

# Écoulement en mode de convection forcée d'un fluide viscoplastique rhéofluidifiant en tenant compte de la dissipation visqueuse

Nabila LABSI<sup>1</sup>, Abdelkader BOUTRA<sup>1</sup>, Youb Khaled BENKAHLA<sup>1\*</sup>, Elisabeth BRUNIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés,  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
BP 32 El Alia, Bab Ezzouar 16111, Alger, Algérie

<sup>2</sup> Université de Technologie de Compiègne  
BP. 20529 – 60205 Compiègne, France

\*(auteur correspondant : youbenkahla@yahoo.fr)

**Résumé** - La présente étude concerne l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide viscoplastique incompressible à propriétés physiques et rhéologiques constantes. Cet écoulement a lieu dans une conduite horizontale à section droite circulaire maintenue à une température pariétale constante et uniforme, siège d'un transfert thermique en mode de convection forcée. Le fluide en question obéit au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley, pour lequel nous considérons  $n < 1$  (fluide viscoplastique rhéofluidifiant). Dans cette étude, seront analysés les effets des nombres de Reynolds et de Herschel-Bulkley sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement. En plus du chauffage généré par le conditionnement pariétal, nous tenons compte de la dissipation visqueuse et nous analyserons son influence sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt.

## Nomenclature

$Br$  nombre de Brinkman,  

$$= \frac{k V_0^{n+1}}{K (T_0 - T_w) D^{n-1}}$$
  
 $C_p$  chaleur spécifique à pression constante,  
 $J kg^{-1} K^{-1}$   
 $D$  diamètre de la conduite, m  
 $HB$  nombre adimensionnel de Herschel-Bulkley,  $= \tau_0 D^n / \mu_0 V_0^n$   
 $k$  conductivité thermique,  $W m^{-2} K^{-1}$   
 $K$  consistance du fluide,  $kg m^{-1} s^{-1}$   
 $L$  longueur de la conduite, m  
 $m$  paramètre de croissance exponentielle, s  
 $M$  paramètre réduit de croissance exponentielle,  $= m V_0 / D$   
 $n$  indice d'écoulement du fluide  
 $Nu$  nombre adimensionnel de Nusselt,  

$$= (-1 / \phi_m) (\partial \phi / \partial R) \Big|_{R=0.5}$$
  
 $p^*$  pression, Pa  
 $P^*$  pression réduite,  $= p^* / \rho V_0^2$   
 $Pr$  nombre de Prandtl,  $= K C_p V_0^{n-1} / k D^{n-1}$

$R$  coordonnée radiale, m  
 $r_w$  rayon de la conduite, m  
 $R$  coordonnée radiale réduite,  $= r/D$   
 $Re$  nombre de Reynolds,  $= \rho V_0^{2-n} D^n / K$   
 $T$  température, K  
 $T_0$  température d'entrée, K  
 $T_w$  température à la paroi, K  
 $U$  vitesse axiale réduite,  $= V_x / V_0$   
 $V$  vitesse radiale réduite,  $= V_r / V_0$   
 $V_0$  vitesse moyenne, m/s  
 $x$  coordonnée axiale, m  
 $X$  coordonnée axiale réduite,  $= x/D$

## Symboles grecs

$\dot{\gamma}$  taux de cisaillement réduit  
 $\eta$  viscosité effective,  $kg m^{-1} s^{-1}$   
 $\eta_{eff}$  viscosité effective réduite,  $= \eta / K$   
 $\rho$  masse volumique,  $kg m^{-3}$   
 $\tau$  contrainte de cisaillement, Pa  
 $\tau_0$  contrainte seuil de cisaillement, Pa  
 $\phi$  température réduite,  $= (T - T_w) / (T_0 - T_w)$   
 $\phi_m$  Température moyenne réduite,  
 $= (T_m - T_w) / (T_0 - T_w)$

## 1. Introduction

Les fluides viscoplastiques rhéofluidifiants décrivent une large gamme de fluides rencontrés dans les applications industrielles. Ces fluides obéissent au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley et sont caractérisés par un indice d'écoulement inférieur à 1. Plusieurs travaux ont été réalisés dans le but d'étudier les caractéristiques thermiques de l'écoulement de ces fluides. Citons à titre d'exemple, l'étude de Soares et *al.* [1] qui ont analysé, par le biais d'une méthode numérique, le transfert de chaleur dans la région d'entrée, de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley en tenant compte de la diffusion axiale et en considérant deux conditions aux limites thermiques à la paroi interne (flux de chaleur pariétal et température pariétale uniformes). Récemment, Nouar [2] a étudié le transfert de chaleur en mode de convection libre et forcée du fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite horizontale chauffée uniformément par un flux de chaleur constant. La conduction axiale ainsi que la dissipation visqueuse ont été négligées.

Le présent travail porte sur une étude numérique de l'écoulement d'un fluide viscoplastique rhéofluidifiant obéissant au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley. Ce fluide est incompressible et de propriétés physiques et rhéologiques constantes. Nous considérons une valeur élevée du nombre de Prandtl afin de se rapprocher des applications industrielles concernant cette catégorie de fluides. L'écoulement a lieu dans une conduite cylindrique maintenue à une température pariétale constante. La dissipation visqueuse sera prise en compte, en examinant le cas du chauffage et celui du refroidissement du fluide.

## 2. Equations générales de conservation et résolution

### 2.1. Mise en équations du problème physique

Les équations qui régissent l'écoulement : l'équation de continuité, les équations de l'impulsion suivant R et X ainsi que l'équation de l'énergie, sont respectivement :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RV^2)}{\partial R} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} = & -\frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \eta_{eff} R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \eta_{eff} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \\ & + \frac{1}{Re} \left[ \frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{eff}) - \eta_{eff} \frac{V}{R^2} + \frac{\partial}{\partial X} (\eta_{eff}) \frac{\partial U}{\partial R} + R \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{eff}) \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{V}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RVU)}{\partial R} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} = & -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \eta_{eff} R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial X} \left( \eta_{eff} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{eff}) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\eta_{eff}) \frac{\partial U}{\partial R} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RV\varphi)}{\partial R} + \frac{\partial(U\varphi)}{\partial X} = & \frac{1}{Pr Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \right] \\ & + \frac{Br}{Pr Re} \eta_{eff} \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{V}{R} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Le fluide non newtonien de Herschel-Bulkley est un modèle général, décrit par la loi rhéologique suivante :

$$\begin{cases} \tau = K \dot{\gamma}^n + \tau_0 & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (5)$$

Dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faible vitesse de cisaillement, plusieurs auteurs [3,4,5] recommandent d'utiliser la loi constitutive proposée par Papanastasiou :

$$\eta_{eff} = \dot{\gamma}^{n-1} + \frac{HB}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-M \dot{\gamma})] \quad (6)$$

M étant un paramètre adimensionnel qui représente la croissance de l'exponentielle ( $M = mV_0/D$ ). Ces auteurs [3,4,5] conseillent de prendre  $m = 1000$  s.

Pour pouvoir résoudre les équations (1-4), des conditions aux limites sont prises en considération. Il s'agit de considérer un profil uniforme de vitesse et de température à l'entrée de la conduite ( $U = \phi = 1$  et  $V = 0$ ), d'appliquer les conditions d'adhérence et de température pariétale constante le long de la conduite ( $U = V = \phi = 0$ ) et enfin de considérer sur l'axe de symétrie ( $\theta = 0$ ) que :  $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$ .

La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de conservation citées précédemment, en tenant compte de la loi rhéologique (6), est celle des volumes finis proposée par Patankar [6]. Ces équations sont discrétisées et transformées en équations algébriques qui sont résolues en utilisant un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER, en prenant un maillage non uniforme 65x40.

## 2.2. Validation du code de calcul

Pour valider notre code de calcul, nous avons considéré le cas limite du fluide de Bingham ( $\tau_0 \neq 0$  et  $n = 1$ ) et nous avons comparé l'évolution axiale du nombre de Nusselt obtenue par le présent code de calcul à celle obtenue par Min et al. [3]. Cette comparaison, illustrée sur la figure 1, montrent que les deux résultats concordent étant donné que l'écart relatif est de 1,6% et 3,4% pour  $Br = 0$  et  $Br = 1$ , respectivement.

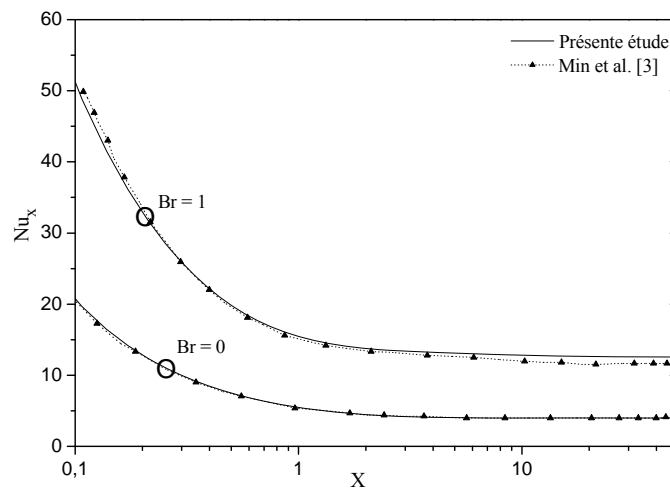


Figure 1: Evolution axiale du nombre de Nusselt.  $n = 1$  ;  $Re = 25$  ;  $HB = 1.99$  ;  $Pr = 1$  ;  $Br = 0$ .

### 3. Résultats et discussion

#### 3.1. Influence du nombre de Reynolds

La figure 2 illustre l'effet de la variation du nombre de Reynolds sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour le cas d'un fluide viscoplastique rhéofluidifiant ( $n = 0,5$ ).

Les courbes présentent une diminution aigue localisée au niveau de la zone d'entrée, caractérisée par un fort gradient de température. Puis, une évolution vers une valeur limite, qui traduit l'établissement du régime thermique.

Nous remarquons que la variation de la valeur du nombre de Reynolds n'a d'influence sur le transfert thermique, que dans la zone d'entrée de la conduite où l'accroissement du nombre de Reynolds provoque une intensification de cet échange. Loin en aval, les courbes tendent vers une valeur asymptotique du nombre de Nusselt indépendante du nombre de Reynolds, égale à 4,36 pour  $HB = 2$  et  $Pr = 50$ .

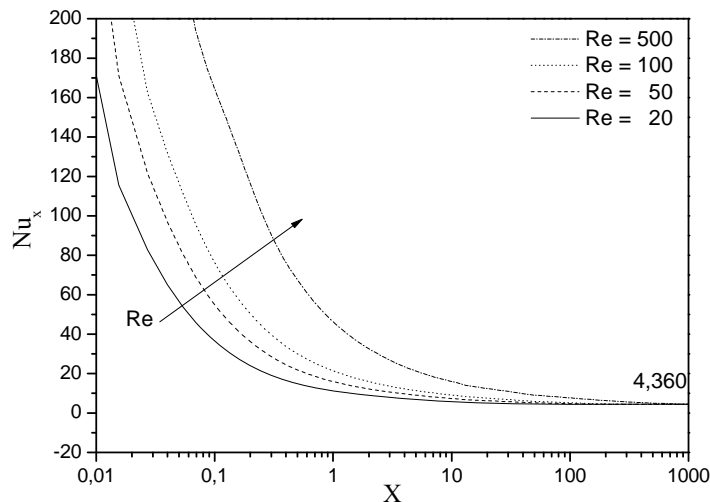


Figure 2 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.  
 $n = 0,5$  ;  $Pr = 50$  ;  $HB = 2$  ;  $Br = 0$ .

#### 3.2. Influence du nombre de Herschel-Bulkley

Le nombre de Herschel-Bulkley est lié à la valeur de la contrainte seuil. Plus ce nombre est élevé, plus l'étendue du bouchon est grande [7].

La figure 3, illustrant l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour des valeurs du nombre de Herschel-Bulkley égales à 2, 5 et 10, montre que l'augmentation de ce dernier entraîne une légère amélioration du transfert thermique dans la zone d'entrée de la conduite, qui s'intensifie cependant loin en aval de l'entrée.

Il est à noter aussi que les valeurs les plus élevées du nombre de Nusselt sont obtenues pour les plus grandes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley.

Le même comportement a été observé par Quaresma et Macêdo [8] dans leur étude analytique. D'après le Tableau 1, nous constatons que les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt issues de la présente étude pour différentes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley, s'approchent de celles obtenues par ces auteurs [8]. Ceci valide ainsi, notre code de calcul.

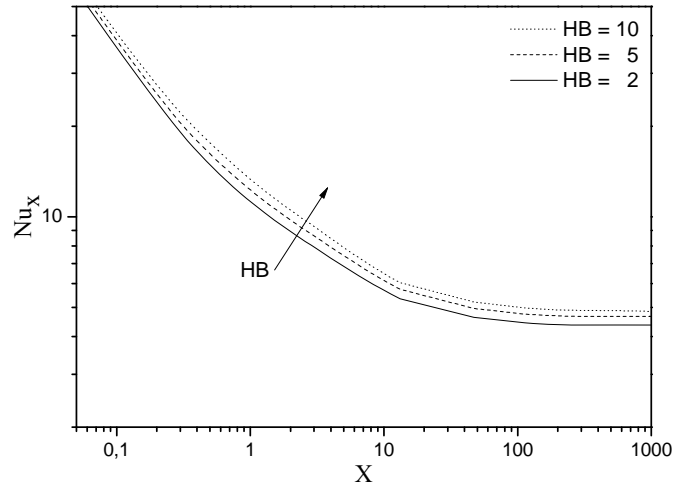


Figure 3 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley.  $n = 0,5$  ;  $Re = 20$  ,  $Pr = 50$  ;  $Br = 0$ .

HB	$Nu_{\infty}$		Ecart %
	Présente étude	Quaresma et Macêdo [8]	
5	4,6719	4,6722	0,006
10	4,8483	4,9474	2,003

Tableau 1 : Valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt en fonction de HB.  $n = 0,5$  ;  $Br = 0$ .

### 3.3. Influence de la dissipation visqueuse

La dissipation visqueuse est une source d'énergie, représenté par le nombre adimensionnel de Brinkman. Prendre en compte cette fonction dans l'équation de l'énergie, entraîne des modifications intenses des caractéristiques thermiques de l'écoulement du fluide.

La figure 4 représente l'effet de la prise en compte de cette fonction, sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt et ce, en considérant le cas de chauffage ( $Br < 0$ ) et celui relatif au refroidissement ( $Br > 0$ ).

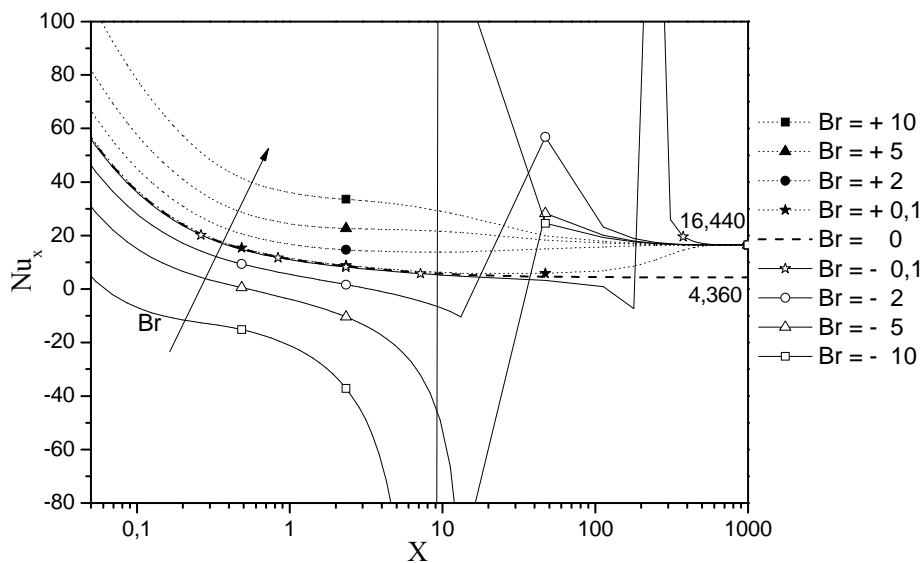


Figure 4 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.  $n = 0,5$  ;  $Re = 20$  ,  $Pr = 50$  ;  $HB = 2$ .

Nous remarquons que les courbes ont une allure décroissante depuis l'entrée de la conduite jusqu'à une section droite loin en aval correspondant à l'écoulement établi, pour lequel le nombre de Nusselt atteint une valeur asymptotique égale à 16,44 pour les cas de chauffage et de refroidissement. Cette valeur est plus élevée que celle obtenue lorsque la dissipation visqueuse est négligée. De plus, nous constatons que l'augmentation du nombre de Brinkman intensifie le transfert thermique, loin en aval de l'entrée. Nous obtenons, par conséquent, une amélioration valant 256% par rapport au cas où la dissipation visqueuse est négligée. Il est intéressant de noter aussi, que les courbes relatives au cas du chauffage ( $Br < 0$ ) présentent une discontinuité caractérisée, entre autres, par l'existence de valeurs négatives du nombre de Nusselt dues au changement de direction du transfert thermique. Le même comportement a été observé par Jambal et *al.* [9] pour le cas du fluide d'Ostwald-De Waele.

#### 4. Conclusion

L'étude numérique entreprise a permis d'analyser l'effet de la variation des nombres de Reynolds et de Herschel-Bulkley, sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement d'un fluide viscoplastique rhéofluidifiant obéissant au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley.

L'augmentation du nombre de Reynolds améliore considérablement le transfert thermique dans la zone d'entrée de la conduite. En revanche, l'effet de la variation du nombre de Herschel-Bulkley n'est ressenti qu'en aval de celle-ci. Quant à la prise en compte de la dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie, il a été noté que cette dernière améliore d'une façon notable le transfert thermique puisque ce dernier s'intensifie de plus de 256% par rapport au cas où cette fonction est négligée. Cette amélioration est beaucoup plus visible pour le cas de chauffage ( $Br < 0$ ), en aval de l'entrée de la conduite.

#### Références

- [1] M. Soares, M. F. Naccache, P. R. Souza Mendes, Heat transfer to viscoplastic materials flowing laminarly in the entrance region of tubes, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20 (1999), 60-67.
- [2] C. Nouar, Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), 5520-5535.
- [3] T. Min, H. G. Choi, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-II. Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997), 3689-3701.
- [4] E. Mitsoulis, On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects, *Chem. Eng. Sci.*, 59 (2004), 789-800.
- [5] E. Mitsoulis, S. Galazoulas, Simulation of viscoplastic flow past cylinders in tubes, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, in press (2008) doi:10.1016/j.jnnfm.2008.10.006.
- [6] S. V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, (1980), *McGraw*. New York.
- [7] A. Boutra, N. Labsi, Y. K. Benkahla, Etude thermique de l'écoulement en convection forcée d'un fluide viscoplastique dans une conduite maintenue à température uniforme : influence de la dissipation visqueuse, *Actes du congrès de la SFT (Toulouse-France, 3-6 juin 2008)*, 103-108.
- [8] J.N.N. Quaresma, E.N. Macêdo, Integral transform solution for the forced convection of Herschel-Bulkley fluids in circular tubes and parallel-plates ducts, *Braz. J. Chem. Eng.* 15(1998).
- [9] O. Jambal, T. Shigechi, T. G. Davaa, S. Momoki, Effects of viscous dissipation and fluid axial heat conduction on heat transfer for non-Newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature, Part I: Parallel plates and circular ducts, *Int. Com. Heat Mass Transfer*, 32 (2005) 1165-1173.