eta$, la détermination des constantes C_n se résume à la résolution d'un simple système linéaire. Des restrictions à 50 et 100 éléments ont montré que la valeur des constantes n'était que peu affectée par le nombre d'éléments considérés (au-delà de 50). Un tableau comportant les valeurs des vingt premières constantes est présenté dans [6]. Le caractère adimensionné du problème fait que ces mêmes constantes peuvent être réutilisées quelques soient les paramètres d'un problème équivalent.

2.3. Solutions semi-analytique

Si l'on réécrit l'équation (5) avec les paramètres adimensionnés x^* , y^* et θ , on obtient l'expression semi-analytique de la température adimensionnée en fonction de la position adimensionnée (x^* , y^*) :

$$\theta(x^*, y^*) = y^* + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{M_{\frac{X_n}{4}, \frac{1}{4}}\left(X_n (1 - y^*)^2\right)}{\sqrt{1 - y^*}} e^{-X_n^2 x^*} \quad (7)$$

On est donc capable de calculer très rapidement le champ de température en tout point du domaine. D'autre part on peut obtenir le flux échangé à la paroi à partir de la dérivée de l'expression (7) par rapport à y^* . On obtient alors l'expression semi-analytique du flux :

$$\varphi = \lambda \frac{T_{paroi} - T_{eau}}{\delta} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n (3 + X_n) M_{\frac{X_n}{4} + 1, \frac{1}{4}}(X_n) e^{-X_n^2 x^*} \right) \quad (8)$$

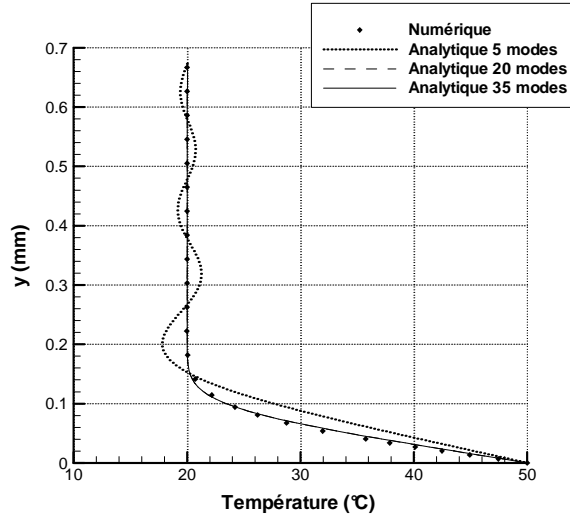


Figure 2 Profils de température analytique pour différents modes et numérique en $x=6\text{mm}$

3. Comparaison de la solution semi-analytique avec la solution numérique

Maintenant que nous avons trouvé une solution semi-analytique à notre problème, nous allons la comparer dans un cas particulier avec les résultats issus de la résolution numérique de l'équation de la chaleur. On prend les valeurs suivantes pour les températures : $T_p=50^\circ\text{C}$ et $T_e=20^\circ\text{C}$. Le débit est fixé à $1 \text{ l/s.m}_{\text{paroi}}$.

Nous nous plaçons à nouveau dans les hypothèses de type couche limite concernant l'écoulement (Eq. 1) et l'équation (3) est discrétisée par la méthode des différences finies et les schémas utilisés sont du second ordre. On suppose comme condition à la limite finale que le profil de température est linéaire. Le maillage choisis est de 500×100 .

3.1. Influence du nombre de modes considérés

La solution semi-analytique (7) doit être restreinte à un nombre fini d'éléments (ou « modes ») afin de pouvoir être calculée. Nous avons calculés 100 constantes (voir Section 2.2), nous disposons donc au maximum de 100 modes. Or on sait que le nombre de mode va avoir une importance capitale sur les résultats à proximité de la singularité (phénomène de Gibbs). En effet de manière classique lorsque l'on doit approximer une solution analytique par un nombre fini de termes, cela requière une plus grande quantité de terme pour reproduire la physique à proximité de la perturbation (proche de $x=0$). Nous présentons Figure 2, la comparaison entre le résultat obtenu par le calcul numérique et ceux obtenus avec la solution semi-analytique pour une restriction à 5, 20 et 35 modes au point $x=6 \text{ mm}$.

On observe que l'utilisation de seulement 5 modes s'avère insuffisante pour décrire précisément la physique à proximité du point $x=0$. La température alors obtenue oscille autour d'une valeur néanmoins proche de celle obtenue par la solution numérique. Concernant les restrictions à 20 et 35 modes, on remarque que les solutions sont confondues et donnent des résultats concordant avec ceux obtenus par la résolution numérique. On peut donc conclure qu'une restriction à 20 modes va être suffisante pour représenter correctement la physique de notre problème dans la quasi-totalité du domaine. C'est ce nombre de modes que nous garderons par la suite.

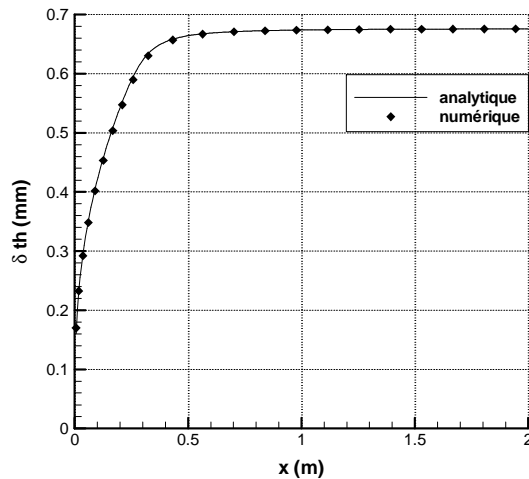


Figure 3 Allure de la couche limite thermique

3.2. Comparaison de l'allure de la couche limite

Afin de poursuivre la comparaison entre les deux solutions, nous avons choisi de présenter les allures obtenues pour la couche limite thermique δ_{th} dans les deux situations : numérique et analytique (voir Figure 3). Nous avons pris comme critère le lieu des points où la température vaut 1.01 fois T_e , la valeur à la surface libre, puis nous avons calculé les valeurs par interpolation linéaire lorsque ce lieu est situé entre deux mailles.

On note une bonne adéquation des résultats, tant dans la partie d'établissement de la couche limite thermique (entre 0 et 0.5 m) que concernant la position quasi-établie (passé 0.5m).

3.3. Comparaison des flux à la paroi

Enfin, nous allons comparer le flux obtenu à la paroi par l'équation (8) ainsi que le flux obtenus par calcul numérique (Figure 4).

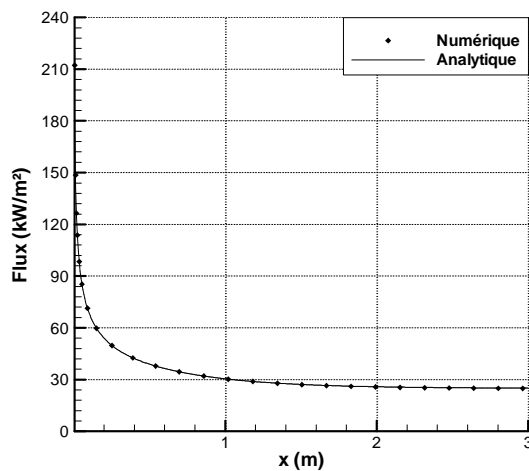


Figure 4 Comparaison du flux échangé à la paroi (Numérique et Analytique)

On observe encore une fois une très grande similitude entre les résultats obtenus par le modèle numérique et par la solution analytique. Le flux tend vers une valeur constante correspondant à l'expression du flux en régime établi ($\lambda \frac{T_p - T_e}{\delta}$).

4. Conclusion

Nous présentons dans cet article une solution semi-analytique d'un film d'eau s'écoulant sur un plan incliné chauffé à température constante. L'écoulement est supposé laminaire et établi. Nous obtenons une solution sous la forme d'une somme infinie de fonctions. D'après une comparaison avec la solution du même problème calculée numériquement, une restriction à 20 modes semble suffisante pour décrire correctement la physique. Dès lors, du fait de son caractère sans dimension, la solution semi-analytique permet de calculer le champ de température en tout point du film ainsi que le flux à la paroi pour tout problème similaire à celui traité ici, avec une souplesse que ne peut apporter une solution numérique.

Références

- [1] Kang, Y.M. & Park, G.C., An experimental study on evaporative heat transfer coefficient and applications for passive cooling of AP600 steel containment, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 204, no. 1-3 (2001), 347-359.
- [2] Ben Jabrallah, S., Cherif, A.S., Dhifaoui, B., Belghith, A. & Corriou, J.P., Experimental study of the evaporation of a falling film in a closed cavity, *Desalination*, vol. 180, no. 1-3 (2005), 197-206.
- [3] He, J. & Hoyano, A. A numerical simulation method for analyzing the thermal improvement effect of super-hydrophilic photocatalyst-coated building surfaces with water film on the urban/built environment, *Energy and Buildings*, vol.40, Issue 6 (2008), 968-978.
- [4] Buchlin, J.M., Thermal shielding by water spray curtain, *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, vol. 18, no. 4-6 (2005), 423-432.
- [5] Conlisk, A.T., Analytical Solutions for the Heat and Mass transfer in a Falling Film Absorber, *Chem. Eng. Sci.*, vol 50 (1995), 651-660
- [6] Aubert, A., Candelier, F., Sollicec, C., Semi-Analytical Solution for Heat Transfer in a Water Film Flowing Over a Heated Plane, *Journal of Heat Transfer*, vol 132 (2010), à paraître au mois d'avril.