

Identification du coefficient d'échange instationnaire par la méthode métrique variable associée au problème adjoint

Mohammed MOBTIL*, Daniel BOUGEARD

Dépt Energétique Industrielle - Ecole des Mines de Douai
941, rue Charles BOURSEUL
BP 10838 - F59508 DOUAI CEDEX

*(auteur correspondant : mobtil@ensm-douai.fr)

Résumé

Cet article décrit une méthode pour résoudre les problèmes inverses de conduction de chaleur. La méthode emploie le principe de direction de descente et utilise la méthode métrique variable (MMV) dans le but de minimiser la fonction de l'écart quadratique entre les champs de température expérimentaux, obtenus par thermographie infrarouge, et calculés par un modèle direct. La MMV nécessite le calcul du gradient de la fonction objectif. Nous présentons ici la méthode de l'état adjoint pour le calcul de ce gradient. Les données expérimentales que sont les champs de température, sont en fait, dans cette première étude, obtenues par simulation numérique (CFD) dans le cas d'une plaque conductive placée dans un écoulement de canal en cours d'établissement dynamique et thermique. Ces champs sont utilisés pour évaluer l'efficacité de la méthode dans l'estimation du coefficient d'échange convectif instationnaire. Les résultats indiquent que la méthode adjointe est beaucoup plus rapide dans l'estimation des inconnues.

Nomenclature

C_p	Capacité calorifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	ϕ_{cd}	Densité de flux conductif, $W.m^{-2}$
d_K	Direction du déplacement	ϕ_{ry}	Densité de flux radiatif, $W.m^{-2}$
e	Epaisseur de la plaque, m	ρ	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
h	Coefficient d'échange, $W.m^{-2}.K^{-1}$	γ^K	Pas de déplacement
K	Indice d'itération	ε	Emissivité de la plaque
l	Longueur de la plaque, m	σ	Constante de Stefan, $W.m^{-2}.K^{-4}$
m	Indice de discrétisation spatiale	σ_0	Ecart type de la mesure
t_f	Temps final de refroidissement, s	η	Critère de convergence
T_{cal}	Température calculée, K	Δ	Opérateur laplacien
T_{mes}	Température mesurée, K	∇	Opérateur gradient
T_e	Température du fluide à l'entrée, K	L	Opérateur Lagrangien
T_{amb}	Température ambiante, K	ψ	Multiplicateur de Lagrange
Symboles grecques		ω	Coefficient de régularisation
ϕ_{cv}	Densité de flux convectif, $W.m^{-2}$	λ	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$

1. Introduction

Les échanges thermiques fluide-paroi jouent un rôle important dans de nombreux domaines tels que la conception ou le dimensionnement des systèmes thermiques utilisés dans les procédés énergétiques ou dans l'habitat. Le problème qui intéresse alors généralement les thermiciens est d'évaluer le coefficient d'échange convectif.

Nous avons, précédemment, proposé une méthode transitoire de détermination de ce coefficient d'échange [1]. Cette méthode consiste à soumettre une plaque, initialement chauffée à température uniforme, à un refroidissement par convection et à suivre l'évolution de sa température de surface au cours du refroidissement à l'aide d'une caméra infrarouge. A partir de ces champs de température, nous calculons le coefficient d'échange entre la surface

de la plaque et le fluide [2]. La méthode utilisée est basée sur le principe des problèmes inverses de conduction de chaleur [3] appelée méthode métrique variable (MMV) qui consiste à minimiser la fonction objectif représentant l'écart quadratique entre la température mesurée et la température calculée par un modèle direct. Cette méthode initialement proposée par Kowsary [4] est très intéressante car elle permet de déterminer la variation temporelle du coefficient d'échange en tenant compte de la conduction latérale dans la plaque. Néanmoins la technique inverse est difficile à utiliser en pratique car le calcul du gradient de la fonction objectif nécessite de nombreux calculs à chaque itération.

Dans cette communication nous présentons une amélioration de la technique en utilisant une méthode adjointe [5] pour le calcul du gradient de la fonction objectif. Des données obtenues par simulation numériques sont utilisées, dans le cas d'un problème thermique où le coefficient d'échange pariétal varie en fonction de l'espace et du temps, pour évaluer l'efficacité de la méthode (MMV associée au problème adjoint).

2. Modélisation

2.1 Problème direct

L'objectif de cette étude est de caractériser les échanges convectifs sur une plaque thermiquement mince refroidie par un écoulement d'air, à partir des champs de température mesurés par thermographie infrarouge. Cette méthode d'identification nécessite le développement d'un modèle direct qui permet de calculer les variations spatiales et temporelles de la température à la surface de la plaque à partir d'un profil imposé de densité de flux convectif (ou coefficient d'échange). Pour cela, il est nécessaire d'effectuer un bilan thermique sur un élément infinitésimal de la plaque au cours du refroidissement en tenant compte des pertes convectives, radiatives ainsi que du flux conductif au sein de la plaque. Le problème étudié est instationnaire et unidimensionnel en raison de symétrie suivant la largeur de la plaque (la température ne dépend que de x et de t).

Afin de pouvoir gérer les deux modes de transfert convectif et radiatif dans notre équation, nous avons travaillé dans un premier temps avec une densité de flux global qui est la somme des densités de flux convectif et radiatif.

$$\phi_g(x, t) = \phi_{cv}(x, t) + \phi_{ry}(x, t) \quad (1)$$

L'algorithme développé dans ce travail, permet de déterminer cette densité de flux global. Ensuite, connaissant les deux expressions du flux surfacique convectif et radiatif, nous pouvons en déduire le coefficient d'échange convectif.

$$\phi_{cv}(x, t) = h(x, t)(T(x, t) - T_e) \quad \text{et} \quad \phi_{ry}(x, t) = \varepsilon\sigma(T^4(x, t) - T_{amb}^4) \quad (2)$$

En tenant compte de ces simplifications, le bilan thermique conduit à l'équation suivante :

$$\rho.C_p.e.\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda.e.\Delta T(x, t) - \phi_g(x, t) \quad (3)$$

Les conditions appliquées au système sont :

- Conditions aux limites : sur les bords de la plaque nous avons utilisé une condition adiabatique suivant la direction de x . Par contre nous considérons qu'il y a toujours un flux convectif normal à la surface de la plaque à ces endroits (voir figure 1).
- Condition initiale : la plaque est chauffée à température uniforme égale $T_{init} = 45$ °C.

Les équations sont résolues numériquement en considérant une discrétisation par éléments finis en espace et différences finies en temps en utilisant le schéma de Crank-Nicolson. Le pas de temps est défini par la fréquence d'acquisition des mesures de températures de la caméra infrarouge.

2.2 Problème inverse

Pour le problème inverse, le flux surfacique global est inconnu, par contre nous disposons des champs de température calculés par le modèle direct en imposant un profil de flux surfacique quelconque ainsi que des champs de température mesurés par la caméra infrarouge. Nous cherchons à déterminer la source surfacique (flux global) responsable de ces mesures. Le problème peut être formulé comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés de la différence entre les mesures disponibles et les valeurs calculées du champ de température. Le problème étant mal posé au sens de Hadamard, on emploie la méthode de régularisation de Tikhonov [6] pour garantir la stabilité du calcul numérique même avec des données bruitées. Le problème consiste à minimiser une fonctionnelle (fonction objectif) de la forme :

$$F(T, \phi_g) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^l \left\{ [T_{cal}(x,t) - T_{mes}(x,t)]^2 + \omega^2 \|\phi_g^*(x,t)\|^2 \right\} dx dt \quad (4)$$

Le dernier terme de l'Eq. 4 ($\omega^2 \|\phi_g^*(x,t)\|^2$) correspond au terme de régularisation, ω étant un petit paramètre qui donne à F une convexité stricte. Le terme $\phi_g^*(x,t)$ recherché est celui qui réalise le minimum de la fonctionnelle F . Pour la minimisation de F , un algorithme itératif de descente est employé. Le calcul du gradient ∇F de F est donc nécessaire à chaque itération. Plusieurs techniques permettent de calculer ce gradient, nous avons présenté précédemment [2] la méthode des sensibilités, elle consiste à dériver la fonctionnelle par rapport à chaque composante du vecteur inconnu. Le coût du calcul est donc proportionnel au nombre de paramètres. Nous présentons ici, une nouvelle méthode pour le calcul du gradient appelé méthode adjointe dont le principal avantage est de réaliser le calcul à un coût proportionnel à celui d'une seule équation linéarisée, et en particulier, indépendant du nombre de paramètres.

2.3 Problème adjoint

La méthode adjointe repose sur ce qui peut être vu comme une astuce de calcul. On commence par prétendre que les variables T et ϕ varient indépendamment, et l'on considère l'équation d'état comme une contrainte. Dans ces conditions, il est naturel d'introduire un Lagrangien. Dans notre cas, celui-ci s'écrit :

$$\begin{cases} L(\vec{T}_m, \vec{\phi}_{gm}, \vec{\psi}_m) = \int_0^{t_f} \frac{1}{2} \left([T_{cal}(x_m, t) - T_{mes}(x_m, t)]^2 + \omega^2 \|\phi_g(x_m, t)\|^2 \right) dt \\ + \int_0^{t_f} \psi(x_m, t) \left(\rho C_p e \frac{\partial T(x_m, t)}{\partial t} - \lambda e \Delta T(x_m, t) + \phi_g(x_m, t) \right) dt \end{cases} \quad (5)$$

L'équation adjointe est obtenue pour :

$$\frac{\partial L}{\partial T} \delta T = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \rho C_p e \frac{\partial \psi(x_m, t)}{\partial t} = -\lambda e \Delta \psi(x_m, t) + (T_{cal}(x_m, t) - T_{mes}(x_m, t)) \\ \bullet \psi(x_m, t_f) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi(x_m, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi(x_m, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

La résolution de l'équation adjointe (Eq. 6) permet de trouver le multiplicateur de Lagrange $\psi(x,t)$. Nous pouvons donc en déduire le gradient de la fonction objectif par la relation suivante :

$$\nabla F = \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi = \psi(x, t) + \omega^2 \cdot \phi(x, t) \quad (7)$$

2.4 Critère d'arrêt

Dans ce problème inverse, nous comparons la température expérimentale avec la température calculée par le modèle direct dans l'expression de la fonctionnelle. Le critère d'arrêt de calcul s'appliquera donc sur la valeur de la fonctionnelle. Si le problème ne contient pas d'erreurs de mesure, le critère d'arrêt est spécifié comme :

$$\nabla F(\phi_g^{K+1}) \langle \eta \quad (8)$$

Où η est un petit nombre spécifié. Toutefois, les données expérimentales étant bruitées nous avons supposé que statistiquement l'écart de température équivalent au bruit peut être :

$$T_{cal}(x,t) - T_{mes}(x,t) \approx \sigma_0 \quad (9)$$

Où σ_0 est l'écart type de la mesure, qui est supposé être une constante. Substituant (Eq. 9) dans l'expression de la fonctionnelle (Eq. 4) sans le terme de régularisation, l'expression suivante est obtenue pour η .

$$\eta = \frac{1}{2} l \sigma_0^2 t_f \quad (10)$$

2.5 Méthode métrique variable

Le procédé itératif de la méthode métrique variable pour trouver le vecteur des inconnus ϕ^K peut être énoncé de la façon suivante :

- 1- Commençant par une première solution d'essai ϕ^0 , et avec une matrice H^0 définie positive ; H^0 est la matrice identité. ($K=0$)
- 2- Résoudre le problème direct donné par Eq. 3 pour obtenir $T_{cal}(x,t)$.
- 3- Tester le critère d'arrêt donné par Eq. 8. Si la condition n'est pas réalisée, on continue.
- 4- Résoudre le problème adjoint donné par Eq. 6 pour obtenir $\psi(x,t)$.
- 5- Calcul du gradient de la fonction objectif ∇F donné par Eq. 7.
- 6- Calcul de la direction de descente : $d^K = -H^K \cdot \nabla F(\phi^K)$
- 7- Détermination de la longueur optimale γ^K telle que : $\phi^{K+1} = \phi^K + \gamma^K \cdot d^K$
- 8- Test d'arrêt : tester le nouveau point ϕ^{K+1} . Si ϕ^{K+1} est optimal, résilier le processus d'itération. Sinon, passer à l'étape (9).
- 9- Mise à jour de la matrice H en utilisant la formule (BFGS) [2].
- 10- Définir le nouveau numéro d'itération ($K=K+1$) et retourner à l'étape (2).

3. Présentation de la simulation numérique

Afin de valider notre méthode inverse, nous utilisons une simulation numérique du cas expérimental présenté en [2]. Cette simulation numérique nous permet d'obtenir les champs de température nécessaires à l'identification du coefficient h que l'on cherche, et permet également de comparer les densités de flux de chaleur identifiées par la méthode avec celle obtenue par la simulation numérique. L'étude de transfert convectif entre une plaque plane et un écoulement d'air est effectuée dans une géométrie représentative du cas expérimental présenté en [2]. Il s'agit d'une plaque plane (de dimension $l \times L \times e$) dont l'épaisseur est de l'ordre de 0.5 mm placée au milieu (suivant l'axe z) d'un canal rectangulaire. En raison de la symétrie que l'écoulement présente dans le plan XZ en $Y = 0$, le domaine de calcul se réduit de moitié dans la direction Y . Afin d'avoir un profil de vitesse plat à l'amont de la plaque et de tranquilliser l'écoulement avant la condition limite de sortie, un volume amont et un volume aval entourent la plaque étudiée (Fig. 2a). La partie supérieure du canal (la face qui recouvre la plaque) est un mur adiabatique. En amont et en aval de la plaque, l'écoulement est canalisé par des murs adiabatiques sans adhérence. L'air à la température $T_e = 16^\circ C$ entre dans le canal avec une vitesse $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$. La température initiale de la plaque est $T_{init} = 45^\circ C$. Le modèle géométrique et le maillage sont réalisés sous Gambit. Un maillage structuré

à été utilisé avec un raffinement à l'interface solide-fluide, afin de décrire convenablement la couche limite (Fig. 2b). Bien que le problème numérique et expérimental est en fait unidimensionnel il est traité ici en bidimensionnel afin de valider notre modèle direct effectué en éléments finis en deux dimensions. La résolution des équations du mouvement et de la chaleur est réalisée à l'aide du code de calcul Starccm+, par la méthode de volume finis pour un régime instationnaire dans le cas d'un écoulement laminaire. Les critères de convergences sont fixés à 10^{-7} pour l'énergie et 10^{-5} pour la continuité. Le champ de température, le flux convectif et le coefficient d'échange à l'interface sont enregistrés toute les 10 fois 0.01 s (pas de temps) pendant 5 s de refroidissement de la plaque.

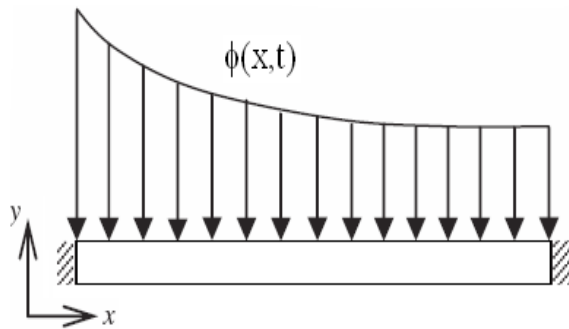


Figure 1 : Schéma représentatif des conditions limites utilisées pour le modèle direct

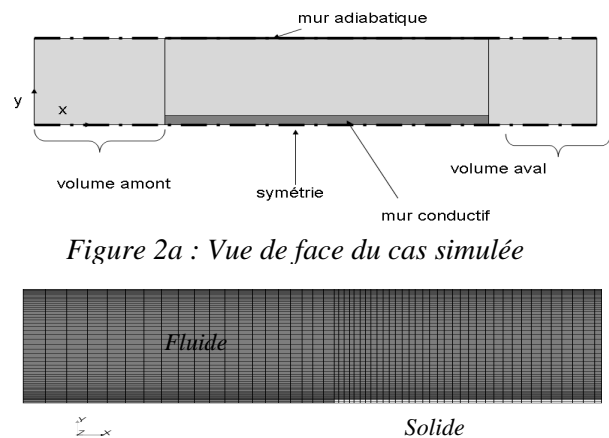
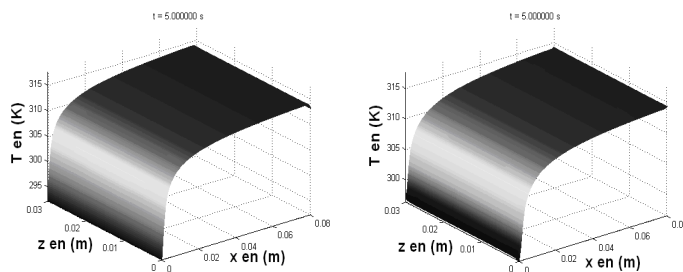


Figure 2a : Vue de face du cas simulée

Figure 2b : Détail du maillage utilisé

4. Résultats et interprétations

La figure 3a représente Le champ de température simulée à la surface de la plaque en fin du refroidissement. Ces résultats montrent qu'il y a un gradient de température suivant la direction de l'écoulement (suivant x). En revanche dans la direction z, la température est quasi constante (le problème étant physiquement unidimensionnel). Dans le but de valider notre modèle direct (élément finis en 2D), nous avons appliqué la densité de flux convectif obtenu par la simulation numérique pour calculer le champ de température (Fig. 3b). La figure 4 montre que le profil de température (moyennée suivant z) calculé est le même que celui obtenu par la simulation numérique à chaque pas de temps de refroidissement, ce qui prouve la validité de notre modèle pour le calcul direct.



a : Simulé b : Calculé par le modèle direct
Figure 3 : Champ de température à t_f

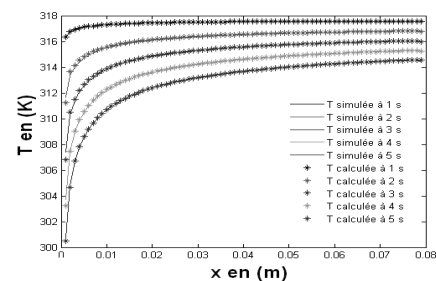


Figure 4 : Champs de température calculés et simulés

Pour le problème inverse, nous avons imposé à l'itération zéro ($K=0$), une densité de flux constant nul de même dimension que la température calculée (nombre de pas d'espace*nombre du pas de temps = 405 inconnus). Pour cette configuration, l'algorithme de calcul converge vers une solution unique en 10s après 263 itérations. La valeur de la

fonctionnelle (Eq. 4) à la dernière itération est de l'ordre de 4.10^{-6} . Les résultats obtenus pour le flux convectif sont présentés sur la figure 5. On retrouve le même profil de flux obtenu par la simulation numérique avec un léger écart surtout sur les bords de la plaque, cela peut s'expliquer par le fait que les conditions limites à ces endroits sont mal évaluées dans notre problème direct où nous considérons que c'est adiabatique. Pour la simulation, il peut y avoir une influence de la zone de recirculation induite par l'effet de l'épaisseur de la plaque. La figure 6 représente le profil du coefficient d'échange obtenu à partir du flux et de la température calculé en utilisant l'Eq. 2. On retrouve le même profil du coefficient obtenu par la simulation.

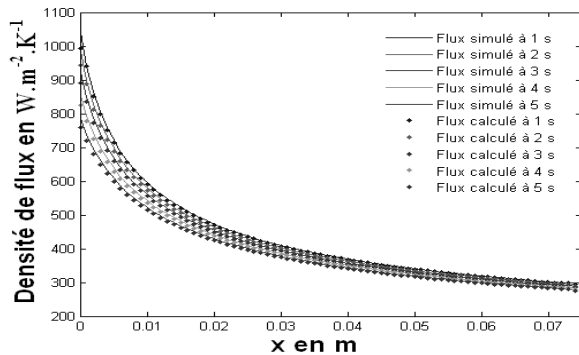


Figure 5 : Profil du flux convectif calculé et simulé

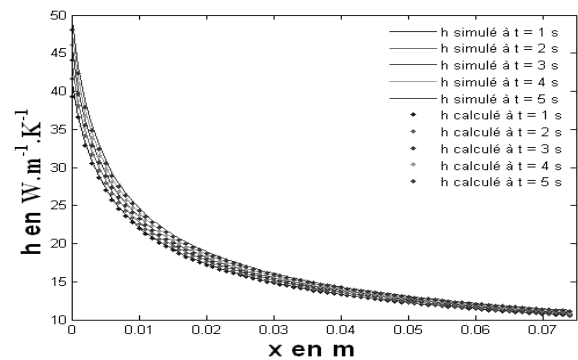


Figure 6 : Profil du coefficient d'échange convectif calculé et simulé

5. Conclusions

Cette étude nous a permis, à l'aide des techniques inverse (MMV) de caractériser les échanges convectifs locaux sur une plaque plane au cours du refroidissement à partir des champs de température. La méthode est très efficace pour suivre l'évolution des paramètres (densité de flux ou coefficient d'échange) dans le temps et dans l'espace. L'application de l'état adjoint nous a permis de gagner en rapidité de calcul. En effet, cette méthode rend le problème indépendant du nombre de paramètres inconnus et ne nécessite la résolution que d'une seule équation ce qui nous permet de raffiner la discrétisation pour mieux capter les phénomènes physiques et de travailler avec différentes géométries en 2D ou 3D.

Références

- [1] D. Bougeard. *Infrared thermography investigation of local heat transfer in a plate fin and two-tube rows assembly*. Int. Journal of heat and Fluid Flow, 28(5) :988-1002, 2007.
- [2] M. Mobtil and D. Bougeard. *Estimation expérimentale de coefficient d'échange local sur une plaque plane thermiquement mince par thermographie infrarouge*. Congrès SFT, 2009.
- [3] J.V. Beck, B. Blackwell and C.R. St Clair. *Inverse Heat conduction. – III posed Problems*. Wiley Interscience Publication 1985.
- [4] F. Kowsary, A. Behbahania and A. Pourshaghaphy. *Transient heat flux function estimation utilizing the variable metric method*. Int. com. in Heat and Mass Transfer 33: 800-810, 2006.
- [5] Haw-Long Lee, Yu-Ching Yang, Win-Jin Chang and Tser-Son Wu. *Estimation of heat flux and thermal stresses in multilayer gun barrel with thermal contact resistance*. Applied Mathematics and Computation, 209(2) :211-221, 2009.
- [6] D. Calvetti, S. Morigi, L. Reichel and F. Sgallari. *Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems*. Journal Computational and Applied Mathematics, 123 :423-446, 2000.