

Chapitre 2

LES MÉTHODES INTÉGRALES EN CONVECTION EXTERNE

*Celui qui augmente sa science
augmente sa douleur.*

Ecclésiaste

*Renoncez à la science et vous
serez exempt de chagrin.*

Lao Tseu

Parallèlement à la méthode différentielle exposée au début de ce cours, on dispose d'une autre technique pour résoudre le problème de la convection externe laminaire sur une plaque plane. Elle consiste à effectuer successivement les bilans de quantité de mouvement et d'énergie sur une tranche de couche limite d'épaisseur dx , perpendiculaire à la paroi. On obtient ainsi deux équations, différentielles en x et intégrales selon y , appelées intégro-différentielles ou semi-intégrales, que l'on résout en approchant vitesse et température par deux polynômes.

2.1. - L'ÉQUATION DE KARMAN

Pour le bilan de quantité de mouvement, le calcul complet (avec ρ et U_∞ variables) a été présenté dans FEMM (§ 4.6). Rappelons-en simplement le résultat, connu comme "l'équation de Karman", que nous écrivons ici dans le cas particulier où $\rho = cte$ et $U_\infty = cte$:

$$\tau_p = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} \quad (2.1)$$

Le paramètre δ_2 , appelé "épaisseur de quantité de mouvement", est homogène à une longueur et défini par :

$$\delta_2(x) = \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy \approx \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy \quad (2.2)$$

2.2. - LA SOLUTION APPROCHÉE DE POHLHAUSEN

L'équation de Karman (2.1) n'est utilisable que si l'on sait exprimer δ_2 en fonction de x . Bien évidemment le champ de vitesse est inconnu, puisque c'est justement lui qu'on cherche à déterminer, mais les deux remarques ne sont pas incompatibles si l'on peut construire une expression paramétrique de U , intégrable analytiquement, et qui respecte les conditions aux limites. Alors, résoudre l'équation reviendra à déterminer les paramètres qui auront été introduits dans cette expression. Il s'agira évidemment d'une solution approchée, mais en contrepartie les calculs seront menés sous forme analytique presque jusqu'à leur terme.

En l'occurrence, on postule un champ de vitesse adimensionné de forme polynômiale :

$$\frac{U}{U_\infty} = a_0 + a_1 y^+ + a_2 y^{+2} + \dots \quad (2.3)$$

en posant :

$$y^+ = \frac{y}{\delta(x)} \quad (2.4)$$

Si le degré du polynôme est assez élevé, cette hypothèse permet de faire face à toutes les situations. Comme les conditions aux limites sur U et ses dérivées sont au nombre de cinq, cela permet de travailler avec un polynôme d'ordre 4 (FEMM, § 4.6.6). Tous calculs faits, on obtient :

$$\frac{U}{U_\infty} = 2 y^+ - 2 y^{+3} + y^{+4} \quad (2.5)$$

Cette expression permet ensuite de calculer δ_2 en fonction de δ (présent au dénominateur de y^+). En remplaçant dans l'équation de Karman, on est alors en mesure de déterminer $\delta(x)$, et par conséquent le champ de vitesse complet $U(x, y)$.

Dans beaucoup d'exercices on se limite à un polynôme d'ordre 2, beaucoup plus facile à manipuler, mais la précision en souffre un peu [cf. Fortier].

Pour les cas simples ($T_p = cte$ ou $\varphi_p = cte$), un bon compromis est un polynôme d'ordre 3 [Taine et Petit, Kays et Crawford, Cebeci]. Les formules correspondantes sont données à la fin du chapitre (Annexe 2.A.1).

2.3. - EXTENSION DE LA MÉTHODE DE KARMAN-POHLHAUSEN À L'ÉQUATION D'ÉNERGIE

2.3.1. - Forme semi-intégrale de l'équation d'énergie

En ce qui concerne le bilan d'énergie (ou plutôt d'enthalpie) le principe de la méthode est exactement le même que pour la quantité de mouvement : exprimer le bilan à l'abscisse x sur un domaine rectangulaire d'épaisseur dx et de hauteur δ_T , pour faire apparaître une relation entre le flux d'énergie dans la couche limite et le flux à la paroi. Le choix de δ_T comme borne d'intégration est évidemment lié au fait que le bilan de chaleur est identiquement nul en dehors de la couche limite thermique, puisque la température y est uniforme.

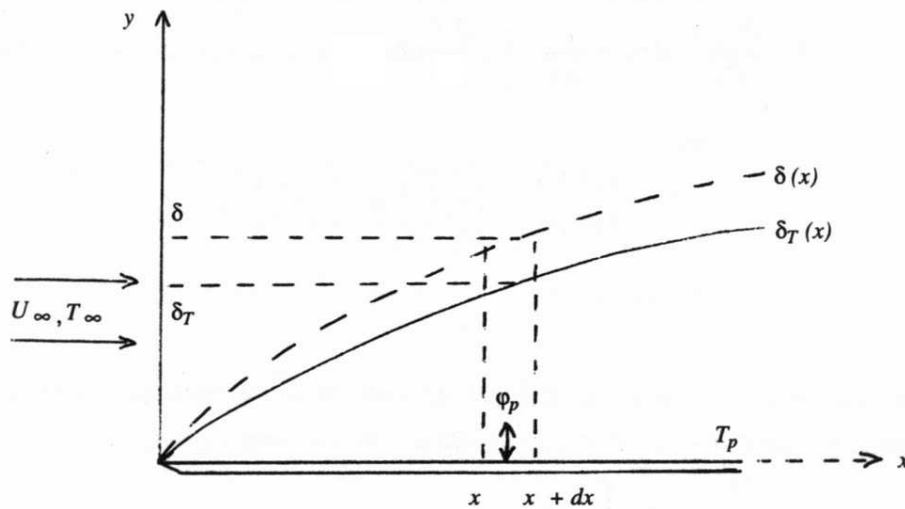


FIG. 2.1 - Domaine d'intégration dans la méthode de Karman-Pohlhausen. Cas où $\delta(x) > \delta_T(x)$.

Ce programme peut être appliqué de deux façons différentes : soit en partant directement de l'équation intégrale de bilan pour l'énergie (FEMM 1.50) qu'il faut préalablement transformer en bilan d'enthalpie ; soit, ce qui est beaucoup plus rapide (quoique moins logique) en intégrant l'équation de bilan local (1.3) entre $y=0$ et $y=\delta_T$. Procédons ainsi et réécrivons déjà cette équation, sans approximation pour l'instant :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.6a)$$

Prenons tout de suite en compte l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

ce qui permet d'écrire (2.6a) sous la forme :

$$\frac{\partial T U}{\partial x} + \frac{\partial T V}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.6b)$$

et de l'intégrer suivant y , de 0 à δ_r , en procédant terme à terme :

a) pour le premier, puisque $T = T_\infty = cte$

$$\int_0^{\delta_r} \frac{\partial T U}{\partial x} d y = \frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} T U d y \quad (2.7a)$$

b) ensuite, sachant que $V_p = 0$ (paroi imperméable), il vient :

$$\int_0^{\delta_r} \frac{\partial T V}{\partial y} d y = (T V)_{y=\delta_r} - (T V)_p = T_\infty V_{\delta_r} \quad (2.7b)$$

c) pour le troisième terme, comme avec le premier :

$$\int_0^{\delta_r} \frac{\partial^2 T U}{\partial x^2} d y = \frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} \frac{\partial T}{\partial x} d y \quad (2.7c)$$

d) et pour le quatrième :

$$\int_0^{\delta_r} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} d y = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\delta_r} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \quad (2.7d)$$

en admettant $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ pour $y = \delta_r$.

La composante V_{δ_r} se détermine par intégration de l'équation de continuité sur le même domaine $dx \times \delta_r$ (ce qui revient à faire un bilan de masse) :

$$\int_0^{\delta_r} \frac{\partial U}{\partial x} d y + \int_0^{\delta_r} \frac{\partial V}{\partial y} d y = 0$$

Admettons (il faudrait ici le justifier de façon rigoureuse) que la dérivée $\partial/\partial x$ peut être sortie de l'intégrale. Alors :

$$\frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} U d y = - (V_{\delta_r} - V_p)$$

et puisque $V_p = 0$ (paroi imperméable) :

$$V_{\delta_r} = - \frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} U d y \quad (2.7e)$$

On obtient en regroupant dans (2.6b) :

$$\frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} T U d y - T_\infty \frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} U d y = a \left\{ \frac{d}{d x} \int_0^{\delta_r} \frac{\partial T}{\partial x} d y - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \right\} \quad (2.8)$$

Il est à noter que :

$$a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = - \frac{\varphi_{px}}{\rho C_p} \quad (2.9)$$

Enfin, nous admettons l'approximation :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} \frac{\partial T}{\partial x} dy \ll \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \quad (2.10)$$

justifiée par le fait que le flux conductif dans la direction x (représenté par le premier membre de l'inégalité) est faible devant le flux pariétal, qui est presque entièrement pris en charge par le mouvement du fluide.

De la sorte, l'équation intégrro-différentielle (2.8) ci-dessus devient :

$$\boxed{\varphi_{px} = \rho C_p \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} U (T - T_\infty) dy} \quad (2.11)$$

et présente ainsi une ressemblance formelle évidente avec l'équation de Karman (2.1).

Il y a d'autres façons d'écrire cette relation, par exemple :

$$\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty} = \frac{d}{dx} \left\{ (T_\infty - T_p) \int_0^{\delta_r} \frac{U}{U_\infty} \frac{T - T_\infty}{T_\infty - T_p} dy \right\}$$

c'est-à-dire, vu la définition (1.7c) de T^+ :

$$\boxed{\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty} = - \frac{d}{dx} \left\{ (T_\infty - T_p) \int_0^{\delta_r} \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy \right\}} \quad (2.12)$$

(avec le signe - devant le second membre pour avoir un terme positif dans l'intégrale).

Certains auteurs préfèrent utiliser une autre température adimensionnée :

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad (2.13)$$

que nous retrouverons d'ailleurs en convection libre (Ch. 5). Dans ce cas, l'équation intégrro-différentielle (2.12) s'écrit :

$$\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty} = \frac{d}{dx} \left\{ (T_p - T_\infty) \int_0^{\delta_r} \frac{U}{U_\infty} \Theta dy \right\} \quad (2.14)$$

2.3.2. - Expression du champ de température : méthode de Pohlhausen

- ♣ Puisque nous travaillons ici sur des écoulements sans couplage thermique, la solution du problème dynamique est celle qui a été rappelée au paragraphe 2.2.

La solution du problème thermique repose sur une technique analogue, les calculs étant seulement un peu plus laborieux dans la phase finale.

Pour commencer, nous utiliserons l'ordonnée adimensionnée :

$$y^* = \frac{y}{\delta_T} \quad (2.15)$$

où δ_T est une fonction de x , et nous admettrons que la température adimensionnée T^+ s'exprime sous la forme d'un polynôme :

(H)

$$T^+ = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = b_0 + b_1 y^* + b_2 y^{*2} + b_3 y^{*3} + \dots \quad (2.16)$$

- ◆ De quelles conditions aux limites disposerons-nous pour en déterminer les coefficients ?

A la paroi : $y^* = 0$

a) Condition sur la température :

$$T = T_p \quad \text{d'où} \quad T^+ = 0 \quad (2.17a)$$

On obtient tout de suite :

$$b_0 = 0 \quad (2.17b)$$

b) Condition sur le flux :

$$\varphi_{p,x} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial T^+} \frac{\partial T^+}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} \right)_{y=0}$$

soit compte tenu de (2.15) et (2.16)

$$\varphi_{p,x} = \frac{-\lambda (T_\infty - T_p) b_1}{\delta_T}$$

d'où :

$$b_1 = -\frac{\varphi_{p,x} \delta_T}{\lambda (T_\infty - T_p)} \quad (2.18)$$

Ce coefficient sera explicité plus loin, selon la condition de paroi envisagée.

A la lisière de la couche limite thermique : $y^* = 1$

c) Condition sur la température :

$$T = T_\infty \quad ; \quad T^+ = 1 \quad (2.19a)$$

d) Condition sur la dérivée première :

$$\frac{\partial T^+}{\partial y^*} = 0 \quad (2.19b)$$

e) Condition sur la dérivée seconde, déduite de l'équation d'énergie puisque $T_\infty = cte$:

$$\frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (2.19c)$$

toutes conditions parentes de celles qui ont été adoptées avec la vitesse U , pour d'évidentes raisons de cohérence entre les démarches. Etant au nombre de 5, elles permettent de déterminer autant de coefficients (dont $b_0 = 0$). Le polynôme sera donc d'ordre 4 :

$$T^+ = b_1 y^* + b_2 y^{*2} + b_3 y^{*3} + b_4 y^{*4} \quad (2.20)$$

♥ Passons à la résolution

Les conditions c), d) et e) nous donnent :

$$1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \quad (1)$$

$$0 = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 \quad (2)$$

$$0 = 2b_2 + 6b_3 + 12b_4 \quad (3)$$

Rappelons que le coefficient b_1 est en réserve. Nous allons donc exprimer b_2 , b_3 et b_4 en fonction de b_1 . Le plus simple est de tirer successivement b_2 de (3), b_3 de (2) et b_4 de (1). Il vient à la fin du calcul :

$$b_4 = 3 - b_1 ; \quad b_3 = 3b_1 - 8 ; \quad b_2 = 3(2 - b_1) \quad (2.21)$$

Le champ de température est donc décrit par le polynôme :

$$T^+ = b_1 y^* + 3(2 - b_1)y^{*2} + (3b_1 - 8)y^{*3} + (3 - b_1)y^{*4} \quad (2.22)$$

2.4. - APPLICATION : PLAQUE À TEMPÉRATURE IMPOSÉE

C'est la condition à la limite reliant flux et température à la paroi qui permet de préciser la valeur du coefficient b_1 . Les choses sont particulièrement simples lorsque $T_p = cte$.

2.4.1. - Champ de température avec $T_p = cte$

♣ Revenons à l'équation d'énergie (2.6). A l'ordonnée $y = 0$, on a $U = 0$, $V = 0$ et $T = T_p$. Il reste :

$$\frac{d^2 T_p}{dx^2} = - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{y=0} \quad (2.23a)$$

D'autre part, avec la définition (2.16) de T^+ :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (T_\infty - T_p) \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{*2}} \left(\frac{\partial y^*}{\partial y} \right)^2$$

A la paroi, nous avons d'après (2.20-22) :

$$\left(\frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{*2}} \right)_{y=0} = 2b_2 = 6(2 - b_1) \quad (2.23b)$$

et comme $\frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{l}{\delta_T}$, la relation (2.23a) devient :

$$\frac{d^2 T_p}{dx^2} = -6 \frac{T_\infty - T_p}{\delta_T^2} (2 - b_1) \quad (2.24a)$$

Ⓜ La condition à la limite $T_p = cte$ implique donc :

$$b_1 = 2 \quad (2.24b)$$

Par conséquent, $b_2 = 0$ et le terme en y^* disparaît de T^+ qui s'écrit maintenant :

$$\boxed{T^+ = 2y^* - 2y^{*3} + y^{*4}} \quad (2.25)$$

◆ Avant d'exploiter cette expression, observons deux choses :

a) Le polynôme (2.25) est identique à celui qui décrit le champ de vitesse U/U_∞ (2.5) (à ceci près que y^+ est remplacé par y^*). Ceci n'a rien d'étonnant puisque les conditions aux limites adimensionnées sont analogues (la condition dynamique $U_\infty = cte$ joue le même rôle que la condition thermique $T_p = cte$).

b) Plus fondamentalement, l'écriture (2.23a) de l'équation d'énergie en $y=0$ montre que l'approximation classique de couche limite thermique $\partial^2 T / \partial x^2 \ll \partial^2 T / \partial y^2$ (hypothèse 1.4) est mise en défaut au voisinage de la paroi, sauf si T_p est une fonction linéaire de x (avec $T_p = cte$ comme cas particulier). Il y aura donc lieu de l'utiliser avec une certaine prudence.

2.4.2. - Mise en œuvre de la méthode

Avec la condition $T_p = cte$, le terme $T_\infty - T_p$ sort de la dérivée dans l'équation intégral-différentielle (2.12) qui devient alors :

$$\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty (T_\infty - T_p)} = - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy \quad (2.26)$$

- ♣ La première chose à faire pour la résoudre est de calculer l'intégrale qui figure au second membre, et que nous appellerons plus simplement δ_{T1} :

$$\delta_{T1} = \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy \quad (2.27)$$

Si l'on remarque par ailleurs que le premier membre n'est autre que le nombre de Stanton (au signe près), l'équation (2.26) se présente sous une forme plus ramassée :

$$St_x = \frac{d\delta_{T1}}{dx} \quad (2.28)$$

Pour alléger un peu l'écriture, posons d'abord :

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} \quad (2.29)$$

Première possibilité : $\delta > \delta_T$, soit $\Delta < 1$

Il faut prendre :

a) $\frac{U}{U_\infty}$ donnée par le polynôme (2.5) sans restriction ($y \leq \delta_T$ donc $< \delta$)

b) T^+ donnée par le polynôme (2.25) ($0 \leq y < \delta_T$) (revoir au besoin la figure 2.1).

Deuxième possibilité : $\delta \leq \delta_T$, soit $\Delta \geq 1$

Cette fois, il faut prendre :

a) $\frac{U}{U_\infty}$ donnée par le polynôme (2.5) pour $0 \leq y \leq \delta$

b) $\frac{U}{U_\infty} = 1$ pour $\delta < y \leq \delta_T$

- ◆ Commençons par la première option : $\Delta < 1$

L'intégrale δ_{T1} (2.27) se calcule ainsi :

$$\delta_{T1} = \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} dy - \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} T^+ dy \quad (2.30)$$

Le remplacement de U/U_∞ et de T^+ par leurs expressions respectives conduit à l'intégration d'un polynôme de degré 8. En remplaçant partout δ_T par $\Delta\delta$ (définition 2.29), ce qui se révélera plus commode par la suite, on trouve en fin de calcul :

$$\delta_{T1} = \delta \left(\frac{2}{15} \Delta^2 - \frac{3}{140} \Delta^4 + \frac{1}{180} \Delta^5 \right) \quad (2.31a)$$

Nous allégerons le formalisme en posant :

$$\delta_{Tl} = \delta G(\Delta) \quad (2.31b)$$

L'équation à résoudre (2.26 ou 2.28) est donc :

$$\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty (T_\infty - T_p)} = - \frac{d}{dx} \{ \delta(x) G(\Delta) \}$$

mais également, avec (2.18) et (2.24b) :

$$\varphi_{px} = \frac{-2\lambda(T_\infty - T_p)}{\delta_T} = \frac{-2\lambda(T_\infty - T_p)}{\Delta\delta} \quad (2.32)$$

c'est-à-dire, en regroupant les deux :

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} = \Delta\delta(x) \frac{d}{dx} \{ \delta(x) G(\Delta) \} \quad (2.33)$$

Cette équation admet une solution telle que Δ soit indépendant de x , ce qui correspond à une similitude géométrique entre les épaisseurs de couches limites dynamique et thermique. En effet, si tel est le cas, (2.33) devient :

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} = \Delta G(\Delta) \frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dx} \quad (2.34)$$

L'épaisseur de couche limite dynamique $\delta(x)$ est déjà connue (FEMM, 4.116) puisqu'on a obtenu par la méthode de Karman-Pohlhausen :

$$\delta = 5,83 \left(\frac{\mu x}{\rho U_\infty} \right)^{1/2} \quad \text{soit} \quad \frac{d\delta^2}{dx} = 34,05 \frac{\mu}{\rho U_\infty} \quad (2.35)$$

et (2.34) s'écrit finalement, en revenant à la définition (2.31b) de $G(\Delta)$:

$$\Delta G(\Delta) = \frac{0,1175}{Pr} \quad (2.36a)$$

soit, une fois développée :

$$\frac{1}{180} \Delta^6 - \frac{3}{140} \Delta^5 + \frac{2}{15} \Delta^3 - \frac{0,1175}{Pr} = 0 \quad (2.36b)$$

équation dont l'inconnue $\Delta = \delta_T / \delta$ ne dépend que du nombre de Prandtl ; elle est donc bien indépendante de x .

En premier lieu, on vérifie que, pour $Pr = 1$, $\Delta \approx 1$, retrouvant ainsi la propriété mise en évidence avec la méthode différentielle (§ 1.2.2.1) ou l'analyse dimensionnelle : les deux couches limites sont alors confondues.

Plus généralement, la résolution numérique de (2.36) pour différentes valeurs de Pr montre qu'il existe bien une solution correspondant à l'hypothèse de départ ($\Delta \leq 1$) lorsqu'on prend $Pr \geq 1$. Celle-ci se calcule aisément, mais n'a pas d'expression analytique. Toutefois, si on regarde l'équation (2.36b), on voit qu'elle se met sous la forme implicite :

$$\Delta^3 = \frac{0,88}{Pr} (1 + 0,12 Pr \Delta^5 - 0,048 Pr \Delta^6)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = 0,96 Pr^{-1/3} (1 + 0,182 Pr \Delta^5 - 0,048 Pr \Delta^6)^{1/3}$$

Δ est donc de l'ordre de grandeur de $Pr^{-1/3}$. En le remplaçant par cette valeur dans la parenthèse et en développant au premier ordre, on obtient l'expression approchée :

$$\Delta \approx 0,96 Pr^{-1/3} (1 + 0,04 Pr^{-2/3}) \quad (2.37)$$

où le terme correctif $0,04 Pr^{-2/3}$ est compris entre 0,04 et 0,006 quand Pr est dans l'intervalle $[1 - 20]$. Si bien qu'on retrouve (avec un écart maximum de 3%) l'ajustement déjà obtenu avec la méthode différentielle :

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} \approx Pr^{-1/3} \quad (2.38)$$

Connaissant δ , la détermination de Δ nous permet alors d'aboutir à la densité de flux locale par la relation (2.32) :

$$\varphi_{px} = \frac{-2 \lambda (T_\infty - T_p)}{\delta Pr^{-1/3}} = \frac{-2 \lambda (T_\infty - T_p)}{5,83} \left(\frac{\rho U_\infty}{\mu_x} \right)^{1/2} Pr^{1/3} (T_\infty - T_p)$$

soit :

$$\varphi_{px} \approx -0,343 \lambda (T_\infty - T_p) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_x}} Pr^{1/3} \quad (2.39)$$

à comparer avec (1.33a) où le coefficient était $1/3$, donc très voisin.

Autrement dit, sur cet exemple particulier, la méthode semi-intégrale et la méthode différentielle sont équivalentes.

♥ Deuxième possibilité : $\Delta \geq 1$

On doit maintenant écrire (2.27) avec $\delta_T \geq \delta$

$$\delta_{T1} = \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy = \int_0^\delta \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy + \int_\delta^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy$$

et cette fois, $U/U_\infty = 1$ entre δ et δ_T . Donc :

$$\delta_{T1} = \int_0^\delta \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy + \int_\delta^{\delta_T} (1 - T^+) dy$$

Le calcul est analogue au précédent, mais un peu plus volumineux. On arrive à :

$$\delta_{T1} = \delta G(\Delta)$$

$$G(\Delta) = \frac{3}{10} \Delta - \frac{3}{10} + \frac{2}{15} \frac{1}{\Delta} - \frac{3}{140} \frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{180} \frac{1}{\Delta^4} \quad (2.40)$$

L'équation à résoudre est toujours (2.36a). En toute rigueur, la forme analytique de la solution approchée n'est pas tout à fait analogue à (2.37). Mais on constate que l'ajustement (2.38) reste très satisfaisant tant que Pr est supérieur à 0,6, ce qui permet donc de l'utiliser dans tout l'intervalle $0,6 \lesssim Pr \lesssim 20$ qui correspond à la majorité des fluides usuels.

- ♠ En conclusion, pour $0,6 \lesssim Pr \lesssim 20$ et $T_p = cte$, on retrouve les expressions (1.33) à (1.35) de φ_{px} , h_x et St_x , le coefficient $1/3$ étant simplement remplacé par $0,343$.

Pour les grandes et les petites valeurs du nombre de Prandtl, on obtient d'autres ajustements qui sont également en accord avec la méthode différentielle.

2.4.3. - Généralisation : température imposée $T_p(x)$ quelconque

- ♣ Voyons maintenant comment la situation se présente dans le cas plus large où on impose à la paroi une loi de température $T_p(x)$ donnée.

La forme générale (2.22) du polynôme qui décrit T^+ n'est pas affectée, mais il faut préciser la valeur du coefficient b_1 .

Celle-ci résulte du bilan thermique à la paroi, exprimé par l'équation (2.24a) dont on tire :

$$b_1 = 2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 T_p}{dx^2} \frac{\delta_T^2}{T_\infty - T_p(x)} \quad (2.41a)$$

Dans le dernier terme, le rapport $(T_\infty - T_p)/\delta_T^2$ représente l'ordre de grandeur moyen de la dérivée seconde $\partial^2 T / \partial y^2$ dans la couche limite. Si l'on adopte comme loi de température à la paroi une distribution réaliste telle que $d^2 T_p / dx^2$ soit faible par rapport à la valeur précédente, il est alors licite d'admettre l'approximation :

$$b_1 \approx 2 \quad (2.41b)$$

D'ailleurs, en particulier avec une loi de température $T_p(x)$ linéaire on a : $d^2 T_p / dx^2 = 0$ et $b_1 = 2$.

Autrement dit, la température de la couche limite reste décrite avec une bonne précision par le polynôme (2.25), qui ne comporte donc toujours pas de terme en y^{*2} (conséquence du fait que b_1 est pris égal à 2).

- ◆ La réunion des relations 2.32 (flux à la paroi) et 2.12 (bilan semi-intégral d'énergie) nous donne alors l'équation à résoudre :

$$\frac{2\lambda}{\delta_T} \frac{(T_\infty - T_p)}{\rho C_p U_\infty} = \frac{d}{dx} \{(T_\infty - T_p) \delta_{T1}\} \quad (2.42a)$$

avec $T_p = T_p(x)$ et δ_{T1} toujours définie par (2.27).

Pour rendre l'écriture plus parlante, remplaçons δ_T et δ_{T1} par leurs formulations (2.29) et (2.31b). On obtient en développant un peu :

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} = \frac{1}{2} \Delta G(\Delta) \frac{d\delta^2}{dx} + \delta^2 \Delta \frac{dG(\Delta)}{dx} + \delta^2 \Delta G(\Delta) \frac{d(T_\infty - T_p)}{T_\infty - T_p} \quad (2.42b)$$

avec $G(\Delta)$ donné par (2.31) ou (2.40) selon le cas.

Notre inconnue est encore le rapport des épaisseurs de couches limites Δ , mais il apparaît clairement ici que Δ dépend maintenant de x . Il n'y a plus de similitude géométrique des couches limites, et $\Delta(x)$ doit être calculé numériquement en résolvant l'équation différentielle précédente. Ensuite, la procédure est inchangée : puisque $\delta(x)$ est connue on remonte aisément à δ_T et de là au champ de température T^+ dans le fluide.

- ♥ Toujours dans le cas général où $T_p(x)$ est spécifiée arbitrairement, une résolution presque complètement analytique du problème est également possible en renonçant à la forme polynômiale pour la température, et en écrivant que T^+ est la somme d'une intégrale de Riemann et d'une intégrale de Stieltjes [Kays et Crawford]. C'est beaucoup plus élégant au point de vue mathématique, mais pas forcément plus simple (sauf peut-être dans le cas où T_p varie linéairement).

2.4.4. - Cas où T_p est imposée sur une partie de la plaque

- ♣ On envisage souvent la disposition suivante, dans laquelle la partie chauffée (ou refroidie) de la plaque ne commence qu'à une distance x_0 du bord d'attaque (fig. 2.2) :

$$\begin{cases} 0 \leq x < x_0 & T(x, y=0) = T_\infty \\ x \geq x_0 & T(x, y=0) = T_p = cte \end{cases} \quad (2.43)$$

Il s'agit d'un cas particulier du paragraphe précédent, où le développement de la couche limite thermique est décalé par rapport à celui de la couche limite dynamique.

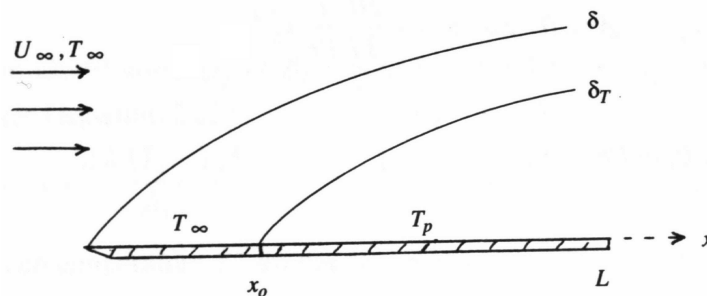


FIG. 2.2 - Plaque uniformément chauffée à partir de l'abscisse x_0 .

- ◆ La couche limite thermique se développe seulement à partir de x_0 ; son épaisseur est donc inférieure à celle de la couche limite dynamique (au moins au départ). Examinons donc d'abord le cas $\delta_T < \delta$ (soit $\delta_T / \delta = \Delta < 1$).

Il est clair qu'ici Δ va obligatoirement dépendre de x . Mais l'équation (2.33), établie avec $T_p = cte$, reste valable pour $x \geq x_0$:

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} = \Delta(x) \delta(x) \frac{d}{dx} \{ \delta(x) G[\Delta(x)] \} \quad (2.44)$$

$G(\Delta)$ étant donnée par (2.31) puisque Δ est inférieur à 1.

Pour détailler la méthode à suivre, il est plus commode de commencer par faire l'approximation :

$$G(\Delta) \approx \frac{2}{15} \Delta^2 \quad (2.45)$$

(1^{er} terme du développement (2.31a) de δ_{T1} / δ).

En remplaçant de plus δ par son expression (2.35), (2.44) devient après simplification :

$$\frac{15}{34} \frac{\lambda}{\mu C_p} = \Delta x^{1/2} \frac{d}{dx} \{ x^{1/2} \Delta^2 \}$$

soit après avoir développé :

$$\frac{15}{34} \frac{1}{Pr} = \Delta x \frac{d \Delta^2}{dx} + \frac{1}{2} \Delta^3$$

que nous écrirons :

$$\Delta^3 + \frac{4}{3} x \frac{d \Delta^3}{dx} = \frac{30}{34} \frac{1}{Pr}$$

La solution de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre, c'est-à-dire :

$$\Delta^3 = C x^{-3/4} + \frac{30}{34} \frac{1}{Pr} \quad (2.46)$$

La couche limite thermique prend naissance en $x = x_0$, d'où :

$$x = x_0 \quad : \quad \Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{30}{34} \frac{1}{Pr} x_0^{3/4}$$

et finalement :

$$\Delta \approx 0,96 Pr^{-1/3} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-3/4} \right\}^{1/3} \quad (2.47a)$$

- ♥ Si l'on renonce maintenant à l'approximation (2.45), le calcul complet introduit une correction très voisine de celle qui a été obtenue dans (2.37), d'où le résultat approché (toujours pour $0,6 \leq Pr \leq 20$) :

$$\Delta \approx Pr^{-1/3} \left\{ I - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-3/4} \right\}^{1/3} \quad (2.47b)$$

Le flux pariétal dans la région $x \geq x_0$ a donc pour valeur, d'après (2.32) et (2.35) :

$$\varphi_{px} = -0,343 \lambda (T_\infty - T_p) Pr^{1/3} \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \left\{ I - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-3/4} \right\}^{-1/3} \quad (2.48)$$

2.5. - PAROI SOUMISE À UN FLUX IMPOSÉ

2.5.1. - Flux uniforme

Nous examinons maintenant le cas où le flux est imposé et uniforme :

$$\varphi_{px} = \varphi_p = cte$$

- ♣ La relation (2.18) reste valable :

$$b_l = - \frac{\varphi_p \delta_T}{\lambda (T_\infty - T_p)} \quad (2.49)$$

mais ici c'est T_p qui dépend de x , et de même dans l'équation (2.24a) :

$$\frac{d^2 T_p}{d x^2} = -6 \frac{T_\infty - T_p}{\delta_T^2} (2 - b_l)$$

Nous avons déjà indiqué (paragraphe précédent) que $d^2 T_p / d x^2$ est normalement petit par rapport à $(T_\infty - T_p) / \delta_T^2$. En d'autres termes, le coefficient b_l reste voisin de 2 :

$$b_l \approx 2$$

si bien que :

1) la relation (2.49) entre φ_p et δ_T s'écrit comme dans le cas à température de paroi imposée (équation 2.32) :

$$\varphi_p = - \frac{2 \lambda (T_\infty - T_p)}{\delta_T} \quad (2.50)$$

2) le champ de température T^+ est encore représenté par le polynôme (2.25).

3) les expressions (2.31) et (2.40) de δ_{Tl} sont conservées.

Ce qui a changé, c'est l'épaisseur de couche limite thermique δ_T .

- ◆ Dans le cas présent l'équation (2.12) devient, avec la définition (2.27) :

$$\frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\infty} = - \frac{d}{dx} \{(T_\infty - T_p) \delta_{T1}\} = cte \quad (2.51a)$$

L'intégration est immédiate et donne :

$$\frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\infty} x = - (T_\infty - T_p) \delta_{T1}$$

(sans constante additive car $\delta_{T1} = 0$ en $x = 0$).

Réutilisons (2.50), $\delta_T = \delta \Delta$ et $\delta_{T1} = \delta G(\Delta)$; l'équation devient :

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} x = \Delta G(\Delta) \delta^2 \quad (2.51b)$$

et en remplaçant δ par (2.35) :

$$\Delta G(\Delta) \approx \frac{0,059}{Pr} \quad (2.52)$$

où $G(\Delta)$ est exprimé par (2.31) ou (2.40) selon que Δ est supérieur ou inférieur à 1 ($Pr >$ ou $< 0,5$ - voir 2.53b).

Cette équation est identique (au coefficient près) à celle qui avait été obtenue avec $T_p = cte$ (2.36a). Sa résolution numérique donne Δ , d'où δ_T puis enfin la température.

Précisons la méthode : l'équation (2.52) a pour expression complète :

$$\frac{1}{180} \Delta^6 - \frac{3}{140} \Delta^5 + \frac{2}{15} \Delta^3 = \frac{0,059}{Pr}$$

ou encore :

$$\Delta^3 = \frac{0,443}{Pr} (1 + 0,363 Pr \Delta^5 - 0,094 Pr \Delta^6)$$

d'où l'équation implicite :

$$\Delta = 0,762 Pr^{-1/3} (1 + 0,363 Pr \Delta^5 - 0,094 Pr \Delta^6) \quad (2.53a)$$

A la solution exacte, on préfère souvent une formule analytique moins fine mais plus commode. On constate d'abord que l'ordre de grandeur de Δ est voisin de $0,8 Pr^{-1/3}$, que l'on remplace dans la parenthèse, de sorte que, après développement au premier ordre, on obtient une loi approchée

$$\Delta \approx 0,762 Pr^{-1/3} (1 + 0,03 Pr^{-2/3})$$

soit, avec une erreur minime dans la plage $0,6 \lesssim Pr \lesssim 20$:

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} \approx 0,785 Pr^{-1/3} \quad (2.53b)$$



On voit encore que dans cette même plage, la condition de flux imposé a pour conséquence $\Delta < 1$: la couche limite thermique est toujours moins épaisse que la couche limite dynamique. Il est donc inutile d'examiner ici le cas $\Delta > 1$.

La réinjection de Δ dans (2.50) donne :

$$\varphi_p \approx \frac{-2 \lambda (T_\infty - T_p)}{0,785 Pr^{-1/3} \delta} \approx -0,435 \lambda \left(\frac{\rho U_\infty}{\mu x} \right)^{1/2} Pr^{1/3} (T_\infty - T_p) \quad (2.54)$$

d'où l'on tire au choix $T_p(x)$ (qui obéit à une loi en $x^{1/2}$) ou le coefficient d'échange local :

$$h_x \approx 0,435 \lambda \left(\frac{\rho U_\infty}{\mu x} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \quad (2.55a)$$

ou encore le nombre de Stanton $St_x = \frac{h_x}{\rho C_p U_\infty}$:

$$St_x \approx 0,435 \Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3} \quad (0,6 \lesssim Pr \lesssim 20) \quad (2.55b)$$

alors que la méthode différentielle donne un coefficient 0,460 (§ 1.2.4).

Bien entendu, pour une approche plus fine, il reste toujours la possibilité de résoudre exactement l'équation (2.53a).

Enfin, le plus intéressant au point de vue pratique est la distribution de température à la surface, donnée par (2.54) :

$$T_p(x) - T_\infty = \frac{\varphi_p}{0,435 \lambda} \left(\frac{\mu x}{\rho U_\infty} \right)^{1/2} Pr^{-1/3} \quad (2.55c)$$

2.5.2. - Flux imposé quelconque

Avec un flux imposé arbitrairement à la surface, l'équation (2.51a) est remplacée par :

$$\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty} = - \frac{d}{dx} \{ [T_\infty - T_p(x)] \delta_{T1} \} \quad (2.56)$$

On doit ici encore utiliser la relation (2.50) entre $T_\infty - T_p$ et φ_p :

$$T_\infty - T_p = - \frac{\varphi_{px} \delta_T}{2 \lambda} = - \frac{\varphi_{px} \delta \Delta}{2 \lambda}$$

de telle sorte que la solution $\Delta(x)$ est maintenant obtenue en résolvant numériquement l'équation :

$$\frac{\varphi_{px}}{\rho C_p U_\infty} = \frac{1}{2 \lambda} \frac{d}{dx} \{ \varphi_{px} \delta^2 \Delta G(\Delta) \} \quad (2.57)$$

2.5.3. - Flux uniforme sur la zone $x \geq x_0$

Un cas particulier intéressant est celui où un flux φ_p uniforme est imposé à partir d'une abscisse x_0 .

Partons par exemple de (2.57) avec $\varphi_{p,x} = \varphi_p = cte$. Il reste :

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} = \frac{d}{dx} \{\delta^2 \Delta G(\Delta)\} \quad (2.58)$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\frac{2\lambda}{\rho C_p U_\infty} x = \delta^2 \Delta G(\Delta) + C$$

Nous avons ici une constante C du fait que la couche limite thermique démarre en x_0 (le schéma est analogue à celui de la figure 2.2) :

$$x = x_0, \quad \Delta = 0 \quad \text{d'où} \quad C = \frac{2\lambda x_0}{\rho C_p U_\infty}$$

Il vient en regroupant :

$$\frac{2\lambda (x - x_0)}{\rho C_p U_\infty} x = \delta^2 \Delta G(\Delta) \quad (2.59)$$

Comme au paragraphe 2.4.4, nous pouvons prendre en première approximation (puisque nous avons là encore $\Delta < 1$) :

$$G(\Delta) \approx \frac{2}{15} \Delta^2$$

ce qui, en remplaçant δ par (2.35), va nous donner la forme de la fonction $\Delta(x)$:

$$\frac{2\lambda (x - x_0)}{\rho C_p U_\infty} \approx \frac{2}{15} \Delta^3 \times 34 \frac{\mu x}{\rho U_\infty}$$

$$\text{d'où :} \quad \Delta^3 \approx 0,443 \frac{1}{Pr} \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)$$

$$\Delta \approx 0,76 Pr^{-1/3} \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)^{1/3} \quad (\text{pour } x \geq x_0) \quad (2.60)$$

Un calcul un peu plus fin donne un coefficient 0,785 au lieu de 0,76, comme dans (2.53b). Finalement, la relation (2.55a) est remplacée par :

$$h_x \approx 0,435 \lambda \left(\frac{\rho U_\infty}{\mu x}\right)^{1/2} Pr^{1/3} \frac{1}{\left(1 - \frac{x_0}{x}\right)^{1/3}}$$

ou encore :

$$h_x \approx 0,435 \lambda \left(\frac{\rho U_\infty}{\mu}\right)^{1/2} Pr^{1/3} x^{-1/6} (x - x_0)^{-1/3} \quad (2.61)$$

d'où la température de paroi (pour $x \geq x_0$) :

$$T_p(x) - T_\infty = \frac{\varphi_p}{0,435 \lambda} \left(\frac{\mu}{\rho U_\infty}\right)^{1/2} Pr^{-1/3} x^{1/6} (x - x_0)^{1/3} \quad (2.62)$$



! tout ceci toujours avec $0,6 \lesssim Pr \lesssim 20$.

ANNEXES AU CHAPITRE 2

2.A.1. - MÉTHODE SEMI-INTÉGRALE : ESQUISSE D'UN MODÈLE À L'ORDRE 3

Dans la méthode de Karman-Pohlhausen, le degré 4 retenu tant pour la vitesse que pour la température permet de faire face à toutes les situations, y compris en convection libre où la fonction $U(y)$ n'est pas monotone.

Cependant, avec les conditions simples habituellement adoptées en convection forcée ($U_\infty = cte, T_p = cte$ ou $\varphi_p = cte$), on arrive à peu près à la même qualité de résultats avec des calculs un peu plus rapides en limitant les polynômes à l'ordre 3.

Il faut pour cela sacrifier une condition à la limite, en l'occurrence celle qui porte sur la dérivée seconde à la lisière de la couche limite ($\partial^2 U / \partial y^2 = 0$ pour $y = \delta$, $\partial^2 T^+ / \partial y^2 = 0$ pour $y = \delta_T$).

Concernant la vitesse (FEMM 4.6.5 et 4.6.6) il reste pour caractériser les coefficients du polynôme :

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

c'est-à-dire :

$$a_1 = 3/2 \quad \text{et} \quad a_3 = -1/2$$

d'où :

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{3}{2}y^+ - \frac{1}{2}y^{+3}$$

Dans le cas où on choisit $T_p = cte$, les conditions sont comparables pour le champ de température (§ 2.4.1). Il suffit de remplacer les coefficients a par leurs homologues b et l'on obtient :

$$T^+ = \frac{3}{2}y^* - \frac{1}{2}y^{*3}$$

A partir de (2.30), le calcul donne alors, avec $Pr \geq 1$:

$$\delta_{T1} = \delta G(\Delta) \quad ; \quad G(\Delta) = 3 \left(\frac{\Delta^2}{20} - \frac{\Delta^4}{280} \right) \approx \frac{3}{20} \Delta^2$$

car on a $\Delta \leq 1$.

Toute la suite de la démarche est analogue, et l'ajustement $\delta_T / \delta \approx Pr^{-1/3}$ reste bien vérifié.

Avec le choix $\varphi_p = cte$, on retrouve $b_2 \approx 0$ et T^+ conserve la même forme.

Si besoin est, le modèle à l'ordre 3 s'applique également avec $T_p(x)$ ou $\varphi_{p,x}$ imposés.

PROBLÈMES

PROBLÈME 2.1

Énoncé

On considère un écoulement forcé laminaire, uniforme et isotherme (U_∞, T_∞) circulant parallèlement à une plaque plane dont la température T_p est uniforme. L'axe x est porté par la paroi, et dirigé dans la direction de l'écoulement.

Dans la couche limite thermique, on admet que $U \approx U_\infty$, et que le profil adimensionné de température T^+ est décrit par un polynôme de degré 3 en y ($T^+ = (T - T_p)/(T_\infty - T_p)$).

1 - A quelle catégorie de fluides s'intéresse-t-on ici ? Quelle est leur principale caractéristique ?

2 - Donner les coefficients du polynôme T^+ . Calculer l'épaisseur de la couche limite thermique $\delta_T(x)$ en fonction de x .

3 - Déterminer le nombre de Stanton local St_x et le coefficient d'échange local h_x . Comparer avec les résultats de la méthode différentielle.

Solution

1 - Si $U \approx U_\infty$ dans toute la couche limite thermique, c'est que l'épaisseur de la couche limite dynamique est très faible ($\delta \ll \delta_T$). Le fluide a donc une viscosité cinématique négligeable au regard de la diffusivité thermique, d'où $Pr \approx 0$. Il s'agit d'un métal liquide.

2 - Les coefficients du polynôme T^+ sont établis dans l'Annexe 2.A.1.

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = T^+ = \frac{3}{2} y^* - \frac{1}{2} y^{*3} \quad (1)$$

avec $y^* = y / \delta_T$ (2)

Calculons le flux $\varphi_{p,x}$ de deux façons différentes, en partant d'abord de l'équation intégral-différentielle (2.12) :

$$\frac{\varphi_{p,x}}{\rho C_p U_\infty} = -\frac{d}{dx} \left\{ (T_\infty - T_p) \int_0^{\delta_T} \frac{U}{U_\infty} (1 - T^+) dy \right\} \quad (3)$$

où l'on introduit (1) et $U/U_\infty = 1$:

$$\frac{\varphi_{p,x}}{\rho C_p U_\infty} = - (T_\infty - T_p) \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\delta_T} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta_T^3} \right) dy \right\} \quad (4)$$

L'intégration du polynôme donne :

$$\int_0^{\delta_T} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta_T^3} \right) dy = \frac{3}{8} \delta_T$$

d'où :

$$\varphi_{p,x} = -\frac{3}{8} \rho C_p U_\infty (T_\infty - T_p) \frac{d\delta_T}{dx} \quad (5)$$

D'un autre côté, d'après la loi de Fourier :

$$\varphi_{p,x} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda (T_\infty - T_p) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta_T^3} \right)_{y=0} \quad (6)$$

$$\varphi_{p,x} = -\frac{3\lambda}{2} \frac{T_\infty - T_p}{\delta_T} \quad (7)$$

On regroupe ensuite (7) et (5) :

$$\delta_T \frac{d\delta_T}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\delta_T^2}{dx} = \frac{4\lambda}{\rho C_p U_\infty}$$

et puisque $\delta_T = 0$ en $x = 0$:

$$\delta_T = \left(\frac{8\lambda x}{\rho C_p U_\infty} \right)^{1/2} \quad (8)$$

3 - On raisonne en valeur absolue pour St_x et $\varphi_{p,x}$.

$$St_x = \frac{\varphi_{p,x}}{\rho C_p U_\infty |T_\infty - T_p|}$$

d'où avec (7) et (8) :

$$St_x = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda}{\rho C_p U_\infty x} \right)^{1/2}$$

ou avec la diffusivité a :

$$St_x = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{a}{U_\infty x} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Pour la densité de flux locale :

$$\varphi_{px} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda \rho C_p U_\infty}{x} \right)^{1/2} |T_\infty - T_p|$$

On en déduit le coefficient local d'échange :

$$h_x = \frac{\varphi_{px}}{|T_\infty - T_p|} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda \rho C_p U_\infty}{x} \right)^{1/2}$$

c'est-à-dire en valeur décimale :

$$\boxed{h_x = 0,530 \left(\frac{\lambda \rho C_p U_\infty}{x} \right)^{1/2}} \quad (10)$$

On a trouvé par la méthode différentielle (§ 1.2.2.2. ♥) un coefficient 0,565 au lieu de 0,530 ici.

Commentaires

L'accord est assez bon entre les deux méthodes. L'ajustement est un peu meilleur en prenant pour T^+ un polynôme d'ordre 4.

PROBLÈME 2.2

Énoncé

On considère une plaque plane baignée par un écoulement incident uniforme et isotherme (U_∞, T_∞) . Près du bord d'attaque $(0 \leq x < x_0)$ la plaque est à la température T_∞ . Au-delà $(x \geq x_0)$ elle est à une température imposée $T_p = cte$.

1 - A quelles conditions un croisement des couches limites dynamique et thermique laminaire est-il possible ? (on admettra comme nombre de Reynolds critique $\Re_c = 10^5$). Représenter schématiquement la situation sur une figure. Ces conditions peuvent-elles être satisfaisantes avec de l'eau ou de l'air ? Si oui, déterminer l'abscisse x_l du croisement.

2 - Même question avec une densité de flux φ_p imposée.

Solution

1 - Lorsque T_p est imposée en $x \geq x_0$, on a d'après (2.47b) :

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} \approx Pr^{-1/3} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-3/4} \right\}^{1/3} \quad (0,6 \lesssim Pr \lesssim 20)$$

Au départ de la couche limite thermique (x voisin de x_0) on a $\delta_T < \delta$. Pour qu'il y ait un croisement, il faut que $\delta_T > \delta$ pour $x > x_l$

Or :
$$1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-3/4} < 1$$

La première condition est donc : $Pr^{-1/3} > 1$, soit :

$$\underline{Pr < 1}$$

Une seconde condition est que l'écoulement soit encore laminaire en x_l , d'où :

$$\Re_{x_l} = \frac{U_\infty x_l}{\nu} < 10^5$$

En $x = x_l$, $\delta = \delta_T$, d'où :

$$1 = Pr^{-1/3} \left\{ 1 - \left(\frac{x_l}{x_0} \right)^{-3/4} \right\}^{1/3}$$

$$x_l = x_0 (1 - Pr)^{-4/3}$$

et la condition s'écrit :

$$\frac{U_\infty}{\nu} x_0 (1 - Pr)^{-4/3} < 10^5$$

$$\boxed{x_0 < \frac{10^5 \nu}{U_\infty} (1 - Pr)^{-4/3}}$$

Aucune des deux conditions ne convient au cas de l'eau ($Pr > 1$) : il n'y a pas de croisement.

Les deux conditions sont compatibles avec un écoulement d'air ($Pr \approx 0,7$). Le croisement a lieu à l'abscisse :

$$x_l = x_0 (1 - 0,7)^{-4/3}$$

$$\underline{x_l \approx 5 x_0}$$

La seconde condition s'exprime alors par :

$$x_0 < \frac{5 \cdot 10^5 \nu}{U_\infty}$$

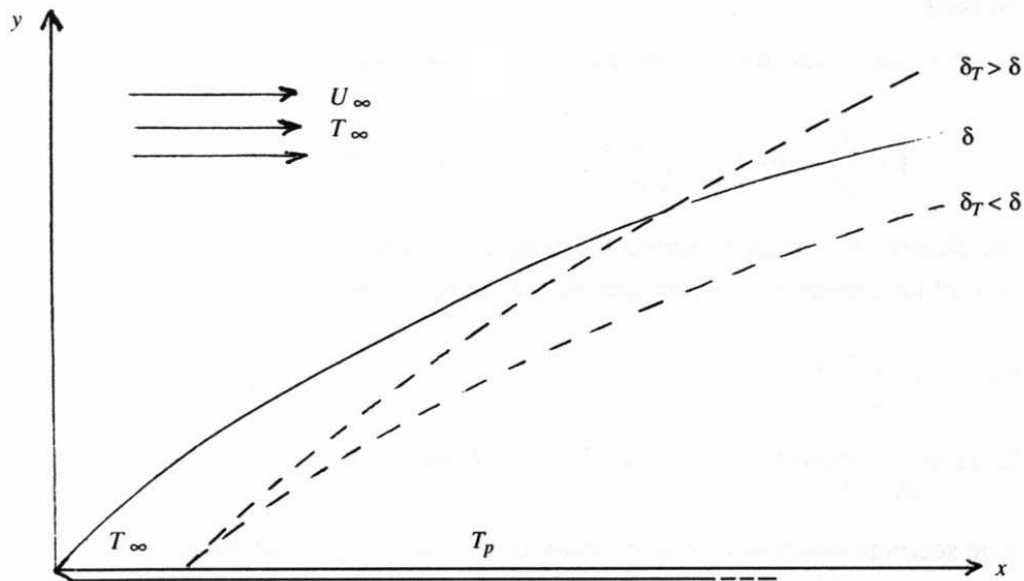


FIG. 2.2.1 -Épaisseurs de couches limites dynamique et thermique. Croisement possible pour $Pr < 1$.

2 -Si φ_p est imposé pour $x > x_0$, le rapport δ_T / δ est donné par (2.60) (avec le coefficient 0,785 cité deux lignes plus bas) :

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} \approx 0,785 Pr^{-1/3} \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)^{1/3}$$

On voit que $\left(1 - \frac{x_0}{x}\right)^{1/3} < 1$ et que Δ augmente avec x . Pour avoir un croisement, il faut donc que :

$$0,785 Pr^{-1/3} > 1$$

soit :

$$\underline{Pr < 0,48}$$

Cette condition n'est satisfaite ni avec l'air ni avec l'eau.

Commentaires

Dans le cas $\varphi_p = cte$, le croisement est possible avec un fluide à faible nombre de Prandtl mais l'expression (2.60) n'est valable que pour $0,6 \lesssim Pr \lesssim 20$. Il faut la réajuster.