

Chapitre 6

ÉCOULEMENTS INTERNES

Le secret de plaire, c'est de se laisser apprendre des choses que l'on sait par quelqu'un qui les ignore.

TALLEYRAND

Par rapport aux écoulements externes, les écoulements internes ont ceci de particulier que les conditions aux limites y sont omniprésentes. Ils sont abordés dans ce chapitre sous deux aspects complémentaires : les profils de vitesse (dont la connaissance est essentielle en convection thermique) et les dissipations d'énergie mécanique (pertes de charge) qui conditionnent le dimensionnement des circuits fluides, et en particulier le dessin des échangeurs ; plus généralement, les dissipations doivent être prises en compte dans les bilans énergétiques ou économiques.

Pour atteindre cet objectif, nous nous sommes conformé à la démarche adoptée depuis le début : utiliser méthodiquement les structures de la théorie (bilans, similitude ...) et recourir à un nombre minimal d'hypothèses phénoménologiques. Ainsi, on peut faire apparaître des paramètres significatifs (dimension caractéristique d'une canalisation, facteur de forme, § 6.6), mieux éclairer un concept (« perte de charge singulière », § 6.7), justifier une formule présentée comme semi-empirique (§ 6.6.2), ou débarrasser l'exposé de quelques scories qui se révèlent superflues. En outre, une telle procédure améliore le pouvoir de prédictibilité de la théorie : par exemple, la présentation utilisée pour les écoulements turbulents laisse la porte ouverte au calcul des canalisations annulaires sans données ou hypothèses complémentaires. Elle fournit aussi l'occasion de faire une mise au point sur l'utilisation simultanée des bilans d'énergie et de quantité de mouvement (§ 6.6.1.8). Enfin, ce type d'approche facilite une distinction claire entre écoulements établis et non établis, les seconds étant d'ailleurs plutôt la règle que l'exception.

6.1. – SPÉCIFICITÉ DES ÉCOULEMENTS INTERNES

6.1.1. – Considérations générales et définitions

♣ Les écoulements internes ont pour caractère particulier l'absence de conditions aux limites à l'infini, ce qui n'est pas le cas des écoulements externes. L'influence des parois se manifeste donc dans toutes les directions, sauf éventuellement aux sections d'entrée et de sortie du fluide.

La diversité des géométries possibles entraîne évidemment une grande variété dans la structure des écoulements, mais ce sont le plus souvent des écoulements de type couche limite, comme par exemple dans les canalisations.

◆ Quoi qu'il en soit, l'expression générale du nombre de Reynolds (critère de similitude relatif aux forces de viscosité) est bien entendu indépendante des conditions de l'écoulement, et l'on a toujours :

$$Re = \frac{V^\circ L^\circ}{\nu} \quad (2.26b)$$

mais les définitions conventionnelles de la vitesse de référence V° et de la longueur de référence L° ne sont pas les mêmes que pour les écoulements externes et doivent donc être précisées.

Pour cela, il faut bien noter dès maintenant que *la grandeur physique la plus importante en pratique est souvent le débit total de fluide*. Si x est la direction générale de l'écoulement et S_0 une section plane de la veine fluide perpendiculaire à x , ce débit a pour expression d'après la définition (1.28) :

$$q_m = \int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{S_0} \rho U \, dS \quad (\text{en kg/s}) \quad (6.1a)$$

Très souvent, dans les écoulements isochores, on évite de s'embarrasser du terme ρ en faisant usage du « débit-volume » (ou *débit volumique*) :

$$q_v = \int_{S_0} U \, dS \quad (\text{en m}^3/\text{s}) \quad (6.1b)$$

On introduit alors une vitesse moyenne sur la section S_0 , appelée « *vitesse débitante* V_d », ou encore *vitesse de mélange* (par analogie avec la température de mélange, voir PTC, ch. 3) définie par :

$$\boxed{V_d = \frac{q_v}{S_0} = \frac{q_m}{\rho S_0}} \quad (6.1c)$$

(en anglais, on dit *bulk velocity*, et la notation usuelle est V_b).

C'est cette vitesse débitante, représentative de l'écoulement, qui est choisie comme vitesse de référence V° dans le nombre de Reynolds.

Quant à la longueur L° , ce sera le « *diamètre hydraulique* » D_h de la veine fluide, dont la définition précise sera analysée et justifiée un peu plus loin (§ 6.6.1.5). Notons simplement pour l'instant que l'on a :

$$D_h = \text{diamètre } D \text{ pour une section circulaire} \quad (6.2a)$$

$$D_h = 2 \text{ fois l'épaisseur pour une section rectangulaire plate} \quad (6.2b)$$

En résumé, le nombre de Reynolds s'écrit donc ici :

$$\boxed{Re = \frac{V_d D_h}{\nu}} \quad (6.2c)$$

♥ D'autre part, la vitesse débitante peut servir à exprimer la conservation de la masse (et donc du débit) dans l'écoulement. Si la canalisation est de section S variable, cette propriété s'écrit, en vertu de (6.1c), pour un fluide isochore :

$$\boxed{S V_d = cte} \quad (6.3)$$

Donc, la vitesse augmente lorsque la section diminue, et réciproquement.

6.1.2. – Données expérimentales

♣ Nous avons déjà approché l'aspect expérimental des écoulements internes au début du chapitre 2 en analysant les différents régimes d'écoulement qui peuvent être observés dans une canalisation : laminaire, turbulent « lisse », turbulent « rugueux ». La distinction entre écoulements laminaires et turbulents a été complétée et précisée au chapitre 3. Il n'est donc pas indispensable d'y revenir ici.

La seule précision supplémentaire à donner concerne le nombre critique Re_c qui caractérise la transition laminaire – turbulent : celui-ci dépend un peu de la forme de la section et l'on peut admettre comme valeurs moyennes :

- section rectangulaire plate : $Re_c \simeq 2500$
- section circulaire : $Re_c \simeq 2000$.

◆ Mais la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement ne suffit pas à caractériser complètement le champ des vitesses, car la structure de l'écoulement est également modélisée par la forme des parois.

Pour aborder l'aspect physique du problème, examinons à titre d'exemple ce qu'il se passe dans une canalisation rectiligne de section constante. Le phénomène de couche limite se manifeste dès l'entrée au voisinage de la paroi ; mais au-delà d'une certaine distance, comme la paroi enveloppe complètement le fluide dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, la couche limite vient interférer avec elle-même pour donner naissance à une nouvelle structure dynamique : *l'écoulement établi* ; celui-ci possède toujours les caractères d'un écoulement de couche limite, mais il s'ordonne d'une façon particulière sous l'influence des conditions aux limites.

♥ La *zone d'établissement* du régime dynamique s'observe aussi bien en laminaire qu'en turbulent, mais sa structure n'est pas la même dans les deux cas. Supposons pour simplifier que la répartition de vitesse soit uniforme dans la section d'entrée du conduit :

- **en laminaire** (fig. 6.1), la couche limite laminaire s'épaissit régulièrement jusqu'à occuper l'ensemble de la veine fluide, ce qui donne naissance au régime établi. Dans la partie centrale – appelée aussi *noyau central* – le fluide est l'objet d'une accélération qui compense le freinage subi dans la zone de couche limite. Le calcul sera donc ici plus complexe que dans les écoulements externes puisque la vitesse U hors de la couche limite dépend à la fois de la distance x à l'entrée et de la distance à la paroi. La « longueur d'établissement » L_e est donnée approximativement par :

$$L_e / D \simeq 0,06 Re \quad (6.4a)$$

lorsque la section est circulaire, de diamètre D .

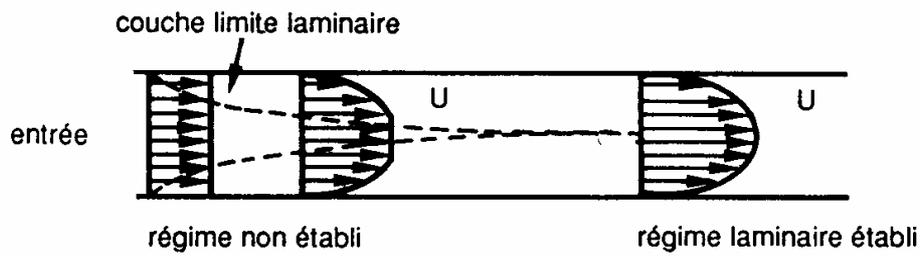


FIG. 6.1. – Établissement du régime laminaire dans une canalisation de section circulaire ou entre deux plans parallèles.

- *en turbulent*, la couche limite est d'abord laminaire, puis se subdivise comme sur une plaque plane en couche limite turbulente et sous-couche visqueuse. Dans le noyau central on note, là encore, une accélération du fluide (fig. 6.2).

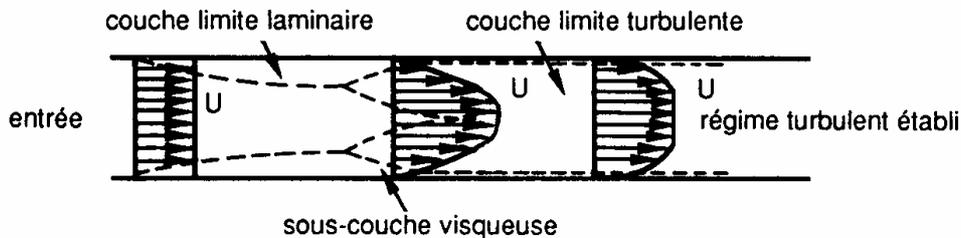


FIG. 6.2. – Établissement du régime turbulent dans une canalisation de section circulaire ou entre deux plans parallèles.

Lorsque le régime établi est atteint il y a coexistence d'une couche limite turbulente, qui occupe la quasi-totalité de la section, et d'une mince sous-couche visqueuse au voisinage des parois. La description de ce phénomène que nous avons faite en 5.1.1.2 à propos de la plaque plane reste valable ici. La seule différence est que dans un espace confiné l'échelle des grandes structures turbulentes est limitée par la géométrie du conduit : cela se répercutera sur l'expression de la viscosité turbulente.

On admet que la *longueur d'établissement* (distance nécessaire pour atteindre le régime turbulent établi) avec une section circulaire est de l'ordre de :

$$L_e / D \simeq 0,63 Re^{0,25} \quad (6.4b)$$

En pratique, il est évidemment rare que le profil de vitesse à l'entrée soit uniforme ; la longueur d'établissement va s'en trouver un peu affectée mais la description du phénomène reste globalement valable. L'analyse des écoulements non établis sera en outre complétée plus loin car leur importance peut être significative au point de vue dynamique (pertes de charge singulières, § 6.7) ou thermique (échangeurs).

Cependant, la suite de ce chapitre portera principalement sur les écoulements établis, dont il convient maintenant de proposer une définition quantitative.

6.1.3. – Propriétés des écoulements établis

♣ Plaçons-nous pour commencer en écoulement laminaire et en géométrie cartésienne bidimensionnelle.

⚠ Nous dirons *qu'un écoulement est établi* si en tout point $M(x, y)$ on a :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = 0} \quad (6.5a)$$

x étant la direction générale de l'écoulement et y la direction perpendiculaire. Cette hypothèse signifie que la composante U ne dépend que de y : il y a invariance des profils de vitesse le long de l'écoulement.

Une conséquence immédiate de cette définition est que :

$$\partial^2 U / \partial x^2 = 0 \quad (6.5b)$$

Les implications de la condition (6.5) sont importantes si l'on considère que le fluide est isochore ($\rho = cte$).

1. De l'équation de continuité $\partial U / \partial x + \partial V / \partial y = 0$ on déduit :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

soit V indépendant de y en tout point. Ceci est incompatible avec les conditions aux limites, sauf si V est nul partout. Il faut donc que l'on ait :

$$V = 0 \quad (6.6a)$$

et donc en particulier *que la canalisation soit rectiligne et de section constante*, les génératrices de la paroi étant parallèles à l'axe des x :

$$\boxed{S_0(x) = S = cte} \quad (6.6b)$$

2. En écoulement permanent, la première équation (1.38c) de Navier Stokes :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

devient ici :

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (6.7a)$$

L'existence de solutions en tout point de l'écoulement entraîne :

$$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = cte \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial p^*}{\partial x} = cte} \quad (6.7b)$$

Dans un écoulement établi, le gradient de pression motrice est donc uniforme le long de l'écoulement.

3. Quant à la seconde équation (1.38c) de Navier Stokes :

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

elle se réduit à :

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \quad (6.8)$$

c'est-à-dire : $p^* = cte$ sur une section droite, puisque la direction y est perpendiculaire aux génératrices de la paroi.

En d'autres termes, *la loi de l'hydrostatique $p^* = cte$ (1.38d) est vérifiée sur chaque section droite de l'écoulement.*

◆ Trois remarques compléterons cette analyse :

- les conclusions 1, 2, 3 restent inchangées en coordonnées cylindriques ;

- elles sont également valables en écoulement turbulent, moyennant quelques précisions complémentaires (§ 6.3) ;

- les propriétés (6.5a) et (6.6a) correspondent au modèle de Couette, déjà évoqué au chapitre 5 pour l'analyse de la structure transversale de la couche limite externe (§ 5.1.3.4). Elles décrivent en fait un écoulement particulier de couche limite, où les approximations (4.8) sont devenues rigoureuses.

6.2. – ÉCOULEMENTS ÉTABLIS LAMINAIRES

6.2.1. – Circulation d'un fluide entre deux plans parallèles

6.2.1.1. – ÉCOULEMENT DE COUETTE

Nous avons décrit au chapitre 1 l'expérience de Couette et sa schématisation usuelle : écoulement laminaire d'un fluide entre deux plans parallèles dont l'un est fixe, et l'autre animé d'une vitesse U_e .

Notre objectif est ici de déterminer la distribution de vitesse dans une section droite, et sa relation avec la vitesse débitante et le débit de fluide transporté.

♣ Les équations (6.7), valables en écoulement établi, peuvent encore s'écrire :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} = cte \quad (6.9a)$$

ce qui donne, en intégrant :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (6.9b)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont fixées par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y = 0 & ; & U = 0 \\ y = e & ; & U = U_e \end{cases}$$

et l'on obtient :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} y^2 + \left(\frac{U_e}{e} - \frac{e}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \right) y \quad (6.10)$$

Le profil de vitesse est donc parabolique (fig. 6.3). Sa concavité est donnée par la dérivée seconde $\partial^2 U / \partial y^2 = \mu (dp^* / dx)$ qui est du signe de dp^* / dx .

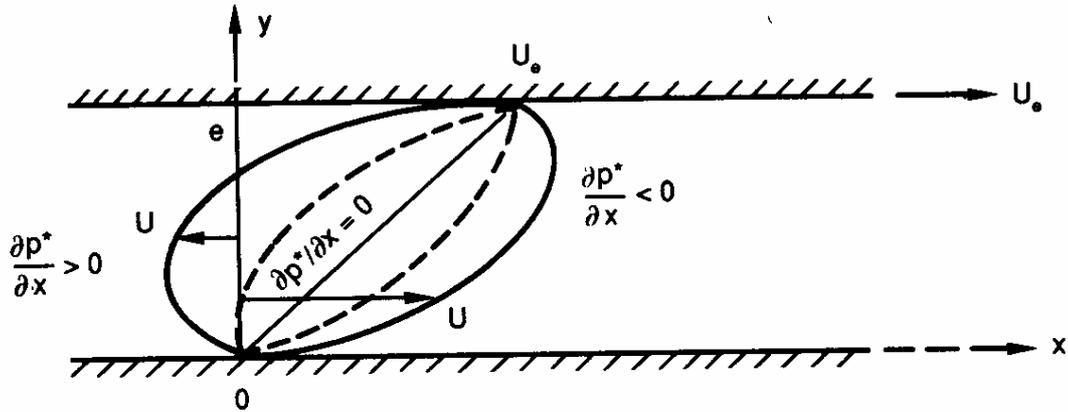


FIG. 6.3. – Distribution de vitesse dans un écoulement de Couette selon le gradient de pression dp^*/dx

L'écoulement est soumis ici à deux moteurs : le déplacement de la paroi et le gradient de pression. Admettons que U_e soit dans le sens des x . Si le gradient de pression est négatif (pression plus élevée en amont), les deux moteurs agissent dans le même sens. S'il est positif, la pression agit comme un frein par rapport au mouvement de la paroi. Un gradient de pression suffisamment grand peut même engendrer un écoulement de retour ($U < 0$, courbe la plus à gauche sur la figure 6.3) ; dans ce cas, il y a coexistence de deux écoulements de sens contraire : on parle alors « d'écoulement cisailé ». La limite d'apparition de l'écoulement de retour correspond à la valeur du gradient de pression pour laquelle on a $dU/dy = 0$ sur la paroi fixe (courbe de gauche en pointillés).

En l'absence d'un gradient de pression ($dp^*/dx = 0$) la répartition de vitesse entre les deux plans devient linéaire :

$$U = U_e \frac{y}{e} \quad (6.11a)$$

Le cisaillement τ dans l'écoulement est alors uniformément réparti :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} = \mu \frac{U_e}{e} = cte \quad (6.11b)$$

◆ Le débit total de fluide entre les deux plans est dû à la fois à la vitesse d'entraînement et au gradient de pression. En désignant par l la largeur de la veine fluide, le débit-volume q_v (6.1b) s'écrit, dans une section S_0 :

$$q_v = \int_{S_0} U dS = l \int_0^e U dy$$

Avec (6.10), on obtient en intégrant et en groupant les termes :

$$q_v = l \frac{e}{2} \left(U_e - \frac{e^2}{6\mu} \frac{dp^*}{dx} \right) \quad (6.12a)$$

d'où l'on tire si besoin est la vitesse débitante $V_d = q_v / S_0 = q_v / l e$:

$$V_d = \frac{U_e}{2} - \frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} \quad (6.12b)$$

♥ L'écoulement de Couette s'applique par exemple, en première approche, à la lubrification des paliers, l'approximation plane étant justifiée par le fait que l'entrefer e est petit devant le rayon des deux parois. Cependant, si l'on veut approfondir le problème, il faut noter qu'un palier en fonctionnement n'est pas rigoureusement centré et que e est variable ; on doit donc travailler en écoulement non établi.

6.2.1.2. – ÉCOULEMENT DANS UN CONDUIT RECTANGULAIRE PLAT

Tout particulièrement dans les échangeurs à plaques, on rencontre des sections rectangulaires dont la largeur est grande par rapport à l'épaisseur, ce qui permet de négliger les effets de bords. Avec cette géométrie, le Reynolds critique pour la transition laminaire – turbulent est $Re_c \approx 2500$ environ.

Dans cette configuration, l'écoulement est uniquement provoqué par le gradient de pression, lui-même imposé par les conditions aux limites (§ 6.6). Mais la répartition de vitesse et le débit s'obtiennent à partir du modèle de Couette en faisant simplement $U_e = 0$ dans (6.10) et (6.12) puisque les deux plans sont fixes.

!!! On préfère habituellement noter $e = 2b$ la hauteur ou (épaisseur) du canal (fig. 6.4). Cela donne donc :

♣ - pour la vitesse :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} (y^2 - 2by) \quad (6.13a)$$

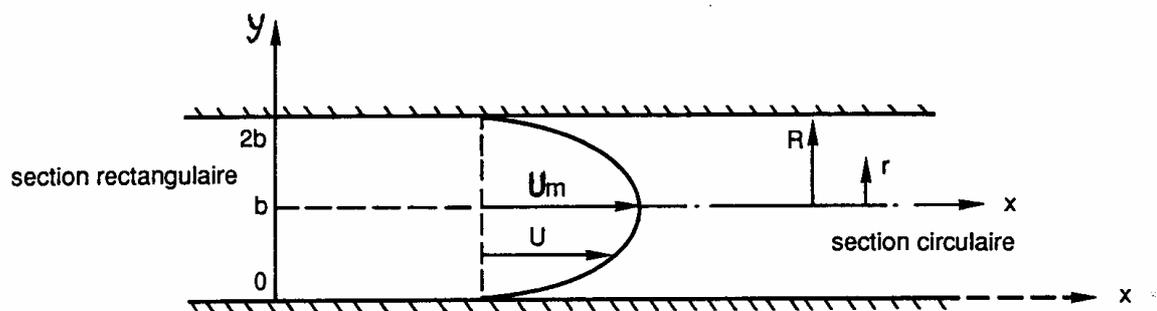


FIG. 6.4. – Écoulement laminaire : veine fluide de section rectangulaire ou circulaire

C'est au milieu de la canalisation ($y = b$) que U atteint sa valeur maximale U_m (ce qui est évidemment logique en raison de la symétrie) :

$$U_m = - \frac{b^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \quad (6.13b)$$

L'expression (6.13a) montre de plus que la distribution de vitesse U dans la section est parabolique, et que le sens de l'écoulement est bien celui des pressions décroissantes (U est du signe contraire de dp^*/dx).

◆ - pour le débit (l étant la largeur du conduit) :

$$q_v = - \frac{2}{3} \frac{lb^3}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \quad (6.14a)$$

d'où la vitesse débitante $V_d = q_v / 2lb$:

$$V_d = - \frac{b^2}{3\mu} \frac{dp^*}{dx} = \frac{2}{3} U_m \quad (6.14b)$$

♥ - pour le cisaillement :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} = \frac{dp^*}{dx} (y - b) \quad (6.14c)$$

La répartition de contrainte est linéaire, et en particulier $\tau = 0$ sur le plan de symétrie. Le maximum est atteint aux parois $y = 0$ ou $y = 2b$:

$$\tau_p = \pm b \frac{dp^*}{dx} \quad (6.14d)$$

6.2.2. – Écoulement dans un tuyau rectiligne de section circulaire

L'étude de l'écoulement dans une section circulaire nous impose de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques, l'origine $r = 0$ étant prise sur l'axe du tuyau (fig. 6.4). Le rayon intérieur est noté R .

♣ Dans un écoulement à symétrie cylindrique, l'équation (1.38c) s'écrit :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \quad (6.15a)$$

En écoulement établi (6.5, 6.6, 6.7) il reste :

$$\nu \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) = \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx} = cte \quad (6.15b)$$

Une première intégration donne :

$$r \frac{dU}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} + A$$

avec $A = cte$, soit :

$$\frac{dU}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} + \frac{A}{r}$$

d'où la distribution de U :

$$U = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} + A \ln r + B \quad (6.15c)$$

Sur l'axe, $r = 0$ mais U est finie, d'où $A = 0$.

La condition à la paroi ($U = 0$ pour $r = R$) fixe la constante B et il vient enfin :

$$U = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2) \quad (6.16a)$$

Le profil de vitesse présente le même aspect parabolique que dans le canal plan, et la vitesse est maximale sur l'axe du tuyau (fig. 6.4) avec :

$$U_m = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} R^2 \quad (6.16b)$$

Comme dans le cas de l'écoulement plan, on constate que la direction de l'écoulement est celle des pressions décroissantes, puisque U est du signe contraire de dp^*/dx .

◆ Pour calculer le débit-volume lié au gradient de pression, on écrira suivant (6.1b) (l'élément d'intégration dS étant ici un anneau de rayon r et d'épaisseur dr) :

$$q_v = \int_{S_0} U dS = \int_0^R U 2\pi r dr \quad (6.17a)$$

c'est-à-dire :

$$q_v = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

Le résultat est connu sous le nom de « *formule de Poiseuille* » :

$$q_v = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp^*}{dx} R^4 = -\frac{\pi}{128\mu} \frac{dp^*}{dx} D^4 \quad (6.17b)$$

Dans la seconde formulation on a fait intervenir le diamètre D du tuyau, qui est très souvent utilisé à la place du rayon R .

Enfin, la vitesse débitante est ici $V_d = q_v / \pi R^2$:

$$V_d = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp^*}{dx} R^2 = \frac{U_m}{2} \quad (6.17c)$$

d'où, en revenant à (6.16a) :

$$U = 2V_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (6.17d)$$

♥ En ce qui concerne la contrainte de cisaillement τ , elle est linéaire, et nulle sur l'axe. En particulier, à la paroi, elle a pour expression (la coordonnée r étant orientée à partir de l'axe, et non à partir de la paroi comme l'était l'ordonnée y dans l'écoulement plan) :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = -\mu (dU/dr)_{r=R}$$

soit, en se référant à (6.16a) :

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{dp^*}{dx} \quad (6.17e)$$

♠ D'un point de vue physique, la formule de Poiseuille montre d'une part qu'un écoulement dans la direction x ($q_v > 0$) s'accompagne obligatoirement d'une perte de pression motrice ($dp^*/dx < 0$), et d'autre part que le débit est directement proportionnel au gradient de pression motrice imposé à l'écoulement : *si les conditions aux limites sont fixées (pression donnée à l'entrée et à la sortie), une augmentation de la longueur du tuyau se traduit par une diminution du gradient, donc du débit.* En fait, ceci s'applique à tous les écoulements établis (cf. relations 6.14a, 6.17b et 6.20b) et doit être rapproché de la dissipation d'énergie mécanique (§ 6.6).

6.2.3. – Écoulement dans un espace annulaire

Examinons encore le cas d'un écoulement entre deux tuyaux droits coaxiaux, que l'on rencontre en particulier dans certains échangeurs, et aussi dans les forages pétroliers. On notera R_1 le plus petit rayon et R_2 le plus grand (fig. 6.5).

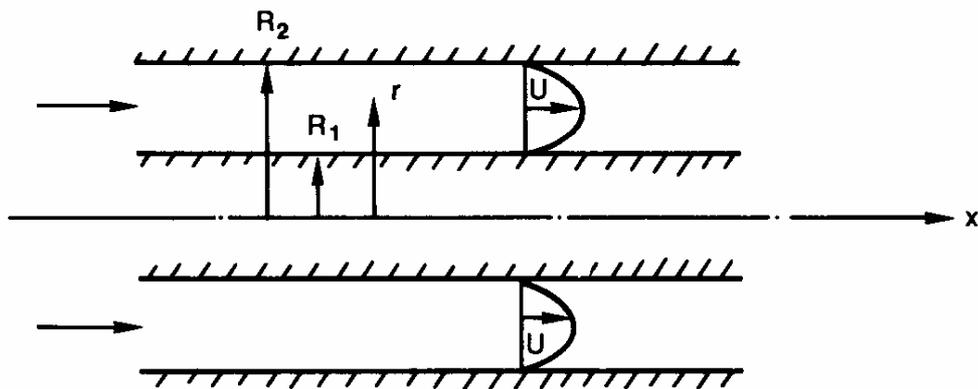


FIG. 6.5 – Écoulement dans une canalisation annulaire.

♣ La solution générale (6.15c) reste valable, les conditions aux limites étant ici :

$$\begin{aligned} r = R_1, & \quad U = 0 \\ r = R_2, & \quad U = 0 \end{aligned}$$

soit, en remplaçant dans (6.15c) :

$$A \operatorname{Ln} R_1 + B = - \frac{R_1^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dx}$$

$$A \operatorname{Ln} R_2 + B = - \frac{R_2^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dx}$$

On en déduit les constantes A et B :

$$A = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\operatorname{Ln}(R_2/R_1)} \quad (6.18a)$$

$$B = + \frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} \left\{ \frac{R_2^2 - R_1^2}{\operatorname{Ln}(R_2/R_1)} \operatorname{Ln} R_2 - R_2^2 \right\} \quad (6.18b)$$

ce qui donne pour U , après regroupement de certains termes :

$$U = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} \left(R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\operatorname{Ln}(R_2/R_1)} \operatorname{Ln} \frac{r}{R_2} \right) \quad (6.19a)$$

Le maximum de la vitesse est obtenu pour un rayon r_m tel que :

$$r_m = \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \operatorname{Ln}(R_2/R_1)}} \quad (6.19b)$$

◆ En ce qui concerne le débit dû au gradient dp^*/dx , les calculs sont un peu plus laborieux. Posons provisoirement, pour alléger l'écriture :

$$C = \frac{R_2^2 - R_1^2}{\operatorname{Ln}(R_2/R_1)} \quad (6.20a)$$

Le débit-volume s'écrit :

$$q_v = \int_{R_1}^{R_2} U 2\pi r dr = - \frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \int_{R_1}^{R_2} (R_2^2 - r^2 + C \operatorname{Ln} r - C \operatorname{Ln} R_2) r dr$$

$$q_v = - \frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \left\{ \frac{R_2^4}{2} - \frac{R_2^2 R_1^2}{2} - \frac{R_2^4}{4} + \frac{R_1^4}{4} - \frac{C}{2} (R_2^2 - R_1^2) \operatorname{Ln} R_2 + C \int_{R_1}^{R_2} r \operatorname{Ln} r dr \right\}$$

La dernière expression s'intègre par parties et vaut :

$$\int_{R_1}^{R_2} r \operatorname{Ln} r dr = \left[\frac{r^2}{2} \operatorname{Ln} r - \frac{r^2}{4} \right]_{R_1}^{R_2}$$

Au total, on a donc :

$$q_v = - \frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \left\{ \frac{1}{4} (R_2^2 - R_1^2)^2 + C \left[- \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \operatorname{Ln} R_2 + \frac{R_2^2}{2} \operatorname{Ln} R_2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{R_1^2}{2} \operatorname{Ln} R_1 - \frac{1}{4} (R_2^2 - R_1^2) \right] \right\}$$

c'est-à-dire, après avoir remplacé C par (6.20a), puis groupé et réarrangé un peu les termes :

$$q_v = - \frac{\pi}{8\mu} \frac{dp^*}{dx} (R_2^2 - R_1^2) \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\text{Ln}(R_2/R_1)} \right) \quad (6.20b)$$

La vitesse débitante est ici $V_d = q_v / \pi (R_2^2 - R_1^2)$, c'est-à-dire :

$$V_d = - \frac{1}{8\mu} \frac{dp^*}{dx} \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\text{Ln}(R_2/R_1)} \right) \quad (6.20c)$$

♥ Le calcul des *contraintes aux parois* montre qu'elles ont des valeurs différentes (comme dans l'écoulement de Couette) :

$$\tau_{p1} = \mu (dU/dr)_{r=R_1} \neq \tau_{p2} = - \mu (dU/dr)_{r=R_2}$$

(sur la paroi 2, la coordonnée normale est de sens contraire à la direction \vec{r} , d'où le signe -, cf. § 6.2.2. ♥).

A la fin du chapitre, nous examinerons les conséquences de cette situation à propos des pertes de charge.

♠ Enfin, la *longueur d'établissement* L_e du régime dynamique a pu être établie en fonction de r_m (6.19b) (Tehrmina, Mojtabi, 1988) :

$$\frac{L_e}{r_m} = \left(\frac{r_m}{R_1} - 1 \right)^{1,85} Re^{0,8} \quad (6.20d)$$

Pour l'expression du nombre de Reynolds dans un conduit annulaire, on se reportera au paragraphe 6.6.1.5.

6.2.4. – Canalisations de section quelconque

Dans le cas général, les calculs doivent être faits en tridimensionnel (par exemple en coordonnées cylindriques, chapitre 1, annexe 1.A.5) et les résultats ne se présentent généralement pas sous forme analytique. Cependant, *en écoulement établi* ($\partial U / \partial x = 0$, $V = W = 0$, $\partial p^* / \partial x = cte$), le débit reste proportionnel au gradient de pression $\partial p^* / \partial x$. En effet, selon la direction x , l'équation (1.37b) s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (6.21a)$$

c'est-à-dire (§ 6.1.3) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} = cte \quad (6.21b)$$

soit :

$$U = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} (A y^2 + B z^2 + C y z + D y + E z + F) \quad (6.21c)$$

où A, B, \dots sont des constantes. La vitesse locale U est donc proportionnelle au gradient de pression, et il en est de même pour le débit q_v , ainsi que pour la contrainte pariétale τ_p . La conclusion serait la même en coordonnées cylindriques.

Enfin, toutes les propriétés précédentes peuvent être admises avec des canalisations non rectilignes, pourvu que le rayon de courbure soit grand par rapport aux dimensions de la section : c'est le cas par exemple de certains serpents.

6.3. – ÉCOULEMENTS ÉTABLIS TURBULENTS EN PRÉSENCE DE PAROIS LISSES

Nous considérons dans ce paragraphe les écoulements dans des canalisations à parois lisses, ou du moins hydrauliquement lisses, c'est-à-dire telles que la rugosité soit sans effet sur la couche limite (on dit aussi par raccourci « écoulements turbulents lisses »). Les écoulements le long de parois rugueuses feront l'objet du paragraphe 6.4.

6.3.1. – Écoulement dans un conduit rectangulaire plat

6.3.1.1. – MODÉLISATION

Pour traiter les écoulements internes, nous conservons le modèle pseudo-laminaire qui permet ici des simplifications bienvenues. Dans le cas de la section rectangulaire, l'équation à résoudre est encore (5.4) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \text{div} \left\{ (v + v_t) \overrightarrow{\text{grad}} U \right\} \quad (6.22)$$

toujours écrite en faisant intervenir la pression motrice \bar{p}^* , conformément à la formulation (1.37b), pour inclure les cas où la canalisation n'est pas horizontale. Les symboles U, V désignent ici les moyennes temporelles des composantes du vecteur vitesse.

Nous nous plaçons à nouveau en *écoulement établi* (§ 6.1.3), c'est-à-dire tel que :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad S_0 = \text{cte} \quad (6.5 ; 6.6)$$

et nous supposons la canalisation rectiligne.

Alors (6.22) se simplifie et il reste :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = \text{div} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (6.23a)$$

⚠ *Puisque U est indépendante de x , il doit en être de même pour la viscosité turbulente. Nous étendrons donc les hypothèses de l'écoulement établi au régime turbulent en admettant que :*

$$\frac{\partial v_t}{\partial x} = 0 \quad (6.23b)$$

Pour que l'équation (6.23a) soit vérifiée en tout point (x, y) , il faut que :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = cte \quad (6.24a)$$

et l'on retrouve la propriété (6.7b) qui s'applique cette fois à la pression moyenne \bar{p}^* :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = cte} \quad (6.24b)$$

De même, (6.8) devient ici :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y} = 0 \quad (6.24c)$$

D'autre part, en tenant compte de (5.11c, § 5.1.3.2), la relation (6.24a) prend la forme :

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = cte \quad (6.25)$$

où τ est la contrainte tangentielle totale : $\tau = \tau_v + \tau'$.

Le champ de contrainte est donc une fonction linéaire de y (alors qu'il était constant dans une couche limite).

6.3.1.2. – EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA LOI DE VITESSE

Nous nous contenterons d'étudier ici la couche limite au voisinage de la paroi $y = 0$; les résultats seraient évidemment identiques vers la paroi $y = 2b$.

Au vu de ce qui précède, nous pouvons à partir de maintenant remplacer les dérivées partielles par des différentielles. Sachant que \bar{p}^* est indépendante de y (d'après 6.24c), la loi de vitesse s'obtient par intégration de (6.23a), soit dans une première étape :

$$(v + v_t) \frac{dU}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} y + cte \quad (6.26a)$$

A la paroi $y = 0$, d'après (5.12b) on a :

$$\left\{ (v + v_t) \frac{dU}{dy} \right\}_{y=0} = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6.26b)$$

d'où :

$$(v + v_t) \frac{dU}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} y + \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6.27)$$

6.3.1.3. – LOI DE VITESSE DANS LA COUCHE INTERNE

Dans la couche interne, dont l'épaisseur est faible (§ 5.1.1.2), il s'avère légitime de négliger le terme de pression en admettant que :

$$\frac{d\bar{p}^*}{dx} y \ll \tau_p \quad (6.28)$$

(nous reviendrons sur cette approximation à la fin du paragraphe).

Alors (6.27) se réduit à l'équation :

$$(v + v_t) \frac{dU}{dy} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

qui est identique à (5.12b), et l'on se trouve ramené au modèle simplifié de couche limite qui a été examiné au chapitre 5 (§ 5.1.3.2). Nous en rappelons brièvement ci-dessous les conclusions.

On admet pour viscosité turbulente :

$$\begin{cases} v_t = l^2 \frac{dU}{dy} , & l = K y a \\ K = 0,40 & \text{constante de Karman} \end{cases} \quad (5.13, 5.18)$$

et l'on pose :

$$U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho} : \text{vitesse de frottement} \quad (5.15b)$$

$$\xi = y \frac{U_\tau}{\nu} : \text{ordonnée adimensionnée} \quad (5.16b)$$

La loi générale de vitesse (5.17) dans la couche interne a pour expression :

$$\frac{U}{U_\tau} = \int_0^\xi \frac{2 du}{1 + \sqrt{1 + 4 K^2 u^2 a^2}} \quad (6.29a)$$

Le paramètre « a », qui provient de la viscosité turbulente, peut ici encore être exprimé au moyen du modèle de Van Driest (5.48):

$$a = l - \exp\left(\frac{-\xi}{A}\right) \quad (6.29b)$$

avec la même expression (5.49a) de A, dans laquelle on fait simplement $V_p^+ = 0$:

$$A = \frac{25}{1 + 30,2 (dp^* / dx)^+} \quad (6.29c)$$

le gradient de pression adimensionné conservant sa forme (5.49c) :

$$\left(\frac{d\bar{p}^*}{dx}\right)^+ = \frac{\mu}{\rho^{1/2} \tau_p^{3/2}} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \quad (6.29d)$$

- Dans la *sous-couche* visqueuse ($\xi \lesssim 3$) la loi (6.29a) se réduit à :

$$\frac{U}{U_\tau} = \xi \quad (6.30a)$$

- Dans la *zone logarithmique* (qui correspond approximativement ici à $\xi \gtrsim 25$ et $y/b < 0,2$) on retrouve la forme (5.26c), avec une constante expérimentale C légèrement supérieure :

$$\boxed{\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi + 5,5} \quad (6.30b)$$



On est en droit de se poser des questions sur l'approximation (6.28) qui est à la base du calcul précédent. En effet, le terme de pression qui a été négligé varie, en fonction de y , de zéro à environ 20% de τ_p (voir (6.33) plus loin). Mais, d'une part, la loi de vitesse (6.29) étant obtenue par intégration, l'influence du facteur négligé s'en trouve sensiblement atténuée. D'autre part, l'approximation est compensée par la présence du gradient de pression dans le terme correctif empirique de Van Driest. L'un dans l'autre, l'ensemble se révèle satisfaisant au regard des données expérimentales.

6.3.1.4. – LOI DE VITESSE DANS LA ZONE CENTRALE

Dans un écoulement établi entre deux plans parallèles distants de $2b$, tout se passe en fait comme si chaque couche limite avait une épaisseur imposée $\delta = cte = b$.

La loi de vitesse déficitaire de la plaque plane n'est donc plus adaptée à la situation. Cependant, les conditions aux limites propres à l'écoulement interne vont nous permettre ici, en appliquant le modèle pseudo-laminaire, de simplifier les calculs et d'aboutir à une expression analytique de la loi de vitesse.

Pour $v \ll v_t$ l'équation (6.27) se réduit à :

$$v_t \frac{dU}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} y + \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6.31a)$$

Lorsqu'on se trouve assez loin de la paroi, on peut admettre que la viscosité turbulente atteint une valeur asymptotique, et donc adopter comme sur la plaque plane l'hypothèse de Boussinesq (3.30) : $v_t = cte$. L'expérience montre en effet que v_t tend vers une limite quand $dU/dy \rightarrow 0$, ce qui est le cas au centre du conduit.

Le calcul a déjà été fait au paragraphe 5.2.4. ♦, et il reste valable à condition de remplacer dans (5.50b) et (5.50d) l'épaisseur de couche limite δ par b , et de prendre pour limite de la zone logarithmique une valeur légèrement inférieure :

$$y_l = 0,20 b \quad (6.31b)$$

ce qui donne :

$$v_t = 0,080 b U_\tau \quad (6.31c)$$

Étant donné que $d\bar{p}^*/dx$, v_t et τ_p sont indépendants de y , (6.31a) s'intègre immédiatement :

$$v_t U = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{y^2}{2} + \frac{\tau_p}{\rho} y + cte \quad (6.32)$$

En outre, à cette équation sont associées deux conditions à la limite sur le plan de symétrie :

♣ $y = b, dU/dy = 0$ (la couche limite est d'épaisseur b , voir début du paragraphe), soit :

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} b + \frac{\tau_p}{\rho}$$

ou encore :

$$\boxed{\tau_p = -b \frac{d\bar{p}^*}{dx}} \quad (6.33)$$

Ainsi, nous retrouvons entre le gradient de pression longitudinal et le frottement à la paroi la même relation simple (6.14d) qu'en régime laminaire. Cette propriété importante interviendra de nouveau dans le calcul des pertes de charge (§ 6.6).

◆ $y = b, U = U_m$ vitesse maximale dans la section.

On en tire, avec l'aide de (6.33), l'expression de la constante de (6.32) :

$$cte = v_t U_m - \frac{b}{2} \frac{\tau_p}{\rho}$$

Finalement, nous obtenons pour la loi de vitesse cherchée :

$$v_t U = \frac{\tau_p}{\rho} \left(y - \frac{y^2}{2b} \right) + v_t U_m - \frac{b}{2} \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6.34a)$$

On préfère ordinairement remplacer τ_p / ρ par U_τ^2 (5.15b) et présenter le résultat sous la forme d'une loi déficitaire en $U_m - U$ (cf. § 5.1.5.4) :

$$\frac{U_m - U}{U_\tau} = \frac{U_\tau}{v_t} \left(\frac{y^2}{2b} - y \right) + \frac{b U_\tau}{2 v_t} = \frac{b U_\tau}{2 v_t} \left(1 - \frac{y}{b} \right)^2 \quad (6.34b)$$

En substituant (6.31c) à v_t , nous obtenons l'expression définitive du profil de vitesse, qui se présente comme une simple loi parabolique :

$$\boxed{0,2 < \frac{y}{b} \leq 1 : \frac{U_m - U}{U_\tau} = 6,3 \left(1 - \frac{y}{b} \right)^2} \quad (6.35)$$

Mais bien que parabolique, cette loi déficitaire décrit un profil très plat, tout à fait différent de celui qu'on observe en laminaire (fig. 6.2). Ainsi, à l'ordonnée $y_l = 0,2 b$ la vitesse U vaut-elle déjà environ 85% de sa valeur maximale U_m .

6.3.1.5. – CALCUL DE U_m / U_τ

Il reste à effectuer le raccordement entre la loi parabolique (6.35) de la zone centrale et la loi logarithmique de paroi (6.30b), ce qui va permettre d'évaluer le rapport U_m / U_τ . Pour cela, écrivons (6.30b) sous la forme :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{y}{b} + 2,5 \operatorname{Ln} \frac{b U_\tau}{\nu} + 5,5 \quad (6.36)$$

Procédons au raccordement à l'ordonnée y_l où nous avons calculé v_t (cf. 6.31b, c), soit $y_l/b = 0,2$. On a en ce point, en posant $\xi_b = bU_\tau/v$:

- d'après (6.36) :

$$\frac{U_l}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} 0,2 + 2,5 \operatorname{Ln} \xi_b + 5,5 = 2,5 \operatorname{Ln} \xi_b + 1,5 \quad (6.37a)$$

- d'après (6.35) :

$$\frac{U_l}{U_\tau} = \frac{U_m}{U_\tau} - 6,3 (1 - 0,2)^2 = \frac{U_m}{U_\tau} - 4,1 \quad (6.37b)$$

et le rapprochement de ces deux relations donne :

$$\frac{U_m}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi_b + 5,6 \quad (6.37c)$$

6.3.1.6. – CALCUL DU DÉBIT

Dans les écoulements internes, il est fréquent que la donnée du problème soit le gradient de pression $d\bar{p}^*/dx$ (c'est-à-dire en pratique la différence de pression motrice entre les deux extrémités du conduit, rapportée à sa longueur). La question qui se pose est alors de calculer le débit de fluide correspondant.

D'après (6.1b), le débit-volume dans un canal de largeur l et de hauteur $2b$ a pour expression générale, compte tenu de la symétrie par rapport au plan $y = b$:

$$q_v = 2l \int_0^b U dy \quad (6.38a)$$

Dans cette expression, il y a deux lois de vitesses U à prendre en compte : la loi de paroi complète (6.29a) de $y = 0$ à y_l , et la loi parabolique (6.35) de y_l à b . Cependant, il est à noter que la loi logarithmique (6.30b) décrit la majeure partie de la couche interne à partir de $y_0 \simeq 0,01b$, et que son extrapolation jusqu'à y_l n'a qu'une faible incidence sur l'intégrale (6.38a). Nous écrirons donc avec (6.30b) et (6.35) :

$$q_v = 2lU_\tau \int_{y_0}^{y_l} \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{yU_\tau}{v} + 5,5 \right) dy + 2l \int_{y_l}^b \left\{ U_m - 6,3 U_\tau \left(1 - \frac{y}{b} \right)^2 \right\} dy \quad (6.38b)$$

et nous passerons ensuite à la limite $y_0 \rightarrow 0$.

Réécrivons (6.38b) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{q_v}{2l} = & 5,5 U_\tau (y_l - y_0) + U_m (b - y_l) \\ & + \underbrace{2,5 U_\tau \int_{y_0}^{y_l} \operatorname{Ln} \frac{yU_\tau}{v} dy}_{(A)} - \underbrace{6,3 U_\tau \int_{y_l}^b \left(1 - \frac{2y}{b} + \frac{y^2}{b^2} \right) dy}_{(B)} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Sachant que $\int \text{Ln } y \, dy = y \text{Ln } y - y$, le calcul de (A) donne :

$$\frac{A}{2,5 U_\tau} = (y_l - y_0) \text{Ln} \frac{U_\tau}{\nu} + (y_l \text{Ln } y_l - y_l) - (y_0 \text{Ln } y_0 - y_0)$$

et après passage à la limite $y_0 \rightarrow 0$:

$$A = 2,5 U_\tau \left(y_l \text{Ln} \frac{y_l U_\tau}{\nu} - y_l \right) \quad (6.40a)$$

En prenant $y_l = 0,2 b$ conformément à (6.31b), on obtient encore après regroupement :

$$A = 2,5 b U_\tau \left(0,2 \text{Ln} \frac{b U_\tau}{\nu} - 0,52 \right) \quad (6.40b)$$

Pour le terme (B) de (6.39), le calcul donne :

$$B = 6,3 U_\tau \left(b - y_l - \frac{b^2 - y_l^2}{b} + \frac{b^3 - y_l^3}{3b^2} \right)$$

soit, en remplaçant y_l par $0,2 b$:

$$B = 1,07 b U_\tau \quad (6.40c)$$

Reportons (A) et (B) dans (6.39), et faisons en outre $y_l = 0,2 b$ et $y_0 = 0$ dans les deux premiers termes. Il vient finalement, en tirant U_m de (6.37c) :

$$\boxed{q_v = 21 b U_\tau \left\{ 2,5 \text{Ln} \frac{b U_\tau}{\nu} + 3,21 \right\}} \quad (6.41a)$$

avec, d'après (6.33) :

$$U_\tau = \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^{1/2} = \left(- \frac{b}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \right)^{1/2} \quad (6.41b)$$

De q_v on extrait immédiatement si besoin est l'expression de la vitesse débitante :

$$V_d = q_v / S_0 = q_v / 21 b$$

6.3.2. – Écoulements en canalisations de section circulaire

6.3.2.1. – MODÉLISATION

Le passage d'une géométrie plane à une géométrie cylindrique ne change que très peu de choses aux caractéristiques de l'écoulement. Malgré tout, nous préférons reprendre le raisonnement dans le détail.

La transposition de (6.22) en coordonnées cylindriques avec symétrie par rapport à l'axe s'écrit :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \operatorname{div} \left\{ (v + v_t) \overrightarrow{\operatorname{grad} U} \right\} \quad (6.42a)$$

avec :

$$\operatorname{div} \left\{ (v + v_t) \overrightarrow{\operatorname{grad} U} \right\} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial r} \right] + r \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] \right\} \quad (6.42b)$$

Les conditions (6.5), (6.6), (6.23b) d'un *écoulement établi* :

$$\begin{cases} \partial U / \partial x = 0, & V = 0 \\ \partial v_t / \partial x = 0 \end{cases}$$

donnent pour l'équation aux dérivées partielles du mouvement :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \quad (6.43a)$$

Cette équation doit être vérifiée en tout point (x, r) ; il en résulte que :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = cte} \quad (6.43b)$$

A la place de (6.23a) nous avons donc maintenant comme équation à résoudre :

$$\frac{r}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} = \frac{d}{dr} \left\{ r(v + v_t) \frac{dU}{dr} \right\} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (6.44)$$

6.3.2.2. – EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA LOI DE VITESSE

Une première intégration de (6.44) donne :

$$r(v + v_t) \frac{dU}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{r^2}{2} + cte$$

L'égalité des deux membres pour $r = 0$ entraîne la nullité de la constante et l'on a donc :

$$(v + v_t) \frac{dU}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{r}{2} \quad (6.45)$$

!!! Avec les canalisations cylindriques, on est amené à utiliser un double système de coordonnées. En effet, la distance r à l'axe est malcommode pour examiner ce qui se passe au voisinage de la paroi. Posons donc, en désignant par R le rayon du tube :

$$y = R - r \quad (6.46)$$

Après ce changement de variable, l'équation (6.45) devient :

$$-(v + v_t) \frac{dU}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{R - y}{2} \quad (6.47)$$

A la paroi ($y = 0$ dorénavant), on sait que :

$$\left\{ (v + v_t) \frac{dU}{dy} \right\}_{y=0} = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6.48)$$

d'où la relation entre la contrainte τ_p à la paroi et le gradient longitudinal de pression (inchangée par rapport au régime laminaire, cf. 6.17e) :

$$\boxed{\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{d\bar{p}^*}{dx}} \quad (6.49)$$

Autrement dit, (6.47) s'écrit également :

$$(\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{y}{2} + \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6.50)$$

Cette équation est pratiquement identique à la relation (6.27) qui donnait la répartition de vitesse dans un canal rectangulaire. Il y aura donc peu de différences dans les solutions correspondant aux deux géométries.

6.3.2.3. – EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU PROFIL DE VITESSE

♣ Dans la couche interne, compte tenu de l'approximation $(y \frac{d\bar{p}^*}{dx}) \ll \tau_p$ (6.28), on pourra reprendre sans modification les résultats du § 6.3.1.3, en particulier la loi logarithmique (6.30b) :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi + 5,5 \quad (6.51)$$

◆ Pour la zone centrale, on tire de (6.50) et (6.49), en faisant $\nu \ll \nu_t$:

$$\nu_t \frac{dU}{dy} = \frac{\tau_p}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

L'hypothèse $\nu_t = cte$ sera bien entendu reconduite. Cependant, le calage expérimental montre que, en raison de la concavité de la paroi, il convient de prendre pour limite y_l de la zone logarithmique une valeur un peu plus faible que (6.31b), à savoir :

$$y_l = 0,17 R \quad (6.52a)$$

soit, avec (5.50b) :

$$\nu_t = 0,068 R U_\tau \quad (6.52b)$$

L'intégration de (6.51) est alors immédiate :

$$\nu_t U = \frac{\tau_p}{\rho} \left(y - \frac{y^2}{2R}\right) + cte$$

Sur l'axe, la vitesse est maximale : $y = R$, $U = U_m$, d'où l'on déduit la constante :

$$\nu_t U = \frac{\tau_p}{\rho} \left(y - \frac{y^2}{2R} - \frac{R}{2}\right) + \nu_t U_m$$

ou encore, en faisant apparaître la vitesse de frottement $U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$ et en présentant la loi sous forme déficitaire :

$$\frac{U_m - U}{U_\tau} = \frac{R U_\tau}{2 \nu_t} \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 \quad (6.53)$$

Enfin, on remplace v_t par (6.52b), ce qui donne l'expression finale de la loi de vitesse cherchée :

$$\boxed{0,17 \leq \frac{y}{R} \leq 1, \quad \frac{U_m - U}{U_\tau} = 7,35 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 = 7,35 \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad (6.54)$$

6.3.2.4. – CALCUL DE U_m / U_τ

Le raccordement des deux lois de vitesse (6.30b) et (6.54) effectué en $y = y_l$ va permettre de déterminer le rapport U_m / U_τ , sachant comme nous venons de l'indiquer que y_l vaut ici environ $0,17R$ (6.52a). On a donc :

$$\frac{U_l}{U_\tau} = \frac{U_m}{U_\tau} - 7,35 (1 - 0,17)^2 = 2,5 \operatorname{Ln}(0,17 \xi_R) + 5,5$$

avec $\xi_R = RU_\tau / \nu$; d'où l'on déduit :

$$\frac{U_m}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi_R + 6,15 \quad (6.55)$$

Une fois encore, nous ne devons pas oublier que cette expression est entièrement déterminée si $d\bar{p}^*/dx$ est donné, puisqu'alors $U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$ est connue par l'intermédiaire de la relation (6.49).

6.3.2.5. – CALCUL DU DÉBIT

D'après la définition (6.1b), le débit dans la canalisation s'écrit présentement :

$$q_v = \int_0^R U 2\pi r dr \quad (6.56a)$$

La loi de vitesse U se décompose en loi logarithmique de paroi (6.30b) de y_0 à y_l , et en loi parabolique (6.54) dans la zone centrale, de y_l à l'axe. Pour calculer l'intégrale, il sera plus commode d'opérer le changement de variable $r = R - y$ dans la zone de paroi :

$$\begin{aligned} q_v = 2\pi \int_0^{r_l} \left(U_m - 7,35 U_\tau \frac{r^2}{R^2} \right) r dr \\ + 2\pi U_\tau \int_{y_l}^{y_0} \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{y U_\tau}{\nu} + 5,5 \right) (R - y) (-dy) \end{aligned} \quad (6.56b)$$

Notons en abrégé :

$$q_v / 2\pi = A + B \quad (6.56c)$$

et calculons successivement A et B avec $y_l = 0,17R$ et $r_l = R - y_l = 0,83R$:

$$A = \frac{(0,83R)^2}{2} U_m - \frac{7,35 U_\tau}{R^2} \frac{(0,83R)^4}{4}$$

soit :

$$A = 0,345 R^2 U_m - 0,87 R^2 U_\tau \quad (6.57a)$$

Ensuite, pour les termes en logarithmes, on obtient en intégrant par parties :

$$\int_{y_l}^{y_0} \text{Ln } y \, dy = [y \text{Ln } y - y]_{y_l}^{y_0} \quad \text{et} \quad \int_{y_l}^{y_0} y \text{Ln } y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \text{Ln } y - \frac{y^2}{4} \right]_{y_l}^{y_0}$$

Nous avons alors pour B , après permutation des bornes y_0 et y_l :

$$\begin{aligned} \frac{B}{U_\tau} = 2,5 R \left[y \text{Ln} \frac{U_\tau}{y} + y \text{Ln } y - y \right]_{y_0}^{y_l} \\ - 2,5 \left[\frac{y^2}{2} \text{Ln} \frac{U_\tau}{v} + \frac{y^2}{2} \text{Ln } y - \frac{y^2}{4} \right]_{y_0}^{y_l} + 5,5 \left[R y - \frac{y^2}{2} \right]_{y_0}^{y_l} \end{aligned}$$

Comme y_0 est très petit, faisons-le tendre vers zéro. Il reste :

$$\begin{aligned} \frac{B}{U_\tau} = 2,5 R \left(y_l \text{Ln} \frac{U_\tau}{v} + y_l \text{Ln } y_l - y_l \right) \\ - 2,5 \left(\frac{y_l^2}{2} \text{Ln} \frac{U_\tau}{v} + \frac{y_l^2}{2} \text{Ln } y_l - \frac{y_l^2}{4} \right) + 5,5 \left(R y_l - \frac{y_l^2}{2} \right) \end{aligned}$$

soit enfin, en remplaçant y_l par $0,17 R$:

$$B = U_\tau \left(0,39 R^2 \text{Ln} \frac{R U_\tau}{v} - 0,24 R^2 \right) \quad (6.57b)$$

Reportons A et B dans (6.56c) pour avoir l'expression du débit :

$$q_v = 0,69 \pi R^2 U_m + \pi R^2 U_\tau \left(0,78 \text{Ln} \frac{R U_\tau}{v} - 2,22 \right)$$

et pour terminer remplaçons U_m par sa valeur en fonction de U_τ (6.55). On aboutit à l'expression définitive de q_v :

$$\boxed{q_v = \pi R^2 U_\tau \left(2,5 \text{Ln} \frac{R U_\tau}{v} + 2,04 \right)} \quad (6.58a)$$

avec, d'après (6.49) :

$$U_\tau = \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^{1/2} = \left(- \frac{R}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \right)^{1/2} \quad (6.58b)$$

Quant à la vitesse débitante, elle vaut à présent :

$$V_d = q_v / S = q_v / \pi R^2 \quad (6.58c)$$

6.3.3. – Écoulements annulaires

6.3.3.1. – BASES DU CALCUL

Les écoulements turbulents dans des conduits de section annulaire possèdent des caractéristiques générales analogues à celles des écoulements laminaires (§ 6.2.3) : dépendance de deux paramètres géométriques (les rayons R_1 et R_2 des parois), et contraintes de frottement différentes sur les deux parois.

♫ Par contre, le rayon r_m pour lequel $U = U_m$ (valeur maximale), qui n'avait qu'un intérêt marginal en laminaire, va jouer ici un rôle plus important.

Le point de départ élaboré pour l'écoulement établi en conduite cylindrique (§ 6.3.2.1) est intégralement conservé. On part donc directement de l'équation (6.44) :

$$\frac{r}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} = \frac{d}{dr} \left\{ r (v + v_t) \frac{dU}{dr} \right\} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (6.59a)$$

pour laquelle une première intégration conduit à :

$$r(v + v_t) \frac{dU}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{r^2}{2} + cte \quad (6.59b)$$

A partir de là, le calcul diverge du cas cylindrique, car nous n'avons plus de condition de symétrie sur l'axe pour déterminer la constante. A la place, nous utiliserons la propriété :

$$r = r_m ; \quad \frac{dU}{dr} = 0 \quad (6.60a)$$

qui entraîne :

$$cte = - \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \frac{r_m^2}{2}$$

d'où en reportant dans (6.59b) :

$$(v + v_t) \frac{dU}{dr} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right) \quad (6.60b)$$

Il nous faut maintenant prendre en compte les *conditions aux limites* sur les parois et la *viscosité turbulente*:

♣ *Paroi intérieure* : $r = R_1 ; v_t = 0$

La vitesse de frottement sur cette paroi est :

$$U_{\tau_1}^2 = \frac{\tau_{p1}}{\rho} = \nu \left(\frac{dU}{dr} \right)_{r=R_1} \quad (6.61a)$$

soit :

$$U_{\tau_1}^2 = \frac{1}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(R_1 - \frac{r_m^2}{R_1} \right) \quad (6.61b)$$

◆ *Paroi externe* : $r = R_2 ; v_t = 0$

On pose cette fois – ci :

$$y = R_2 - r \quad (6.62a)$$

et la vitesse de frottement est maintenant :

$$U_{\tau_2}^2 = \frac{\tau_{p_2}}{\rho} = \nu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = -\nu \left(\frac{dU}{dr} \right)_{r=R_2} \quad (6.62b)$$

soit :

$$U_{\tau_2}^2 = -\frac{l}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(R_2 - \frac{r_m^2}{R_2} \right) \quad (6.62c)$$

♥ *Viscosité turbulente* : on conserve l'hypothèse : $\nu_t = cte$ dans la zone centrale.

Quant aux épaisseurs des zones logarithmiques des deux parois, on admettra pour tenir compte de leur courbure (cf. 6.31 et 6.52) :

- vers la paroi convexe (rayon R_1 , y_l est ici remplacé par r_l) :

$$r_{l_1} = 0,21 (r_m - R_1) \quad (6.63a)$$

- vers la paroi concave (rayon R_2) :

$$y_{l_2} = 0,17 (R_2 - r_m) \quad (6.63b)$$

Si $\nu_t = cte$ entre r_{l_1} et y_{l_2} on a en particulier en se reportant à (5.50) :

$$\begin{aligned} \nu_t = \nu_{t_{l_1}} &= 0,4 U_{\tau_1} \times 0,21 (r_m - R_1) \\ &= \nu_{t_{l_2}} = 0,4 U_{\tau_2} \times 0,17 (R_2 - r_m) \end{aligned} \quad (6.63c)$$

De (6.61b) et (6.62c) on déduit une relation entre les deux vitesses de frottement :

$$\frac{U_{\tau_2}^2}{U_{\tau_1}^2} = -\frac{R_2^2 - r_m^2}{R_1^2 - r_m^2} \frac{R_1}{R_2} \quad (6.64a)$$

et (6.63c) nous en fournit une autre :

$$\frac{U_{\tau_2}}{U_{\tau_1}} = 1,235 \frac{r_m - R_1}{R_2 - r_m} \quad (6.64b)$$

d'où il vient, en regroupant les deux, une équation du 4ème degré dont l'inconnue r_m ne dépend que des rayons R_1 et R_2 :

$$(1,235)^2 (r_m - R_1)^2 (R_1^2 - r_m^2) R_2 + (R_2 - r_m)^2 (R_2^2 - r_m^2) R_1 = 0 \quad (6.65a)$$

Si l'on préfère les grandeurs sans dimension, on posera :

$$R^+ = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad r_m^+ = \frac{r_m}{R_1} \quad (6.65b)$$

de sorte que (6.65a) s'écrit encore :

$$1,525 (r_m^+ - 1)^2 (1 - r_m^{+2}) R^+ + (R^+ - r_m^+)^2 (R^{+2} - r_m^{+2}) = 0 \quad (6.66)$$

Cette équation doit être résolue numériquement en se fixant la valeur du facteur de forme R^+ .

6.3.3.2. – FROTTEMENT AUX PAROIS

C'est l'équation (6.60b) qui va permettre de calculer les contraintes de frottement aux parois. Rappelons-la tout d'abord :

$$(v + v_t) \frac{dU}{dr} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right)$$

♣ Sur la paroi convexe ($r = R_1$), la contrainte a pour valeur τ_{p_1} (cf 6.60b) :

$$\left\{ (v + v_t) \frac{dU}{dr} \right\}_{r=R_1} = \frac{\tau_{p_1}}{\rho} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(R_1 - \frac{r_m^2}{R_1} \right)$$

soit, en réutilisant R^+ et r_m^+ (6.65b) :

$$\boxed{\tau_{p_1} = \frac{R_1}{2} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(1 - r_m^{+2} \right)} \quad (6.67)$$

◆ Sur la paroi concave ($r = R_2, y = R_2 - r$), (6.60b) devient avec cette coordonnée y :

$$-(v + v_t) \frac{dU}{dy} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(R_2 - y - \frac{r_m^2}{R_2 - y} \right) \quad (6.68)$$

A la paroi, la contrainte est τ_{p_2} :

$$\left\{ (v + v_t) \frac{dU}{dy} \right\}_{y=0} = \frac{\tau_{p_2}}{\rho} = -\frac{1}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(R_2 - \frac{r_m^2}{R_2} \right)$$

ou encore :

$$\boxed{\tau_{p_2} = \frac{R_1}{2} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(R^+ - \frac{r_m^{+2}}{R^+} \right)} \quad (6.69)$$

Comme dans les cas précédents, le frottement est une fonction linéaire du gradient de pression. Par contre, sa dépendance vis-à-vis des paramètres géométriques est plus complexe.

6.3.3.3. – LOIS DE VITESSE

En raison de la dissymétrie entre les parois, on doit maintenant considérer trois zones dans l'écoulement.

♣ *Couche interne sur la paroi convexe*

L'ordonnée à prendre en compte est ici $r - R_1$. On pourra conserver la loi logarithmique (6.30b), comme dans le cas de la section circulaire. Elle s'écrira :

$$\frac{U}{U_{\tau_1}} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi_1 + 5,5 \quad \text{avec} \quad \xi_1 = (r - R_1) \frac{U_{\tau_1}}{\nu} \quad (6.70a)$$

◆ *Couche interne sur la paroi concave*

Il en va de même avec maintenant une distance à la paroi $y = R_2 - r$:

$$\frac{U}{U_{\tau_2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi_2 + 5,5 \quad \text{avec} \quad \xi_2 = y \frac{U_{\tau_2}}{\nu} \quad (6.70b)$$

♥ *Zone centrale*

Dans cette région, $\nu_t = cte$, $\nu \ll \nu_t$ et (6.60b) devient :

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{2\rho\nu_t} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right) \quad (6.71a)$$

d'où en intégrant :

$$U = \frac{1}{2\rho\nu_t} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left(\frac{r^2}{2} - r_m^2 \operatorname{Ln} r \right) + cte \quad (6.71b)$$

La constante est déterminée par la condition :

$$r = r_m \quad ; \quad U = U_m$$

Comme dans les cas précédents, nous écrivons le résultat sous la forme d'une loi de vitesse déficitaire par rapport au maximum U_m :

$$U_m - U = \frac{1}{2\rho\nu_t} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \left\{ r_m^2 \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Ln} r_m \right) - \frac{r^2}{2} + r_m^2 \operatorname{Ln} r \right\} \quad (6.72a)$$

On peut enfin adopter la forme adimensionnée de cette loi (telle que 6.54), mais il faut choisir cette fois de rapporter $U_m - U$ soit à U_{τ_1} soit à U_{τ_2} . Par exemple, dans la seconde option, U_{τ_2} est donnée par (6.62c), et la viscosité turbulente s'écrit d'après (6.63c) :

$$\nu_t = 0,068 U_{\tau_2} (R_2 - r_m) \quad (6.72b)$$

ce qui donne *in fine* :

$$\frac{U_m - U}{U_{\tau_2}} = -14,7 \frac{R_2}{(R_2 - r_m)^2 (R_2 + r_m)} \left\{ r_m^2 \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Ln} r_m \right) - \frac{r^2}{2} + r_m^2 \operatorname{Ln} r \right\} \quad (6.73)$$

Pour que cette relation soit utilisable, il faut bien entendu déterminer aussi le rapport U_m / U_{τ_2} , en écrivant d'après (6.70b) :

$$\frac{U_{l_2}}{U_{\tau_2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi_{l_2} + 5,5 \quad (6.74a)$$

avec (cf. 6.63b) :

$$\xi_{l_2} = y_{l_2} \frac{U_{\tau_2}}{\nu} = 0,17 (R_2 - r_m) \frac{U_{\tau_2}}{\nu} \quad (6.74b)$$

Le raccordement avec (6.73) en $r_{l_2} = R_2 - y_{l_2}$ donne alors U_m / U_{τ_2} .

🎵 Pour le calcul du débit, on intégrera les trois lois de vitesse précédentes, en prolongeant les lois logarithmiques jusqu'aux parois.



6.4. – ÉCOULEMENTS ÉTABLIS TURBULENTS EN PRÉSENCE DE PAROIS RUGUEUSES

6.4.1. – Bases de calcul

Les problèmes généraux soulevés par la présence d'irrégularités sur la paroi en contact avec le fluide ont été discutés au chapitre 5 (§ 5.2.6 et 5.3.5) pour les écoulements externes. Rappelons seulement que ces irrégularités engendrent de petites perturbations de la vitesse, qui sont résorbées quand l'écoulement est laminaire, et qui sont au contraire amplifiées en régime turbulent. Les écoulements internes ne font pas apparaître d'éléments nouveaux, et les particularités liées à la rugosité portent seulement sur deux points :

♣ Dans la zone de paroi

La présence des aspérités favorise le déclenchement de la turbulence, ce qui se traduit par un accroissement de l'échelle spatiale de turbulence à proximité de la paroi. Cette propriété a été exprimée par la relation (5.83) qui donne la longueur de mélange l :

$$l = K (y + \Delta y) \quad (\text{au lieu de } l = Ky) \quad (5.83)$$

Le raisonnement qui permet d'aboutir à la loi de vitesse (5.90c) reste le même ici, et la seule différence concerne la constante de la loi logarithmique, qui passe pour les écoulements internes de 5 à 5,5 (conformément à 6.30b). Dans la région où l'on a $v \ll v_t$, la relation (5.90c) est donc remplacée par :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \ln \xi + 5,5 - 2,5 \ln \frac{\xi \varepsilon}{3,1} = 2,5 \ln \frac{y}{\varepsilon} + 8,34 \quad (6.75a)$$

où :

$$\xi_\varepsilon = \varepsilon \frac{U_\tau}{v} \quad (6.75b)$$

ε étant la rugosité de la paroi, c'est-à-dire la hauteur moyenne des aspérités.

Dans le cadre théorique adopté au paragraphe (5.3.5), la correction apportée à la loi de vitesse des écoulements externes par rapport au modèle de la plaque plane peut s'interpréter comme une légère diminution du paramètre $\Delta\xi = \Delta y U_\tau / \nu$, qui exprime une sensibilité un peu plus faible du champ de vitesse vis-à-vis de la rugosité ; l'identification de (6.75a) et de (5.88) donne en effet $\Delta\xi = 0,036 \xi_\varepsilon$ au lieu de $\Delta\xi = 0,043 \xi_\varepsilon$ dans (5.89).

◆ *Dans la zone centrale*

Sauf avec des rugosités très élevées, l'influence de Δy sur la longueur de mélange – et donc sur la viscosité turbulente – est presque totalement estompée lorsqu'on arrive à l'extrémité de la zone logarithmique ($y_l \simeq 0,2 \delta$). Dans la partie centrale de l'écoulement, ν_t n'est donc guère affectée par la rugosité, et il doit en être de même pour la loi de vitesse déficitaire. L'expérience montre effectivement que les expressions obtenues dans le cas de parois lisses restent valables. Par la suite, nous conserverons donc en particulier les relations (6.35 – canalisation rectangulaire) et (6.54 – canalisation circulaire).

6.4.2. – Débit dans une canalisation de section rectangulaire plate

Le calcul du débit-volume de fluide q_v dans la canalisation exige la détermination préalable de U_m / U_τ , par le raccordement de la loi logarithmique et de la loi parabolique. Compte tenu du précédent paragraphe, le raccordement sera effectué à la même ordonnée que pour la paroi lisse, soit $y_l = 0,2b$.

De (6.75a) et (6.35) on tire donc :

$$\frac{U_l}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{0,2b}{\varepsilon} + 8,34 = \frac{U_m}{U_\tau} - 4,1$$

d'où :

$$\frac{U_m}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{b}{\varepsilon} + 8,42 \quad (6.76)$$

Le calcul proprement dit de q_v n'est guère différent de celui du paragraphe 6.3.1.6. Outre le changement apporté à U_m , le remplacement de (6.30b) par (6.75a) n'a pour effet que de modifier l'expression A de (6.39) qui est maintenant :

$$\begin{aligned} A' &= 2,5 U_\tau \int_{y_0}^{y_l} \left(\operatorname{Ln} \frac{y U_\tau}{\nu} - \operatorname{Ln} \frac{\xi_\varepsilon}{3,1} \right) dy \\ &= A - 2,5 U_\tau (y_l - y_0) \operatorname{Ln} \frac{\xi_\varepsilon}{3,1} \end{aligned} \quad (6.77a)$$

soit, avec $y_l = 0,2b$ et $y_0 \rightarrow 0$:

$$A' = A + 2,5 b U_\tau \left(0,226 - 0,2 \operatorname{Ln} \frac{\varepsilon U_\tau}{\nu} \right) \quad (6.77b)$$

Il vient en remplaçant A par A' dans (6.39) :

$$\begin{aligned} q_v / 2l &= 5,5 U_\tau \times 0,2b + U_m \times 0,8b \\ &\quad + A + 2,5 b U_\tau \left(0,226 - 0,2 \operatorname{Ln} \frac{\varepsilon U_\tau}{\nu} \right) - B \end{aligned}$$

où A et B sont donnés respectivement par (6.40b) et (6.40c).

On obtient finalement :

$$\boxed{q_v = 2lb U_\tau \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{b}{\varepsilon} + 6,04 \right)} \quad (6.78)$$

et pour la vitesse débitante : $V_d = q_v / 2lb$. La vitesse de frottement U_τ est toujours donnée par (6.41b).

6.4.3. – Débit dans une canalisation de section circulaire

Le rapport U_m / U_τ sera encore déterminé en raccordant la nouvelle loi logarithmique de paroi (6.75a) avec la loi déficitaire (6.54), le raccordement étant opéré à la même ordonnée y_l que dans le cas d'une paroi lisse, c'est-à-dire ici $y_l = 0,17R$. On obtient ainsi :

$$\frac{U_l}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{0,17R}{\varepsilon} + 8,34 = \frac{U_m}{U_\tau} - (1 - 0,17)^2$$

soit :

$$\frac{U_m}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{R}{\varepsilon} + 9 \quad (6.79)$$

Pour le calcul du débit, revenons à (6.56b et c), qui correspondent à la paroi lisse. L'expression A conserve la même forme (6.57a), cependant que B est remplacé par :

$$B' = U_\tau \int_{y_l}^{y_0} \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{yU_\tau}{\nu} + 5,5 - 2,5 \operatorname{Ln} \frac{\xi\varepsilon}{3,1} \right) (R - y) (-dy)$$

c'est-à-dire :

$$B' = B + U_\tau \int_{y_l}^{y_0} 2,5 \left(\operatorname{Ln} \frac{\xi\varepsilon}{3,1} \right) (R - y) dy$$

où B est donné par (6.57b).

En faisant $y_0 = 0$ il vient :

$$B' = B - 2,5 U_\tau (\operatorname{Ln} \xi\varepsilon - \operatorname{Ln} 3,1) \left(0,17 R^2 - \frac{(0,17)^2}{2} R^2 \right)$$

soit :

$$B' = B - 0,39 R^2 U_\tau \operatorname{Ln} \frac{\varepsilon U_\tau}{\nu} + 0,44 R^2 U_\tau \quad (6.80)$$

On a donc maintenant pour le débit :

$$\frac{q_v}{2\pi} = A + B'$$

c'est-à-dire, compte tenu de (6.57a et b), après regroupement :

$$\frac{q_v}{2\pi} = 0,345 R^2 U_m + 0,39 R^2 U_\tau \operatorname{Ln} \frac{R}{\varepsilon} - 0,67 R^2 U_\tau$$

Dans cette expression, U_m doit être remplacée par (6.79) et l'on a enfin :

$$q_v = \pi R^2 U_\tau \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{R}{\varepsilon} + 4,87 \right) \quad (6.81)$$

ou encore : $V_d = q_v / \pi R^2$ pour la vitesse débitante. La vitesse de frottement U_τ est ici donnée par (6.58b).

6.4.4. – Interprétation et utilisation des résultats

Il est essentiel maintenant de préciser les conditions de validité des formules donnant le débit q_v sur parois lisses et sur parois rugueuses, et aussi de comparer les résultats obtenus, car un examen superficiel de ces formules pourrait laisser penser qu'il existe entre elles une discontinuité. Pour cela, réécrivons-les d'abord ensemble.

! Section rectangulaire plate $l \times 2b$

$$\text{- paroi lisse : } q_v = 2lbU_\tau \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{bU_\tau}{\nu} + 3,21 \right) \quad (6.41a)$$

$$\text{- paroi rugueuse : } q_v = 2lbU_\tau \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{b}{\varepsilon} + 6,04 \right) \quad (6.78)$$

!! Section circulaire de rayon R

$$\text{- paroi lisse : } q_v = \pi R^2 U_\tau \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{RU_\tau}{\nu} + 2,04 \right) \quad (6.58a)$$

$$\text{- paroi rugueuse : } q_v = \pi R^2 U_\tau \left(2,5 \operatorname{Ln} \frac{R}{\varepsilon} + 4,87 \right) \quad (6.81)$$

☞ Profitons de ce regroupement pour signaler au passage un point de terminologie : on appelle « rugosité relative » de la paroi le rapport ε/b ou ε/R présent dans (6.78) et (6.81) (respectivement $\varepsilon/2b$ et $\varepsilon/2R$ pour certains auteurs).

Nous avons observé à la fin du § 5.3.5.1 (ch. 5) que pour $\xi_\varepsilon \leq 3,1$ on retrouve la loi de paroi lisse. Logiquement, on doit aboutir à la même conclusion en ce qui concerne le débit, d'autant que la loi déficitaire dans la zone centrale n'est pas sensiblement influencée par la rugosité. C'est bien le cas en effet, puisque q_v s'écrit :

- avec la section rectangulaire :

$$\begin{aligned} \frac{q_{v \text{ rugueux}} - q_{v \text{ lisse}}}{2lbU_\tau} &= 2,5 \operatorname{Ln} \frac{bU_\tau}{\nu} \frac{\nu}{\varepsilon U_\tau} - 2,5 \operatorname{Ln} \frac{bU_\tau}{\nu} + 2,83 \\ &= -2,5 \operatorname{Ln} \frac{\varepsilon U_\tau}{\nu} + 2,83 \end{aligned}$$

- avec la section circulaire :

$$\begin{aligned} \frac{q_{v \text{ rugueux}} - q_{v \text{ lisse}}}{\pi R^2 U_\tau} &= 2,5 \operatorname{Ln} \frac{RU_\tau}{\nu} \frac{\nu}{\varepsilon U_\tau} - 2,5 \operatorname{Ln} \frac{RU_\tau}{\nu} + 2,83 \\ &= -2,5 \operatorname{Ln} \frac{\varepsilon U_\tau}{\nu} + 2,83 \end{aligned}$$

Puisque $2,5 \ln 3,1 = 2,83$, on voit immédiatement que dans les deux cas :

$$\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon U_\tau}{\nu} = 3,1 \Rightarrow q_{v \text{ rugueux}} = q_{v \text{ lisse}} \quad (6.82)$$

Il n'y a donc aucune discontinuité entre les deux expressions de q_v , et le passage de l'une à l'autre se fait selon que l'on a $\xi_\varepsilon > 3,1$ ou $\leq 3,1$.

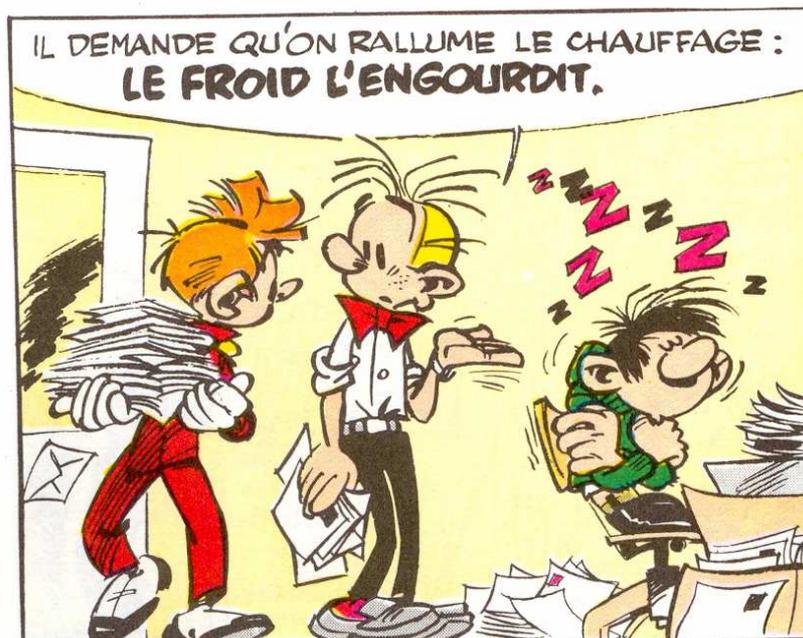


En conclusion, et en se référant à (6.41b) et (6.58b) pour les expressions de U_τ , les calculs de débit devront en pratique être effectués de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{section rectangulaire} \\ \xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\nu} \left(-\frac{b}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \right)^{1/2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \xi_\varepsilon \leq 3,1 : \text{ formule "paroi lisse"} \\ \quad (6.41a) \text{ ou } (6.58a) \\ \\ \text{si } \xi_\varepsilon > 3,1 : \text{ formule "paroi rugueuse"} \\ \quad (6.78) \text{ ou } (6.81) \end{array} \right. \quad (6.83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{section circulaire} \\ \xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\nu} \left(-\frac{R}{2\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \right)^{1/2} \end{array} \right\}$$

La méthode adoptée pour aboutir à ces résultats peut évidemment s'élargir à d'autres géométries, la section annulaire par exemple. Mais là encore, la distinction entre « paroi lisse » et « paroi rugueuse » devra reposer sur le paramètre ξ_ε , et non sur le nombre de Reynolds qui ne constitue pas un critère suffisant de transition entre régime hydrauliquement lisse et régime hydrauliquement rugueux.



6.5. – APPLICATION DE LA MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE AUX ÉCOULEMENTS NON ÉTABLIS

6.5.1. – Importance pratique des écoulements non établis

Les écoulements établis, qui ont fait l'objet des paragraphes précédents, ne sont en fait que des cas particuliers dans les écoulements internes, et nous avons vu qu'ils sont tributaires de conditions très strictes : conduites rectilignes longues et de section constante. Celles-ci sont à peu près réunies dans certains grands réseaux de distribution. Par contre, dans les autres réseaux, dans beaucoup d'installations domestiques et plus encore dans des appareils comme les échangeurs, la fréquence des singularités (changements de section ou de direction, dérivations et confluent) peut être à l'origine d'écoulements où les zones non établies occupent une place significative sinon majoritaire.

Dans ces régions d'écoulement non établi, dont une description sommaire a été donnée au début du chapitre (§ 6.1.2), le profil de vitesse se modifie le long de la conduite, la présence d'une singularité se faisant sentir sur une certaine distance en aval de celle-ci, mais aussi parfois en amont (par exemple avec une réduction brusque de section). En particulier, on observe souvent des « zones de recirculation » où les particules fluides ne participent pas à l'écoulement général, mais suivent des trajectoires refermées sur elles-mêmes.

Lorsqu'on se limite au calcul de l'énergie mécanique dissipée dans l'écoulement, que nous appellerons un peu plus loin « perte de charge », il est possible de globaliser les phénomènes avec un degré de précision acceptable. Mais il n'en est plus de même si l'on veut par exemple se prémunir contre l'encrassement des échangeurs, ou aborder le calcul du transfert de chaleur entre le fluide et la paroi. Une connaissance plus détaillée de la structure de l'écoulement est alors indispensable.

6.5.2. - Modélisation

Monsieur de la Palisse dirait que dans un écoulement non établi, les conditions de l'écoulement établi (6.5, 6.6, 6.7) ne sont plus réalisées. En conséquence on a, sauf peut-être localement :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0 ; \quad V \neq 0 ; \quad \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} \neq cte \quad (6.84a)$$

Cependant, si l'on excepte des zones assez restreintes au voisinage immédiat de certaines singularités, la présence des parois a pour effet d'imposer des conditions très voisines de celles que l'on rencontre dans une couche limite externe, à savoir :

$$V \ll U ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} ; \quad \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y} \cong 0 \quad (6.84b)$$

Autrement dit, l'écoulement sera encore convenablement décrit par les équations classiques de la couche limite : (4.12) en laminaire ou (5.6) en turbulent.

Si la singularité est suivie d'une canalisation rectiligne et de section constante suffisamment longue, l'écoulement deviendra établi au-delà d'une distance appelée *longueur d'établissement du régime dynamique*. Cette longueur varie de manière assez nette selon la nature de la singularité et le régime d'écoulement, et dans le cadre de cet ouvrage, on ne peut guère en donner que des ordres de grandeur (§ 6.1.2 et ch. 7).

6.5.3. - Écoulements non établis dans les conduits rectangulaires plats de section constante

6.5.3.1. - MISE EN ÉQUATION

Considérons tout d'abord le cas d'un conduit rectiligne plat (c'est-à-dire dont la hauteur est faible par rapport à la largeur), à plan de symétrie, de hauteur constante égale à $2b$. L'équation générale à résoudre est la relation :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.6b)$$

écrite ici dans le cas turbulent. En laminaire, il suffit de faire $\nu_t = 0$ et $\bar{p}^* = p^*$.

La version généralisée de la méthode différentielle détaillée au chapitre 5 (§ 5.2) s'applique au cas présent, les seules différences concernant la définition des grandeurs η et $F(\eta, x)$, l'expression du terme $\partial \bar{p}^* / \partial x$, et bien entendu les conditions aux limites.

Puisque les couches limites se trouvent confinées par la proximité des parois, la notion d'épaisseur de couche limite $\delta(x)$ n'est plus vraiment significative. Par contre, la structure de l'écoulement est conditionnée par l'épaisseur $2b$ du canal. En remplacement du paramètre $\beta(x)$ utilisé dans les écoulements externes, la longueur de référence qui s'impose naturellement compte tenu de la géométrie est donc b , et l'on posera :

$$\boxed{\eta = \frac{y}{b}}, \quad \text{d'où : } \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (6.85a)$$

En ce qui concerne la vitesse de référence, on prendra la vitesse U_m au centre du conduit, qui est en général la vitesse maximale :

$$U_m = U(y = b) \quad (6.85b)$$

d'où la définition de la fonction F' :

$$\frac{U}{U_m} = F'(\eta, x) \quad (6.85c)$$

le symbole « ' » désignant toujours la dérivation par rapport à η .

Pour établir l'équation différentielle en F de l'écoulement, il est commode de réutiliser certains calculs déjà effectués au paragraphe 5.2.2, en remplaçant $\beta(x)$ par b et U_∞ par U_m . Ainsi :

$$(5.37) \Rightarrow V = -bF \frac{dU_m}{dx} - bU_m \frac{\partial F}{\partial x} \quad (6.86a)$$

$$(5.38) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = F' \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{\partial F'}{\partial x} \quad (6.86b)$$

$$(5.39) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_m}{b} F'' \quad (6.86c)$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} &= \frac{\nu}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) U_m \frac{F''}{b} \right] \\ &= \frac{\nu U_m}{b^2} \left[\left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) F'' \right] \end{aligned} \quad (6.86d)$$

Quant au gradient de pression $\partial \bar{p}^* / \partial x$, nous pouvons le relier à la vitesse centrale U_m : à la paroi, où $v_t \rightarrow 0$, l'équation (5.6b) se réduit à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} \quad (6.87a)$$

soit, avec (6.86c) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = \frac{U_m}{b^2} F'''(0, x) \quad (6.87b)$$

Reportons les expressions précédentes dans (5.6b). En multipliant par $b^2 / \nu U_m$ pour avoir des termes sans dimension, et en opérant quelques regroupements, on aboutit à la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{v_t}{\nu} \right) F'' \right] - F'''(0, x) + \frac{b^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} (-F'^2 + F F'') \\ = \frac{b^2}{\nu} U_m \left(F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.88)$$

Nous constatons ici la présence de U_m et de dU_m/dx . Ce sont évidemment des grandeurs inconnues, mais qui pourront être exprimées en fonction des conditions aux limites, ce qui se traduira par l'équation définitive (5.94).

6.5.3.2. - CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites vont concerner la paroi, le plan de symétrie et, la plupart du temps, une section amont S_1 et une section aval S_2 à l'infini (ou éventuellement S_1 à l'infini amont et S_2 donnée en aval).

♣ Sur le plan de symétrie : $\eta = l$

- La vitesse U est égale à U_m :

$$F'(l, x) = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial F'(l, x)}{\partial x} = 0 \quad (6.89a)$$

- Le gradient transversal de vitesse est nul : $\partial U / \partial y = 0$

$$F''(l, x) = 0 \quad (6.89b)$$

- La composante V est nulle, soit d'après (6.86a) :

$$F(l, x) \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{\partial F(l, x)}{\partial x} = 0 \quad (6.89c)$$

$$U_m F(l, x) = cte = K_l \quad (6.89d)$$

◆ A la paroi : $\eta = 0$

- $U = 0$, soit :

$$F'(0, x) = 0 \quad (6.90a)$$

• $V = 0$, d'où :

$$F(0, x) \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{\partial F(0, x)}{\partial x} = 0 \quad (6.90b)$$

$$U_m F(0, x) = cte = K_0 \quad (6.90c)$$

♥ A l'infini, l'écoulement est établi :

$$F'(\eta, \infty) = \frac{U(\eta, \infty)}{U_m(\infty)} \quad (6.91)$$

Les vitesses $U(\eta, \infty)$ et U_m sont connues, soit par (6.13) en laminaire, soit par (6.30) et (6.35) en turbulent.

♠ Sur la section S_I (par exemple entrée de la canalisation : $x = 0$)

Il faut se donner $U(\eta, 0)$ et $V(\eta, 0)$, c'est-à-dire d'après (6.85c) et (5.87a) :

$$\left. \begin{array}{l} F(\eta, 0) \quad \text{et} \quad U_m(0) \\ \frac{\partial F(\eta, 0)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_{x=0} \end{array} \right\} \text{données} \quad (6.92a)$$

On admet souvent $V = 0$ sur toute la section pour $x = 0$ (ce qui est loin d'être toujours vérifié). Alors, dans ce cas particulier :

$$\frac{\partial}{\partial x} \{U_m(0) F(\eta, 0)\} = 0 \quad (6.92b)$$

6.5.3.3. - EXPRESSION DÉFINITIVE DE L'ÉQUATION EN F

Dans notre équation (6.88), la présence des termes U_m et dU_m/dx est dérangeante. Cependant, si nous nous reportons aux conditions limites, nous constatons que d'après (6.92a) $F(1, 0)$ et $U_m(0)$ sont connues, ce qui donne la constante K_I par (6.74d). De cette même relation on tire alors :

$$U_m(x) = \frac{K_I}{F(1, x)} \quad (6.93a)$$

$$\frac{dU_m}{dx} = - \frac{K_I}{F^2(1, x)} \frac{\partial F(1, x)}{\partial x} \quad (6.93b)$$

La formulation pratique de (6.88) est donc finalement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{v_t}{\nu} \right) F'' \right] - F'''(0, x) + \frac{b^2}{\nu} \frac{K_I}{F^2(1, x)} \frac{\partial F(1, x)}{\partial x} (F'^2 - F F'')} \quad (6.94)$$

$$= \frac{b^2}{\nu} \frac{K_I}{F(1, x)} \left(F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

Cette équation est sans doute un peu plus lourde que la relation correspondante (5.43) pour les écoulements externes, mais la méthode conserve l'avantage d'avoir à résoudre une seule équation en F à la place d'un système couplé de deux équations à deux inconnues.

6.5.4. - Écoulements non établis en canalisations de section circulaire constante

6.5.4.1. - MODÉLISATION

Vu les conditions adoptées pour l'écoulement non établi (§ 6.5.2), la transposition en géométrie cylindrique de l'équation (5.6b) s'écrit :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (v + v_t) r \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \quad (6.95)$$

Nous adopterons ici comme ordonnée adimensionnelle le paramètre :

$$\eta = \frac{r}{R} = \eta(r) \quad (6.96)$$

avec l'origine $\eta = 0$ prise maintenant sur l'axe.

La fonction de courant correspondant à cette géométrie a déjà été exprimée en (5.139b) à propos du jet rond noyé, et elle s'écrit en faisant ici $\beta(x) = R$:

$$\Psi = U_m R^2 F(\eta) \quad (6.97a)$$

avec :

$$U = U(\eta, x) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (6.97b)$$

$$V = V(\eta, x) = - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.97c)$$

Alors le champ de vitesse est décrit par l'expression (5.141) :

$$\frac{U}{U_m} = \frac{1}{\eta} F'(\eta, x) \quad (6.98)$$

On en tire les diverses dérivées $\partial U / \partial x$, ... puis la valeur de V :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{F'}{\eta} \frac{dU_m}{dx} + \frac{U_m}{\eta} \frac{\partial F'}{\partial x} \quad (6.99a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U_m}{\eta} \frac{F''}{R} - \frac{U_m}{\eta^2} \frac{F'}{R} \quad (6.99b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (v + v_t) r \frac{\partial U}{\partial r} \right\} &= \frac{1}{\eta R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ (v + v_t) R \eta \left(\frac{U_m}{\eta} \frac{F''}{R} - \frac{U_m}{\eta^2} \frac{F'}{R} \right) \right\} \frac{1}{R} \\ &= \frac{v U_m}{R^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.99c)$$

$$V = - \frac{R}{\eta} \frac{\partial}{\partial x} (U_m F) = - \frac{R}{\eta} \left(U_m \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{dU_m}{dx} \right) \quad (6.99d)$$

Quant au gradient de pression il est obtenu, comme pour le conduit rectangulaire, en se plaçant sur l'axe (cf 6.87), c'est-à-dire ici en faisant $r = 0$ dans (6.95) avec $V(0) = 0$ en raison de la symétrie :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = U_m \frac{dU_m}{dx} - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(v + v_t) r \frac{\partial U}{\partial r} \right] \right\}_{r=0} \quad (6.100a)$$

soit, en faisant intervenir η et F :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = U_m \frac{dU_m}{dx} - \frac{\nu U_m}{R^2} \left\{ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{v_t}{\nu} \right) \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right) \right] \right\}_{\eta=0}$$

Dans la partie centrale de l'écoulement, nous admettons toujours $v_t = cte$ si le régime est turbulent. On obtient alors :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = U_m \frac{dU_m}{dx} - \frac{\nu U_m}{R^2} \left(1 + \frac{v_t}{\nu} \right) \left(\frac{F'''}{\eta} - \frac{F''}{\eta^2} + \frac{F'}{\eta^3} \right)_{\eta=0} \quad (6.100b)$$

Reportons toutes ces expressions dans (6.95). En multipliant par $R^2 / \nu U_m$, et après regroupement des termes, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\nu}{v_t} \right) \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right) \right] - \left(1 + \frac{\nu}{v_t} \right) \left(\frac{F'''}{\eta} - \frac{F''}{\eta^2} + \frac{F'}{\eta^3} \right)_{\eta=0} \\ & + \frac{R^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} \left(1 - \frac{F'^2}{\eta^2} - \frac{F F''}{\eta^2} + \frac{F F'}{\eta^3} \right) = \frac{U_m R^2}{\nu} \left(\frac{F'}{\eta^2} \frac{\partial F'}{\partial x} - \frac{F''}{\eta^2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{F'}{\eta^3} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.101)$$

Quelques simplifications vont lui être apportées avec la prise en compte des conditions aux limites.

6.5.4.2. - CONDITIONS AUX LIMITES

♣ Sur l'axe : $\eta = 0$

- La vitesse U est la vitesse maximale U_m et, avec (6.98), on a $F' = \eta U / U_m$, d'où :

$$F'(0, x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F'(0, x)}{\partial x} = 0 \quad (6.102a)$$

- Le gradient $\partial U / \partial r$ est nul, soit d'après (6.99b) :

$$\left(\frac{F''}{\eta} \right)_{\eta=0} = \left(\frac{F'}{\eta^2} \right)_{\eta=0} \quad (6.102b)$$

- La composante transversale de la vitesse est nulle, et (6.99d) donne si $V \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_m F) \approx \eta^2 \quad \text{soit} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (U_m F) \right\}_{\eta=0} = 0 \quad (6.102c)$$

c'est-à-dire :

$$U_m F(0, x) = cte = K_0 \quad (6.102d)$$

◆ A la paroi : $\eta = 1$

- La condition d'adhérence et (6.98) donnent :

$$F'(1, x) = 0 \quad (6.103a)$$

- La paroi est imperméable, i.e. $V = 0$, d'où avec (6.99d) :

$$U_m F(1, x) = cte = K_1 \quad (6.103b)$$

♥ A l'infini selon x , on suppose l'écoulement établi

$$F'(\eta, \infty) = \eta \frac{U(\eta, \infty)}{U_m(\infty)} \quad (6.104)$$

où U et U_m peuvent être déterminées en fonction des caractéristiques de l'écoulement, à partir de (6.16) en laminaire, ou de (6.51) et (6.54) en turbulent.

♠ En $x = 0$

• On suppose connues les distributions $U(\eta, 0)$ et $V(\eta, 0)$, c'est-à-dire, d'après (6.98) et (6.99d) :

$$\left. \begin{array}{l} F(\eta, 0) \quad \text{et} \quad U_m(0) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(\eta, 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dU_m}{dx} \right)_{x=0} \end{array} \right\} \text{données} \quad (6.105a)$$

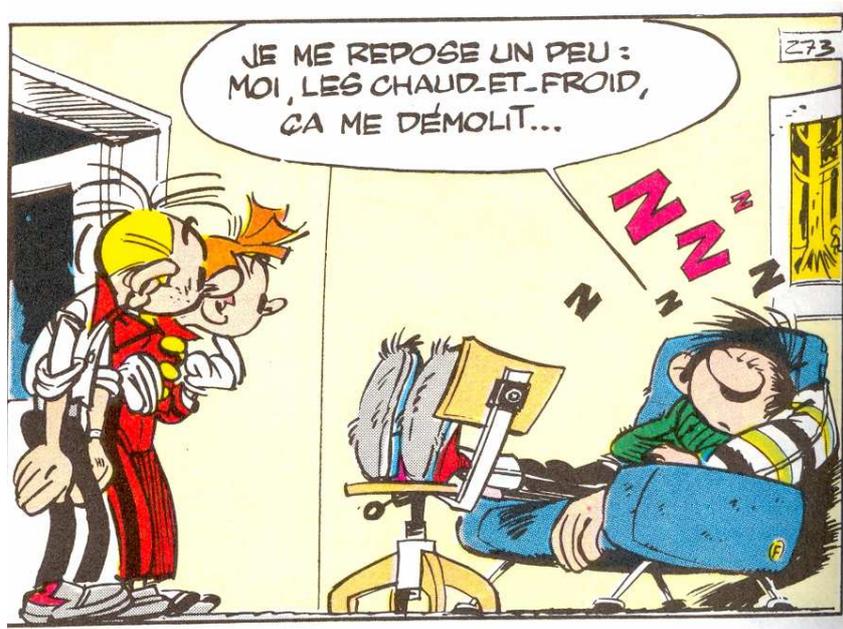
• Si l'on admet $V = 0$ sur la section $x = 0$, on aura de surcroît :

$$\frac{\partial}{\partial x} \{U_m(0) F(\eta, 0)\} = 0 \quad (6.105b)$$

6.5.4.3. - ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'ÉCOULEMENT

La condition à la limite (6.102d) ou (6.103b) permet d'exprimer U_m et dU_m/dx en fonction de F . Si l'on prend également en compte (6.102b), l'équation (6.86) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{v}{v_t} \right) \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right) \right] - \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \left(\frac{F'''}{\eta} \right)_{\eta=0} \\ & - \frac{R^2}{v} \frac{K_0}{F^2(0,x)} \frac{\partial F(0,x)}{\partial x} \left(1 - \frac{F'^2}{\eta^2} - \frac{F F''}{\eta^2} + \frac{F F'}{\eta^3} \right) \\ & = \frac{R^2}{v} \frac{K_0}{F(0,x)} \left(\frac{F'}{\eta^2} \frac{\partial F'}{\partial x} - \frac{F''}{\eta^2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{F'}{\eta^3} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.106)$$



6.6. – DISSIPATION D'ÉNERGIE DANS LES ÉCOULEMENTS ÉTABLIS. PERTES DE CHARGE

Dans les paragraphes 6.2 à 6.4, nous avons supposé que la différence de pression motrice entre deux sections d'une canalisation était donnée, et nous avons cherché quel était le débit correspondant à cette condition lorsque l'écoulement est supposé établi.

C'est le problème inverse qui va être abordé maintenant, mais sous une forme plus générale : Quelles conditions aux limites faut-il imposer pour obtenir un débit q_v donné ? Dans la réponse interviendront les notions de charge hydraulique, de perte de charge et le coefficient de frottement C_f .

Plutôt que de définir d'emblée la charge dans le cas le plus général, nous procéderons par étapes, en commençant par les écoulements établis, laminaires puis turbulents. La généralisation se fera ensuite, avec les écoulements non établis.

6.6.1. – Écoulements laminaires

6.6.1.1. – BILAN D'ÉNERGIE MÉCANIQUE

♣ Notre propos est à présent d'exprimer un bilan d'énergie mécanique sur une canalisation de longueur finie, c'est-à-dire un bilan intégral. Nous partirons donc de la formule de Cotton-Fortier (1.45a) écrite pour un écoulement permanent de fluide isochore ($\partial/\partial t = 0$, $\text{div}\vec{V} = 0$) :

$$\int_S \left(p + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_S V_i \tau_{ij} n_j dS - \int_D \Phi d\tau \quad (6.107)$$

(Sans vouloir insister, rappelons que les τ_{ij} sont les contraintes visqueuses et que Φ est la fonction de dissipation (1.42)).

Le domaine D considéré est ici l'espace intérieur d'une canalisation rectiligne, limité par deux sections droites S_1 et S_2 dont la forme est *a priori* quelconque (fig. 6.6). La direction x est celle de l'écoulement. La surface S de D est constituée par les sections S_1 et S_2 ainsi que par la surface latérale Σ . Cette dernière est une paroi imperméable fixe sur laquelle on a par conséquent $\vec{V} = 0$, d'où $V_i \tau_{ij} = 0$. L'équation (6.107) se réduit donc à :

$$\int_{S_1 + S_2} \left(p^* + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1 + S_2} V_i \tau_{ij} n_j dS - \int_D \Phi d\tau \quad (6.108)$$

avec $p^* = p + \rho g z =$ pression motrice.

Nous ne considérons dans ce paragraphe que les écoulements laminaires ; les grandeurs qui figurent dans l'équation précédente sont donc indépendantes du temps.

◆ L'hypothèse d'un écoulement établi entraîne les conséquences suivantes (§ 6.1.3) :

a) la canalisation doit avoir une section constante : $S_1 = S_2 = S_0$;

b) la composante V est nulle, d'où $\vec{V}^2 = U^2$;

- c) $p^* = cte$ sur une section droite ;
d) le gradient longitudinal de vitesse est nul : $\partial U / \partial x = 0$;
e) la conjonction des propriétés b) et d) se traduit sur S_1 et S_2 par $V_i \tau_{ij} n_j = 0$. En effet, pour $i \neq j$ les produits scalaires sont nuls puisque S est une section plane $\perp \vec{x}$, et avec $i = j$ ce sont les contraintes τ_{xx} et τ_{yy} qui sont nulles (cf. 1.18, et aussi § 1.2.3 et 1.2.5 ♥).

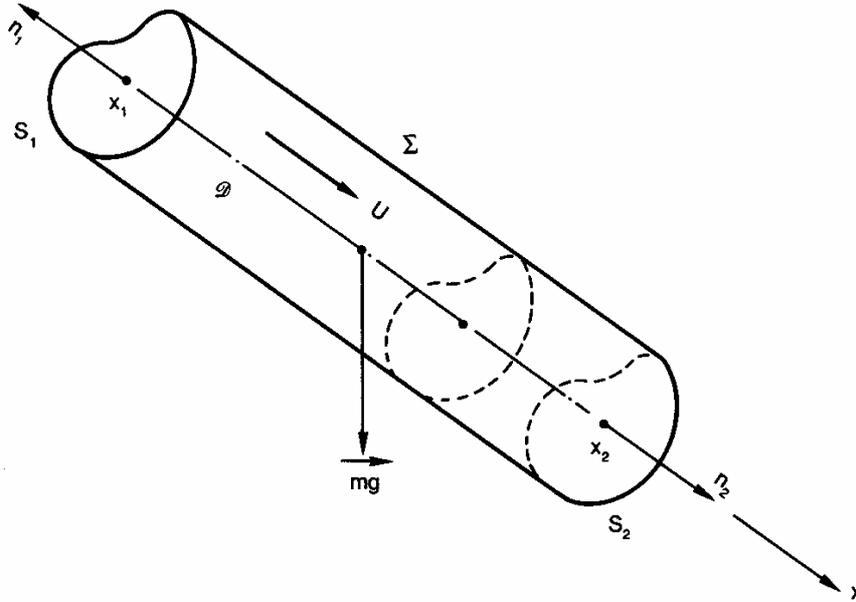


FIG. 6.6 – Domaine d'étude pour le bilan d'énergie mécanique

Compte tenu du fait que la normale \vec{n} est toujours dirigée vers l'extérieur de D , et en considérant que S_1 est la section d'entrée du fluide, (6.108) s'écrit à présent :

$$-\int_{S_1} \left(p^* + \rho \frac{U^2}{2} \right) U dS + \int_{S_2} \left(p^* + \rho \frac{U^2}{2} \right) U dS = -\int_D \Phi d\tau$$

soit, puisque $p^* = cte$ sur S_1 et sur S_2 :

$$-p_1^* \int_{S_1} U dS - \int_{S_1} \rho \frac{U^3}{2} dS + p_2^* \int_{S_2} U dS + \int_{S_2} \rho \frac{U^3}{2} dS = -\int_D \Phi d\tau \quad (6.109)$$

Nous voyons apparaître dans cette expression les débits (cf. 6.1b):

$$q_{v1} = \int_{S_1} U dS, \quad q_{v2} = \int_{S_2} U dS$$

On vérifie immédiatement, en écrivant le bilan de masse (1.26) sur le domaine D , que pour un fluide isochore en écoulement permanent :

$$q_{v1} = q_{v2} = q_v \quad (6.110)$$

Le bilan d'énergie mécanique (6.109) devient donc, en divisant par q_v et en passant à droite les intégrales relatives à S_2 :

$$p_1^* + \frac{\rho}{2q_v} \int_{S_1} U^3 dS = p_2^* + \frac{\rho}{2q_v} \int_{S_2} U^3 dS + \frac{1}{q_v} \int_D \Phi d\tau \quad (6.111)$$

équation dont les termes sont maintenant homogènes à des pressions.

6.6.1.2. – CHARGE HYDRAULIQUE ET PERTE DE CHARGE EN LIGNE

- ♣ La relation (6.111) permet d'introduire la définition de plusieurs grandeurs nouvelles :
 - **Puissance totale dissipée** par frottements visqueux dans l'écoulement :

$$P_\mu = \int_D \Phi \, d\tau \quad \text{en Watt} \quad (6.112a)$$

En particulier, dans un écoulement établi :

$$P_\mu = \mu \int_D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 d\tau \quad \text{pour une géométrie plane} \quad (6.112b)$$

$$P_\mu = \mu \int_D \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 d\tau \quad \text{pour une géométrie axisymétrique} \quad (6.112c)$$

- **Charge hydraulique** de l'écoulement dans la section $S_0(x)$:

$$X(x) = p^* + \frac{\rho}{2q_v} \int_{S_0(x)} U^3 \, dS \quad \text{en Pa (ou J/m}^3\text{)} \quad (6.113a)$$

- ◆ Avec ces nouveaux concepts, l'équation de l'écoulement (6.111) prend la forme :

$$X_1 = X_2 + \frac{P_\mu}{q_v} \quad (6.113b)$$

Sachant que l'on a toujours $\Phi > 0$ (§1.3.4.2) pour tout fluide réel ($\mu \neq 0$), la puissance dissipée P_μ est strictement positive et la charge X diminue donc le long de l'écoulement : il se produit une « *perte de charge* ».

- ♥ La *perte de charge en ligne* entre S_1 et S_2 est par définition :

$$\Delta X = \frac{P_\mu}{q_v} \quad \text{en Pa (ou J/m}^3\text{)} \quad (6.113c)$$

et l'on écrit habituellement :

$$X_1 = X_2 + \Delta X \quad (6.113d)$$

Les hydrauliciens préfèrent souvent opérer un changement d'unités en exprimant la charge hydraulique par une longueur, à savoir :

$$H = \frac{X}{\rho g} ; \quad \Delta H = \frac{\Delta X}{\rho g} \quad (6.114a)$$

En effet, H représente la hauteur de colonne fluide équivalente à la charge X et s'exprime donc en *mètres de colonne fluide (mCF)* (et en particulier en *mètres de colonne d'eau : mCE*). Ainsi, la relation (6.113d) devient :

$$H_1 = H_2 + \Delta H \quad \text{en mCF} \quad (6.114b)$$

Quoi qu'il en soit des unités choisies, la *perte de charge représente physiquement l'énergie mécanique dégradée par unité de volume dans l'écoulement, et transformée en chaleur* (le lecteur sait déjà, depuis le chapitre 1, que l'on retrouve la fonction de dissipation Φ dans le bilan d'enthalpie).

♠ Enfin on observera que, en vertu de la propriété $\partial U / \partial x = 0$ (écoulement établi), on a dans l'équation (6.111) :

$$\int_{S_1} U^3 dS = \int_{S_2} U^3 dS \quad (6.115)$$

c'est-à-dire que le bilan d'énergie mécanique s'écrit encore, avec la notation (6.113c) :

$$\boxed{\Delta X = p_1^* - p_2^*} \quad (6.116a)$$

et la puissance dissipée :

$$P_\mu = q_v (p_1^* - p_2^*) \quad (6.116b)$$

Dans un écoulement établi, la perte de charge est donc égale à la perte de pression motrice.

Remarquons enfin que (6.116a) s'exprime également sous forme différentielle par :

$$-\frac{dX}{dx} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} = cte = \frac{1}{q_v} \frac{dP_\mu}{dx} \quad (6.116c)$$

où $-dX/dx$ est la « perte de charge unitaire » (en Pa/m).

6.6.1.3. – RELATION GÉNÉRALE ENTRE DISSIPATION ET CONTRAINTE PARIÉTALE

Le bilan d'énergie mécanique a permis d'introduire les concepts de « charge » et « perte de charge », et d'exprimer l'énergie dissipée dans un écoulement établi. Il nous faut maintenant relier ces grandeurs à la contrainte pariétale τ_p . Pour la faire apparaître explicitement, nous devons recourir au bilan intégral de quantité de mouvement sur le domaine D (fig. 6.6).

♣ Partons de l'équation (1.31), exprimant que le débit de quantité de mouvement (en régime permanent) à travers la surface S est égal à la somme des forces extérieures appliquées à D . Les forces de volume $\rho \bar{F}$ sont ici les forces de pesanteur $\rho \bar{g}$. En outre, nous remplaçons le tenseur des quantités de mouvement \bar{P} par son expression (1.30a) et le vecteur contrainte \bar{T} par (1.16a), soit :

$$\bar{P} \cdot \vec{n} = \rho \bar{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n})$$

$$\bar{T} = -p \vec{n} + \vec{\tau}$$

On a donc ainsi :

$$\int_S \rho \bar{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \rho \bar{g} d\tau - \int_S p \vec{n} dS + \int_S \vec{\tau} dS \quad (6.117)$$

En vertu du théorème « flux-divergence » (§ 1.3.1.1) et du calcul effectué en Annexe 1 (§ 1.A.2 ♦), nous pouvons encore écrire :

$$\int_S p \vec{n} dS = \int_D \text{div } p \bar{I} d\tau = \int_D \overrightarrow{\text{grad } p} d\tau \quad (6.118)$$

et notre équation (6.117) devient :

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \rho \vec{g} d\tau - \int_D \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau + \int_S \vec{\tau} dS$$

ce qui nous permet d'introduire la pression motrice définie par (1.37a) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p^* = \overrightarrow{\text{grad}} p - \rho \vec{g}$$

soit finalement :

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_D \overrightarrow{\text{grad}} p^* d\tau + \int_S \vec{\tau} dS \quad (6.119)$$

!!! Projétons cette équation sur la direction \vec{x} , et introduisons maintenant *les hypothèses de l'écoulement établi* (U indépendante de x , $V = 0$, $\partial p^* / \partial x = \text{cte}$). Sachant que $\vec{V} \cdot \vec{n} = -U$ sur S_1 et que $\vec{V} \cdot \vec{n} = U$ sur S_2 (puisque la normale est dirigée vers l'extérieur du domaine considéré), on a :

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{S_1} \rho U^2 dS + \int_{S_2} \rho U^2 dS = 0 \quad (6.120a)$$

En outre, le vecteur $\vec{\tau}$ a pour composantes suivant \vec{x} (d'après 1.19c et 1.19e) :

$$\begin{aligned} & \text{- sur } \Sigma: - \tau_p \\ & \text{- sur } S_2 \text{ et sur } S_1: 0 \quad \text{car } \partial U / \partial x = 0 \end{aligned} \quad (6.120b)$$

de telle sorte que l'équation (6.119) se réduit à :

$$0 = - \frac{\partial p^*}{\partial x} \int_D d\tau - \int_{\Sigma} \tau_p dS$$

soit encore, en appelant V_c le volume de la canalisation (domaine D) :

$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial x} = - \frac{1}{V_c} \int_{\Sigma} \tau_p dS} \quad (6.121)$$

Dans le cas présent, $\tau_p = \mu (\partial U / \partial y)_{\text{paroi}}$ est indépendant de x , mais peut varier sur le contour de la section si $(\partial U / \partial y)_{\text{paroi}}$ n'a pas la même valeur partout, c'est-à-dire si la courbure de la paroi n'est pas constante.

Il est donc avantageux de définir une « *contrainte moyenne à la paroi* » :

$$\tau_{pm} = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \tau_p dS \quad (6.122a)$$

d'où une relation simple entre $\partial p^* / \partial x$ et τ_{pm} :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = - \frac{\Sigma}{V_c} \tau_{pm} \quad (6.122b)$$

🎵 Nous voyons alors apparaître une « *dimension caractéristique de la canalisation* » (ch.2, annexe 4), homogène à une longueur :

$$\boxed{L_c = \frac{V_c}{\Sigma}} \quad (6.122c)$$

En fait, puisque la canalisation considérée est ici de section constante, une formulation équivalente de L_c sera :

$$L_c = \frac{\text{section}}{\text{périmètre}} \quad (6.122d)$$

La perte de charge unitaire (6.116c) s'exprime donc en fonction de τ_{pm} et de L_c :

$$\boxed{-\frac{dX}{dx} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\tau_{pm}}{L_c}} \quad (6.123)$$

Bien entendu, dans les cas particuliers où τ_p est uniforme sur Σ (section rectangulaire plate, section circulaire), τ_{pm} est identique à τ_p .

6.6.1.4. – APPLICATION À DES SECTIONS USUELLES

Pour illustrer l'analyse qui précède, nous retiendrons les trois sections les plus courantes : rectangulaire plate, circulaire et annulaire. Les deux paramètres à préciser sont la dimension caractéristique L_c et la contrainte pariétale moyenne τ_{pm} .

♣ Section rectangulaire plate ($2b \ll l$)

La dimension caractéristique L_c vaut :

$$L_c = \frac{\text{section}}{\text{périmètre}} = \frac{2lb}{2(l+2b)}$$

et, avec l'approximation adoptée:

$$L_c = b \quad (6.124)$$

En ce qui concerne la contrainte pariétale, on a ici, en négligeant les effets de bords :

$$\tau_p = \text{cte} = \tau_{pm}$$

A partir de (6.14a) et de (6.123), on peut exprimer τ_p en fonction, soit du débit q_v , soit de la vitesse débitante $V_d = q_v / S = q_v / 2lb$:

$$\tau_p = -b \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{lb^2} q_v = 3 \frac{\mu V_d}{b} \quad (6.125)$$

◆ Section circulaire

$$L_c = \frac{\text{section}}{\text{périmètre}} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} \quad (6.126)$$

Nous sommes encore dans un cas tel que $\tau_p = \text{cte} = \tau_{pm}$.

De (6.17b) et (6.123) on tire alors :

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{4\mu}{\pi R^3} q_v = \frac{4\mu}{R} V_d \quad (6.127)$$

♥ *Section annulaire*

Maintenant, la contrainte τ_p n'a pas la même valeur sur la paroi intérieure et sur la paroi extérieure, car les gradients $(\partial U / \partial y)_p$ sont différents. Il faut donc considérer la contrainte moyenne τ_{pm} .

On a ici, pour la dimension caractéristique :

$$L_c = \frac{V_c}{\Sigma} = \frac{\text{section}}{\text{périmètre}} = \frac{\pi (R_2^2 - R_1^2)}{2\pi (R_1 + R_2)}$$

$$L_c = \frac{R_2 - R_1}{2} \quad (6.128)$$

En regroupant (6.20b) et (6.123) il vient :

$$\tau_{pm} = - \frac{R_2 - R_1}{2} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{4\mu}{\pi} \frac{q_v}{(R_2 + R_1) \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2 / R_1} \right)}$$

$$\tau_{pm} = 4\mu V_d \frac{R_2 - R_1}{R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2 / R_1}} \quad (6.129)$$

6.6.1.5. – EXPRESSIONS DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT

Nous terminerons cette étude de la dissipation dans les écoulements laminaires établis en présentant la loi de frottement sous forme adimensionnelle pour différents profils de canalisations.

On sait que le coefficient de frottement C_f (2.22b) est un critère de similitude associé aux forces de viscosité. Dans les écoulements internes, il est construit par convention avec une vitesse de référence qui est la vitesse débitante, et une contrainte pariétale qui est la contrainte moyenne τ_{pm} ; on écrit donc ;

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_{pm}}{\rho V_d^2} \quad (6.130)$$

D'autre part, nous avons vu que la dimension caractéristique qui s'introduit naturellement dans les calculs est le rapport du volume de la canalisation à sa surface latérale : $L_c = V_c / \Sigma$ (cf. également annexe 2.A.4). Elle représente aussi un choix logique pour la grandeur de référence L° . Mais il se trouve que, depuis fort longtemps, on a choisi pour jouer ce rôle le « diamètre hydraulique D_h », défini par :

$$D_h = \frac{4 \times \text{section}}{\text{périmètre}} \quad (6.131a)$$

c'est-à-dire, lorsque la section de l'écoulement est constante :

$$D_h = 4L_c \quad (6.131b)$$

Cette convention est trop ancienne pour qu'il soit possible de la modifier, et nous définirons donc le nombre de Reynolds de l'écoulement par la relation (6.2c), déjà citée au début du chapitre :

$$\boxed{Re = \frac{V_d D_h}{\nu}} \quad (6.132)$$

Enfin, une dernière convention bien installée est à signaler : on utilise souvent à la place de C_f un « coefficient de perte de charge en ligne Λ » défini par :

$$\Lambda = 4 C_f \quad (6.133)$$

où la lettre grecque Λ est un *lamda* majuscule.

Pour tenir compte de son usage très répandu dans la littérature, nous donnerons la version en C_f et la version en Λ des formules les plus courantes.

Appliquons ceci à quatre sections classiques.

♣ *Section rectangulaire plate ($2b \ll l$)*

On a ici, d'après (6.124) et (6.125) :

$$D_h = 4L_c = 4b \quad \text{et} \quad \boxed{Re = \frac{4b V_d}{\nu}} \quad (6.134a)$$

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho V_d^2} = 3 \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{b V_d} = \frac{12\nu}{V_d D_h}$$

soit, en fonction de Re :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = \frac{12}{Re}} \quad ; \quad \Lambda = \frac{96}{Re} \quad (6.134b)$$

◆ *Section circulaire*

De (6.126) et (6.127) on tire maintenant :

$$D_h = 4L_c = D \quad \text{et} \quad \boxed{Re = \frac{V_d D}{\nu}} \quad (6.135a)$$

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho V_d^2} = \frac{8\nu}{V_d D_h}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = \frac{8}{Re}} \quad ; \quad \Lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.135b)$$

♥ *Section annulaire*

La contrainte pariétale τ_p n'étant pas uniforme dans le cas de la section annulaire, il faut prendre sa valeur moyenne τ_{pm} , d'où avec (6.128) et (6.129) :

$$D_h = 4 L_c = 2(R_2 - R_1) \quad \text{et} \quad \boxed{Re = \frac{2(R_2 - R_1) V_d}{\nu}} \quad (6.136a)$$

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_{pm}}{\rho V_d^2} = \frac{4\nu}{V_d} \frac{R_2 - R_1}{R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\text{Ln } R_2 / R_1}}$$

ce que nous écrivons, en multipliant haut et bas par $D_h = 2(R_2 - R_1)$:

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = \frac{8}{Re} G} ; \quad \Lambda = \frac{64}{Re} G \quad (6.136b)$$

avec :

$$G = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^2}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\text{Ln } \frac{R_2}{R_1}}} \quad (6.136c)$$

Lorsque le rayon intérieur $R_1 \rightarrow 0$, $G \rightarrow 1$ et l'on retrouve le résultat relatif à la section circulaire.

🎵 Le paramètre adimensionnel G se présente comme un *facteur de forme pour la dissipation d'énergie*, qui ne dépend que du facteur de forme géométrique R_2 / R_1 . Il est lié à la non uniformité de τ_p sur la paroi, et à la nécessité de faire une moyenne de τ_p sur la surface latérale Σ .

♠ *Section rectangulaire $2b \times l$*

$$D_h = 4 L_c = 4 \frac{2bl}{2b + 2l} = \frac{4bl}{b + l} \quad \text{et} \quad Re = \frac{V_d D_h}{\nu} \quad (6.137a)$$

Le coefficient de frottement se présente sous la forme (écrite par analogie avec 6.134b) :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = \frac{12}{Re} H} \quad \Lambda = \frac{96}{Re} H \quad (6.137b)$$

où H est également un *facteur de forme pour la dissipation d'énergie*, dépendant ici du facteur de forme géométrique $l/2b$. Des valeurs détaillées en sont données dans différents ouvrages (Kakaç et Yener, Kays et Crawford...).

6.6.1.6. – GÉNÉRALISATION

Dans les quatre cas examinés, le coefficient de frottement est inversement proportionnel à Re . Cette propriété peut être généralisée à des sections de forme quelconque, en restant bien entendu dans les hypothèses de l'écoulement établi.

Observons d'abord qu'on peut écrire, d'après (6.123) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_{pm}}{\rho V_d^2} = -L_c \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{1}{\rho V_d^2} \quad (6.138a)$$

Mais d'autre part, nous avons vu (§ 6.2.4) que la vitesse locale est de la forme :

$$U \propto \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} L^2$$

(où L est homogène à une longueur). Il en est évidemment de même pour V_d , de sorte que V_d est proportionnelle à $\partial p^* / \partial x$. Alors, le rapport $(1/V_d) / (\partial p^* / \partial x)$ est une constante, et (6.138a) s'écrit :

$$\tau_{pm} = \frac{Cte}{V_d} \quad (6.138b)$$

Sous forme adimensionnée, cette propriété devient, avec (6.131b), et en multipliant haut et bas de (6.138a) par μD_h :

$$\frac{1}{2} C_f = -\frac{D_h^2}{4\mu} \frac{1}{V_d} \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{\mu}{\rho V_d D_h} \quad (6.139a)$$

ou aussi, en introduisant un facteur de forme généralisé F pour la dissipation :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{F}{Re} \quad (6.139b)$$

⚠ Attention cependant au fait que cette écriture est trompeuse, car si on modifie le diamètre hydraulique, on change Re , mais également la valeur de F .

6.6.1.7. – CALCUL PRATIQUE DE LA PERTE DE CHARGE EN LIGNE

Le problème concret qui se pose couramment aux ingénieurs et techniciens est de déterminer la perte de charge ΔX (ou la perte de charge unitaire $-dX/dx$) à partir de données qui sont en général la vitesse débitante V_d (ou le débit $q_v = V_d S_0$) et le diamètre hydraulique D_h .

♣ Dans le cas général, en partant des relations (6.130) et (6.123) on a :

$$-\frac{dX}{dx} = \frac{\tau_{pm}}{L_c} = \frac{4C_f}{D_h} \rho \frac{V_d^2}{2} \quad (\text{en Pa/m}) \quad (6.140a)$$

Le long d'une canalisation de longueur L , la perte de charge totale ΔX a pour valeur :

$$\boxed{\Delta X = 4C_f \frac{L}{D_h} \rho \frac{V_d^2}{2}} \quad \text{ou} \quad \Delta X = \Lambda \frac{L}{D_h} \rho \frac{V_d^2}{2} \quad (\text{en Pa}) \quad (6.140b)$$

en rappelant que Λ (lamda) est le coefficient de perte de charge en ligne (6.133).

◆ Pour des sections de forme simple, il est évidemment possible d'exprimer ΔX directement en fonction de la vitesse ou du débit, à partir des résultats du parag. 6.6.1.5, soit :

- section rectangulaire plate :

$$\Delta X = \frac{3\mu L}{b^2} V_d = \frac{3}{2} \frac{\mu L}{lb^3} q_v \quad (6.141)$$

- section circulaire :

$$\Delta X = \frac{32\mu L}{D^2} V_d = \frac{128\mu L}{\pi D^4} q_v \quad (6.142)$$

- section annulaire :

$$\Delta X = \frac{8\mu L}{(R_2 - R_1)^2} G V_d = \frac{8\mu L}{\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2 - R_1)^2} G q_v \quad (6.143)$$

- section rectangulaire :

$$\Delta X = \frac{48\mu L}{D_h^2} H V_d = \frac{3}{2} \frac{\mu L (b+l)^2}{b^3 l^3} H q_v \quad (6.144)$$

Bien entendu, on retrouve ainsi, à un facteur L près, les relations (6.14a), (6.17b) et (6.20b) démontrées au début de ce chapitre.

6.6.1.8. – REMARQUE MÉTHODOLOGIQUE



La méthode utilisée pour calculer la perte de charge peut surprendre. Nous avons en effet procédé sur le même domaine D à la fois à un bilan d'énergie (relation 6.111) et à un bilan de quantité de mouvement (relation 6.119).

Pourtant, les professeurs de mécanique ne manquent jamais de mettre en garde leurs étudiants sur le fait que théorème des quantités de mouvement et théorème de l'énergie sont rigoureusement équivalents, et que c'est donc une tautologie d'utiliser les deux en même temps.

Mais, à y regarder de près, cette affirmation doit être nuancée. Elle est indiscutable en ce qui concerne les équations de bilan local. Par contre, sous forme intégrale, les bilans font intervenir explicitement des conditions aux limites, qui ne sont pas les mêmes dans un bilan d'énergie ou dans un bilan de quantité de mouvement. De sorte que la réunion des deux bilans conduit à une relation entre deux groupes de conditions aux limites, et qu'elle se justifie lorsque cette relation est inconnue.

En l'occurrence, dans notre affaire, il s'agit d'une correspondance entre les charges X sur deux sections droites et la contrainte moyenne τ_{pm} sur la paroi latérale, d'où émerge la dimension caractéristique L_c . La démarche n'est donc pas complètement hérétique, mais elle doit être conduite avec précautions et lucidité. Nous la retrouverons plus loin (§ 6.7.2.3, pertes de charge, et § 7.9.2, éoliennes).

♪♪ Notons aussi que si l'on connaît le profil de vitesse U , on peut toujours évaluer directement la perte de charge à partir de la fonction de dissipation Φ (relations 6.112 et 6.116c).

6.6.2. – Écoulements turbulents

6.6.2.1. – CARACTÈRES GÉNÉRAUX

Nous avons exprimé au paragraphe 6.3.1.1 les principales conditions qui définissent un écoulement établi, à savoir :

$$\partial U / \partial x = 0 ; \quad V = 0 ; \quad S_0 = cte \quad (6.5, 6.6)$$

(U et V étant ici des moyennes temporelles)

$$\partial \bar{p}^* / \partial x = cte ; \quad \partial \bar{p}^* / \partial y = 0 \quad (6.24b, c)$$

A ces spécifications nous ajouterons une hypothèse qui est en harmonie logique avec la définition de l'écoulement établi, et qui généralise la condition $\partial v_t / \partial x = 0$ (6.23b) :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Dans un écoulement turbulent établi,} \\ \text{les corrélations } \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{p^* u}, \overline{u^2 v}, \text{ etc.,} \\ \text{sont indépendantes de } x. \end{array} \right) \quad (6.145)$$

Alors, le raisonnement suivi au paragraphe 6.6.1 reste entièrement valable lorsqu'on prend l'équation (6.108) en valeur moyenne. Nous définirons donc de la même façon :

- le débit moyen q_v et la vitesse débitante moyenne V_d :

$$q_v = \int_{S_0} U dS = S_0 V_d \quad (6.146a)$$

- la puissance moyenne dissipée :

$$P_\mu = \int_D \bar{\Phi} d\tau - \int_{S_1 + S_2} \overline{V_i \tau_{ij}} n_j dS \quad (6.146b)$$

- la charge hydraulique moyenne dans une section $S_0(x)$:

$$X(x) = \frac{1}{q_v} \int_{S_0} \left(\overline{p^* + \rho \frac{\vec{V}^2}{2}} \right) U dS \quad (6.146c)$$

- la perte de charge moyenne entre S_1 et S_2 :

$$\Delta X = X_1 - X_2 \quad \text{ou} \quad \Delta H = \frac{\Delta X}{\rho g} \quad (6.146d)$$

Compte tenu des hypothèses (6.5 à 6.8) et (6.145) de l'écoulement établi, on a :

$$\begin{aligned} \overline{V^2} &= U^2 \\ \frac{1}{q_v} \int_{S_0} \overline{p^* U} dS &= \overline{p^*}(x) \end{aligned} \quad (6.147a)$$

$$\int_{S_1} \frac{\rho}{2} U^2 U dS = \int_{S_2} \frac{\rho}{2} U^2 U dS \quad (6.147b)$$

$$\int_{S_1 + S_2} \overline{V_i \tau_{ij} n_j} dS = 0 \quad (6.147c)$$

en rappelant que dans la dernière expression, les normales à S_1 et S_2 sont de sens contraire.

🎵 Le traitement de la fonction de dissipation exige qu'on s'y arrête un instant. En effet, en coordonnées cartésiennes (mais ce serait pareil en coordonnées cylindriques), U devient $U + u$ quand l'écoulement est turbulent (§ 3.2.1) et la fonction :

$$\Phi = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)^2$$

devient quant à elle:

$$\Phi = \mu \left(\frac{dU}{dy} + \frac{du}{dy} \right)^2 = \mu \left[\left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + 2 \frac{dU}{dy} \frac{du}{dy} \right] \quad (6.148a)$$

La moyenne d'une fluctuation étant nulle par définition (§ 3.A.2), la moyenne locale de la fonction de dissipation s'écrit :

$$\overline{\Phi} = \mu \left[\overline{\left(\frac{dU}{dy} \right)^2} + \overline{\left(\frac{du}{dy} \right)^2} \right] \quad (6.148b)$$

Dans le dernier terme on reconnaît (à un facteur près) la dissipation turbulente ε (« epsilon ») introduite au chapitre 3 (formule 3.52) :

$$\varepsilon = \nu_t \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

Si on ne veut pas rester avec ce terme sur les bras, il faut lui trouver une relation avec l'écoulement moyen, et vu la ressemblance avec $\overline{u^2}$ on est tenté de poser, pour rester dans le cadre du modèle pseudo-laminaire (cf. relations 3.28):

$$\boxed{\varepsilon = \nu_t \left(\frac{dU}{dy} \right)^2} \quad (6.149)$$

Quoique logique, l'hypothèse peut sembler hardie, mais elle ne l'est pas plus que beaucoup d'autres, et Bejan (cf. Entropy generation through heat and fluid flow) a montré sur quelques applications simples qu'elle était en accord avec les résultats expérimentaux classiques. La fonction de dissipation moyenne est alors :

$$\overline{\Phi} = \rho (\nu + \nu_t) \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \quad (6.150)$$

Les relations établies pour les écoulements laminaires conservent donc la même structure, et s'écrivent maintenant :

$$\left. \begin{aligned}
 P_\mu &= \int_D \bar{\Phi} d\tau = \rho \int_D (v + v_t) \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 d\tau \\
 \Delta X &= X_1 - X_2 = P_\mu / q_v \quad \text{ou} \quad P_\mu = q_v \Delta X \\
 \Delta X &= \frac{\bar{p}_1^*}{\rho} - \frac{\bar{p}_2^*}{\rho} = g \Delta H \\
 -\frac{dX}{dx} &= -\frac{d\bar{p}^*}{dx} = cte = \frac{1}{q_v} \frac{dP_\mu}{dx}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.151)$$

Il en va de même pour la contrainte pariétale :

$$\tau_{pm} \text{ (ou } \tau_p) = -L_c \frac{d\bar{p}^*}{dx} = -L_c \frac{dX}{dx} \quad (6.152)$$

On se rappelle bien entendu la définition de L_c et de D_h (cf. 6.122c et 6.131b) :

$$L_c = \frac{V_c}{\Sigma} = \frac{D_h}{4}$$

ainsi que la relation entre perte de charge et coefficient de frottement (6.140b):

$$\Delta X = 4 C_f \frac{L}{D_h} \rho \frac{V_d^2}{2} = \Lambda \frac{L}{D_h} \rho \frac{V^2}{2}$$

6.6.2.2. – CONTRAINTE PARIÉTALE ET COEFFICIENT DE FROTTEMENT

On a pu constater dans la première partie de ce chapitre que les calculs de débits n'ont pas été conduits tout à fait de la même façon en laminaire et en turbulent. Dans ce dernier cas en effet, nous sommes passés par l'intermédiaire de la vitesse de frottement U_τ , de préférence à la contrainte τ_p ou à $d\bar{p}^*/dx$. Restons donc dans ce cadre logique, en sachant que si l'on a besoin d'exprimer explicitement τ_p , on peut le faire aisément, soit avec $\tau_p = -L_c d\bar{p}^*/dx$ (6.152), soit avec $\tau_p = \rho U_\tau^2$ (qui est la définition de U_τ).

Quant au coefficient de frottement, il est toujours :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho V_d^2} = \left(\frac{U_\tau}{V_d} \right)^2 \quad (6.153a)$$

Pour des raisons pratiques liées à la forme de V_d , on préfère souvent écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = \frac{V_d}{U_\tau} \quad (6.153b)$$

Nous allons effectuer ce calcul pour les exemples simples déjà traités en écoulement turbulent.

♣ *Section rectangulaire plate d'épaisseur $2b \ll l$, parois lisses*

Il a été dit (6.134a) que le diamètre hydraulique est ici : $D_h = 4b$, d'où l'expression de Re :

$$Re = \frac{4 V_d b}{\nu} \quad \text{avec} \quad V_d = \frac{q_v}{S_0} = \frac{q_v}{2lb} \quad (6.154a)$$

D'autre part, on obtient à partir de (6.41) et (6.153b) :

$$\frac{l}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{bU_\tau}{\nu} + 3,2l \quad (6.154b)$$

Ecrivons :

$$\frac{bU_\tau}{\nu} = \frac{4V_d b}{\nu} \frac{U_\tau}{4V_d} = \frac{Re}{4} \sqrt{C_f/2} \quad (6.154c)$$

La jonction des deux relations précédentes donne après regroupement :

$$\boxed{\frac{l}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \operatorname{Ln} Re \sqrt{C_f/2} - 0,25} \quad (6.155a)$$

ou :

$$\frac{l}{\sqrt{\Lambda}} = 0,88 \operatorname{Ln} Re \sqrt{\Lambda} - l \quad (6.155b)$$

Le coefficient de frottement se présente donc comme une fonction implicite de Re , aisément calculable par itération.

◆ *Section rectangulaire plate, parois rugueuses*

Le même raisonnement appliqué à (6.78) donne pour C_f :

$$\boxed{\frac{l}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{b}{\varepsilon} + 6,04} \quad (6.156a)$$

ou :

$$\frac{l}{\sqrt{\Lambda}} = 0,88 \operatorname{Ln} \frac{b}{\varepsilon} + 2,13 \quad (6.156b)$$

Lorsque la paroi n'est pas hydrauliquement lisse, on voit que C_f est indépendant de Re , et n'est fonction que de la rugosité relative ε/b .

♥ *Section circulaire, paroi lisse*

Le diamètre hydraulique est ici : $D_h = D = 2R$ (6.135a).

En conséquence :

$$Re = \frac{V_d D}{\nu} \quad \text{avec} \quad V_d = \frac{q_v}{\pi R^2} \quad (6.157a)$$

En réunissant (6.58a) et (6.153b), il vient :

$$\frac{l}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{RU_\tau}{\nu} + 2,04 \quad (6.157b)$$

On écrit :

$$\frac{RU_\tau}{\nu} = \frac{V_d D}{\nu} \frac{U_\tau}{2V_d} = \frac{Re}{2} \sqrt{C_f/2}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{C_f/2}} &= 2,5 \operatorname{Ln} Re \sqrt{C_f/2} + 0,31 \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} &= 0,88 \operatorname{Ln} Re \sqrt{\Lambda} - 0,78 \end{aligned}} \quad (6.158)$$

qui est la « *formule de Karman – Nikuradse* ».

⚠ On notera que cette relation, souvent présentée comme semi-empirique, a été obtenue ici par un calcul théorique avec un minimum d'hypothèses phénoménologiques.

♠ *Section circulaire, paroi rugueuse*

On procède de même à partir de (6.81) et l'on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{R}{\varepsilon} + 4,87} \quad (6.159a)$$

ou avec Λ :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 0,88 \operatorname{Ln} \frac{R}{\varepsilon} + 1,77 \quad (6.159b)$$

6.6.2.3. – CRITÈRE DE DISTINCTION ENTRE PAROI LISSE ET PAROI RUGUEUSE

Bien entendu, dès que l'on doit faire un calcul d'application, la question se pose de savoir s'il faut l'effectuer avec la formule « paroi lisse » ou avec la formule « paroi rugueuse ». *A priori*, nous avons vu que cela dépend du paramètre ξ_ε (§ 6.4.4) : le régime est hydrauliquement lisse avec $\xi_\varepsilon \leq 3,1$ et hydrauliquement rugueux avec $\xi_\varepsilon > 3,1$. L'évaluation de ξ_ε se fera par exemple à partir des formules suivantes, qui se déduisent immédiatement de (6.123, 124, 126) et (6.83) :

- pour la section rectangulaire plate :

$$\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4b} Re \sqrt{C_f/2} \quad (6.160a)$$

- pour la section circulaire :

$$\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{D} Re \sqrt{C_f/2} \quad (6.160b)$$

Cependant, pour estimer ξ_ε il faut connaître C_f , qui est précisément ici l'inconnue du problème. Une démarche itérative est donc nécessaire ; elle peut être conduite indifféremment en régime lisse ou rugueux, car les conclusions sont concordantes.

🎵 Malgré tout, avec les canalisations de section circulaire, on épargnera du temps sans concéder d'erreur significative en employant la *formule de Colebrook* (ch. 7).

6.6.2.4. – INFLUENCE DU DÉBIT SUR LA DISSIPATION D'ÉNERGIE

⚠ Depuis le chapitre 2, nous avons eu l'occasion de répéter maintes fois que les formules adimensionnées ne traduisent pas toujours complètement l'aspect concret des lois physiques. Ainsi, pour le praticien, les paramètres utiles d'un écoulement ne sont ni C_f ni Re , mais la perte de charge ΔX et le débit q_v . Il est donc indispensable de savoir comment varie ΔX en fonction de q_v .

♣ En régime hydrauliquement lisse

On bute ici sur une difficulté puisque, dans les relations (6.155a) et (6.158), C_f est une fonction implicite de Re .

Cependant, la formule empirique de Blasius (ch.7, formule 7.8) permettra d'établir une loi approchée, de la forme : ΔX proportionnelle à $q_v^{1,75}$.

◆ En régime hydrauliquement rugueux

Le coefficient de frottement est une fonction explicite de Re ; il en résulte les lois suivantes :

● section rectangulaire : à partir de (6.156a) et (6.140b) :

$$\Delta X = \frac{\rho L}{4 (2,5 \ln b / \varepsilon + 6,04)^2 l^2 b^3} q_v^2 = \frac{\rho C_f}{8} \frac{L}{l^2 b^3} q_v^2 \quad (6.161a)$$

● section circulaire : à partir de (6.159a) et (6.140b) :

$$\Delta X = \frac{64 \rho L}{(2,5 \ln R / \varepsilon + 4,87)^2 \pi^2 D^5} q_v^2 = \frac{32 \rho C_f}{\pi^2} \frac{L}{D^5} q_v^2 \quad (6.161b)$$

⚠ Donc, on observe que ΔX est proportionnelle au carré du débit (ou de la vitesse) alors qu'elle était proportionnelle à q_v en laminaire. Une augmentation du débit coûte donc beaucoup plus cher en régime turbulent. Cette propriété éminemment concrète passe complètement inaperçue si l'on raisonne avec les grandeurs sans dimension.

Attention quand même à un autre point : nous avons plusieurs fois mis en garde sur les erreurs d'interprétation que peut faire naître la combinaison, dans une même formule, de grandeurs dimensionnées et de paramètres sans dimension. Or, c'est justement le cas dans les deux relations précédentes.

En fait, avec une paroi rugueuse, C_f ne dépend pas du débit (cf. 6.156 et 6.159). Par contre, il dépend de b / ε ou de R / ε . On peut donc dire que ΔX varie comme b^{-3} ou D^{-5} seulement si on compare des conduits de même rugosité relative.

6.6.2.5. – RÉFLEXIONS SUR LA TRANSITION LAMINAIRE-TURBULENT

Dans les écoulements établis, nous avons donc obtenu des expressions analytiques du coefficient de frottement C_f pour plusieurs géométries, en laminaire et en turbulent. On pourrait penser que le recollement de ces expressions va fournir une estimation numérique du nombre de Reynolds critique Re_c qui situe la charnière laminaire-turbulent.

Malheureusement, les choses ne sont pas si simples. La transition dépend beaucoup des conditions expérimentales, et en particulier des sources de perturbations qui vont contribuer à déclencher la turbulence. Dans des conditions correspondant à l'expérience de Reynolds, on observe que le passage à l'écoulement turbulent s'accompagne d'une remontée brusque de C_f , ce qui signifie que l'écoulement laminaire se trouvait en état instable sur un intervalle $[Re'_c, Re_c]$. La valeur Re'_c correspond à un déclenchement idéal de la turbulence (avec des sources de perturbations importantes) rarement réalisé. Aucune théorie simple ne décrit cette zone critique. Toutefois, une approche numérique de Re'_c présente tout de même un intérêt car elle donne une borne inférieure de Re pour la transition laminaire-turbulent.

En égalant les expressions de C_f (6.134b et 6.155a) d'une part, (6.135b et 6.158) de l'autre, on obtient les valeurs suivantes :

- section rectangulaire : $Re'_c \approx 2000$ (expérience : $Re_c \approx 2500$)

- section circulaire : $Re' \approx 1100$ (expérience : $Re_c \approx 2000$)

Avec $Re < Re'_c$, on est donc absolument certain d'être en écoulement laminaire.

Pour la section annulaire, nous n'avons pas effectué le calcul complet en régime turbulent. On peut néanmoins dire que, vu la présence dans C_f (6.136c) du facteur de forme G , Re'_c ne dépendra pas seulement de Re , mais de Re et de G , c'est-à-dire en dernière analyse de Re et du rapport des rayons R_2/R_1 . Par exemple, si l'on admet la formule empirique de Davis en régime turbulent :

$$\frac{1}{2} C_f = 0,0275 (1 - R_1/R_2)^{0,1} Re^{-0,2}$$

et en considérant que $(1 - R_1/R_2)^{0,1}$ est toujours proche de 1, on aboutit à :

$$Re'_c \approx 1200 G^{1,25}$$

6.7. – BILAN ÉNERGÉTIQUE D'UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT NON ÉTABLI

6.7.1. – Notion de « singularité »

Les écoulements établis sont des cas particuliers très répandus dans les circuits de distribution de fluides, mais ils ne sont tout de même que des cas particuliers. En fait, l'écoulement subit bien souvent des changements de section ou de direction : c'est ce que l'on appelle des « singularités ». Toute singularité a pour effet de perturber l'écoulement et de créer ainsi une zone non établie. La perte de charge spécifique à la singularité est appelée « perte de charge singulière ». Même si, dans la majorité des cas, les singularités s'accompagnent de zones de recirculation, les pertes de charge singulières ne sont pas structurellement liées à la présence de tourbillons : elles se manifestent aussi lorsque l'écoulement conserve un aspect d'ensemble régulier (dans les variations progressives de section par exemple).

Le calcul des pertes de charge singulières est extrêmement complexe – lorsqu'il est réalisable – et ce paragraphe constitue toujours un passage délicat dans un exposé de mécanique des fluides. Les résultats disponibles, expérimentaux et théoriques, sont encore fragmentaires, malgré des travaux importants (Idel'cik, 1986), et les situations variées que rencontre l'ingénieur ne coïncident pas toujours avec les exemples recensés dans la littérature.

Aussi n'est-il pas étonnant que dans les avant-projets on adopte souvent des valeurs approchées, voire forfaitaires, qui ne donnent en fait que des ordres de grandeur.

Dans ce qui suit, nous chercherons essentiellement à repérer les différents acteurs qui interviennent dans l'expression des pertes de charge singulières ; nous rappellerons plus loin (ch. 7) les principales formules ou valeurs numériques dont le praticien peut avoir besoin.

🎵 Une remarque orthographique avant de passer aux calculs : on écrit *les pertes de charge* (sans *s*) car on perd de *la charge* et non pas *des charges*.

6.7.2. – Perte de charge et dissipation

6.7.2.1. – DÉFINITION DE LA CHARGE EN ÉCOULEMENT NON ÉTABLI

La relation (6.108), qui exprime le bilan d'énergie mécanique entre deux sections S_1 et S_2 , est valable sans restrictions, y compris donc en régime non établi. Toutefois, dans le cas présent, le terme $V_i \tau_{ij} n_j$ n'est pas nul. Il semble alors préférable de modifier la répartition des termes et de regrouper, d'un côté la puissance mécanique qui traverse les frontières du domaine, de l'autre la puissance dissipée de façon irréversible et transformée en chaleur. On écrira donc :

$$\int_{S_1+S_2} \left(p^* + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS - \int_{S_1+S_2} V_i \tau_{ij} n_j dS = \int_D \Phi d\tau \quad (6.162)$$

avec $\vec{V} \cdot \vec{n} = -U$ sur S_1 et $\vec{V} \cdot \vec{n} = U$ sur S_2 .

Nous pouvons alors généraliser la définition (6.113a) de la « charge hydraulique » $X(x)$ dans la section $S_0(x)$ en posant :

$$X(x) = \frac{I}{q_v} \left\{ \int_{S_0} \left(p^* + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) U dS - \int_{S_0} V_i \tau_{ij} n_j dS \right\} \text{ en Pa (J/m}^3\text{)} \quad (6.163)$$

Cependant, au paragraphe 6.5.2, nous avons conservé l'hypothèse $\partial p^* / \partial y \neq 0$ pour les écoulements non établis. Ainsi :

$$\int_{S_0} p^* U dS = p^* \int_{S_0} U dS = p^* q_v \quad (6.164a)$$

D'autre part, sachant que $V \ll U$, on pourra presque toujours admettre : $\vec{V}^2 \neq U^2$. En outre, sur une section plane perpendiculaire à la direction x , on a :

$$V_i \tau_{ij} n_j = U \tau_{xx} + V \tau_{yy} \quad (6.164b)$$

d'où :

$$X(x) = p^* + \frac{\rho}{2q_v} \int_{S_0} U^3 dS - \frac{I}{q_v} \int_{S_0} (U \tau_{xx} + V \tau_{yy}) dS \quad (6.165)$$

6.7.2.2. – PERTE DE CHARGE

♣ Compte tenu de (6.165), la *perte de charge* entre deux sections S_1 et S_2 le long d'un écoulement non établi est évidemment :

$$\Delta X = X_1 - X_2 = p_1^* - p_2^* + \frac{\rho}{2q_v} \left\{ \int_{S_1} U^3 dS - \int_{S_2} U^3 dS \right\} - \frac{1}{q_v} \left\{ \int_{S_1} (U \tau_{xx} + V \tau_{yy}) dS - \int_{S_2} (U \tau_{xx} + V \tau_{yy}) dS \right\} \quad (6.166a)$$

Cette perte de charge est toujours identifiée à l'énergie mécanique dissipée dans l'écoulement par le fait de la viscosité :

$$P_\mu = \int_D \Phi d\tau \quad \text{en Watt} \quad (6.166b)$$

On a donc encore, d'après (6.162) :

$$\boxed{\Delta X = \frac{P_\mu}{q_v}} \quad (6.167a)$$

et localement, en n'oubliant pas que $\Delta X = -(X_2 - X_1)$:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= - \frac{1}{q_v} \frac{dP_\mu}{dx} \\ &= \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\rho}{2q_v} \frac{d}{dx} \int_{S_0(x)} U^3 dS - \frac{1}{q_v} \frac{d}{dx} \int_{S_0(x)} (U \tau_{xx} + V \tau_{yy}) dS \end{aligned} \quad (6.167b)$$

⚠ La différence par rapport aux écoulements établis apparaît clairement si l'on compare (6.166a) et (6.116a). Ici, la perte de charge fait intervenir non seulement la différence de pression motrice $p_1^* - p_2^*$, mais aussi deux termes liés à la redistribution du champ des vitesses et des contraintes entre S_1 et S_2 (termes qui s'annulent en écoulement établi puisque U est indépendante de x).

🎵 Il est important de remarquer aussi que, dans un écoulement établi, deux mesures de pression suffisent à caractériser l'énergie mécanique perdue (6.116a), tandis que dans un écoulement non établi, il faut en outre connaître le champ des vitesses.

◆ Cas particulier

Portons un instant notre attention sur le cas d'une *conduite rectiligne de section constante comportant une singularité isolée*. Si les sections droites S_1 et S_2 sont assez éloignées de la singularité, l'écoulement y est établi ; comme, en outre $S_1 = S_2$, les termes relatifs aux champs de vitesse s'annulent dans (6.166a) et l'on retrouve la même expression que pour le régime établi :

$$\Delta X = p_1^* - p_2^* \quad (6.168)$$

Cette propriété comporte des implications expérimentales qui seront examinées plus loin (§ 7.2.4.4).

6.7.2.3. – RELATION ENTRE PUISSANCE DISSIPÉE ET FROTTEMENT PARIÉTAL

♣ Considérons une canalisation comportant une singularité sans changement de direction (la présence d'un coude complique l'écriture mais ne modifie pas la nature du résultat) et reprenons le bilan intégral de quantité de mouvement (6.119) qui possède une validité générale :

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_D \overrightarrow{\text{grad}} p^* d\tau + \int_S \vec{\tau} dS \quad (6.169a)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont (cf. ch. 1):

$$\begin{aligned} - \text{à la paroi latérale } \Sigma : \vec{V} = 0 ; \vec{\tau} = (-\tau_p, 0) \\ - \text{sur } S_1 : \vec{V} \cdot \vec{n} = -U ; \vec{\tau} = (-\tau_{xx}, -\tau_{yx}) \\ - \text{sur } S_2 : \vec{V} \cdot \vec{n} = U ; \vec{\tau} = (\tau_{xx}, \tau_{yx}) \end{aligned} \quad (6.169b)$$

De plus, d'après les hypothèses :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p^* = (\partial p^* / \partial x, 0) \quad (6.169c)$$

Comme nous l'avons déjà souligné, le bilan intégral de quantité de mouvement ne fait pas appel aux mêmes conditions aux limites que le bilan intégral d'énergie. La comparaison des deux peut donc fournir une relation entre ces dernières. En l'occurrence, nous cherchons ici à éliminer p^* pour relier X et τ_p .

La plupart du temps, les contraintes $\vec{\tau}$ sur S_1 et S_2 sont négligeables devant le terme en τ_p . En procédant à une projection sur l'axe \vec{x} (§ 6.6.1.3) il vient alors :

$$- \int_{S_1} \rho U^2 dS + \int_{S_2} \rho U^2 dS = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p^*}{\partial x} S_0(x) dx - \int_{\Sigma} \tau_{px} dS \quad (6.170)$$

où τ_{px} représente la composante suivant x de la contrainte locale τ_p à la paroi.

◆ Lorsque S_0 varie avec x , on doit raisonner sur une tranche élémentaire $x_2 - x_1 = dx$, de surface latérale $d\Sigma$.

Reprenons la définition (6.122a) de la *contrainte pariétale moyenne* τ_{pm} , qui s'écrit ici :

$$\int_{d\Sigma} \tau_{px} dS = \tau_{pm} d\Sigma \quad (6.171a)$$

et exprimons le gradient local de pression motrice à partir de (6.170) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = - \frac{\rho}{S_0(x)} \frac{d}{dx} \int_{S_0} U^2 dS - \frac{1}{S_0(x)} \frac{d\Sigma}{dx} \tau_{pm} \quad (6.171b)$$

Soient $B(x)$ le périmètre de la section S_0 (tel que $d\Sigma = B(x) dx$), et dV le volume du tronçon dx . Si l'on pose :

$$\frac{dV}{d\Sigma} = \frac{S_0(x) dx}{B(x) dx} = L_c(x) \quad (6.171c)$$

on retrouve la dimension caractéristique $L_c(x)$ de la canalisation (définition 6.122c) généralisée ici au cas d'une section variable.

En reportant alors (6.171b) dans (6.167b), et en négligeant toujours les contraintes τ sur S_1 et S_2 (comme dans le § ♣ précédent), on aboutit à la relation locale entre dissipation et contrainte pariétale :

$$\frac{1}{q_v} \frac{dP_\mu}{dx} = - \frac{dX}{dx} = \frac{\tau_{pm}}{L_c(x)} + \frac{\rho}{S_0(x)} \frac{d}{dx} \int_{S_0} U^2 dS - \frac{\rho}{2q_v} \frac{d}{dx} \int_{S_0} U^3 dS \quad (6.172)$$

♥ Lorsque la section S_0 est constante, $L_c(x) = cte$ et l'on revient au bilan sur un tronçon de longueur $x_2 - x_1 = L$. L'équation (6.172) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \frac{P_\mu}{q_v} = \Delta X = \tau_{pM} \frac{L}{L_c} + \frac{\rho}{S_0} \left\{ \int_{S_2} U^2 dS - \int_{S_1} U^2 dS \right\} \\ - \frac{\rho}{2q_v} \left\{ \int_{S_2} U^3 dS - \int_{S_1} U^3 dS \right\} \end{aligned} \quad (6.173)$$

où τ_{pM} est la *contrainte pariétale moyenne sur l'ensemble de la paroi*.

♠ Si le tronçon $S_1 S_2$ contient une singularité dont la longueur est petite devant L , la relation ci-dessus reste valable comme approximation.

Dans le cas où, de plus, l'écoulement est établi sur S_1 et S_2 (§ 6.7.2.2♦), cette approximation se réduit à la relation simple :

$$\frac{P_\mu}{q_v} = p_1^* - p_2^* = \tau_{pM} \frac{L}{L_c} = \Delta X \quad (6.174)$$

En choisissant maintenant pour contrainte de référence τ° la contrainte pariétale moyenne τ_{pM} sur la longueur L , le coefficient de frottement s'écrit :

$$\frac{1}{2} C_{fM} = \frac{\tau_{pM}}{\rho V_d^2} = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho V_d^2} \frac{L_c}{L} \quad (6.175a)$$

Dans le chapitre 2 (§ 2.4.3.2) nous avons indiqué que, le plus souvent, la pression de référence retenue est $p^\circ = \rho(V^\circ)^2$. Si cependant nous adoptons ici, comme l'expression de C_{fM} nous y incite :

$$p^\circ = p_1^* - p_2^*$$

le critère de similitude associé au terme de pression est le nombre d'Euler (ou coefficient de pression, § 2.4.3.3) :

$$Eu = \frac{p^\circ}{\rho (V^\circ)^2}$$

Alors, d'après (6.175a), C_{fM} se présente comme le produit du nombre d'Euler et d'un *facteur d'allongement* $L_c / L = D_h / 4L$:

$$\boxed{\frac{1}{2} C_{fM} = Eu \frac{D_h}{4L}} \quad (6.175b)$$

Il est important de souligner que, en écoulement non établi, C_{fM} n'est généralement pas réductible à une fonction du seul nombre de Reynolds. Aussi, les formules donnant C_{fM} uniquement en fonction de Re ne peuvent avoir qu'une validité restreinte à des classes d'écoulements bien spécifiées.

6.7.3. – Coefficient de perte de charge singulière

A ce point de l'exposé, la question qui vient tout naturellement à l'esprit est celle-ci : quelle est la part spécifique d'une singularité dans la perte de charge ΔX ? Il faut, pour l'apprécier, comparer le cas « non établi » à une situation de référence.

Le plus simple est de choisir comme référence un écoulement établi avec le même Reynolds et avec la même pression motrice p_1^* sur S_1 . Alors, dans cet écoulement, la pression en S_2 serait p_{2e}^* , et la perte de charge entre S_1 et S_2 aurait pour valeur, d'après (6.116a) :

$$\Delta X_e = p_1^* - p_{2e}^* \quad (6.176a)$$

La « perte de charge singulière » ΔX_s , due à la seule présence de la singularité, sera donc par définition :

$$\Delta X_s = \Delta X - \Delta X_e \quad (6.176b)$$

⚠ Un problème se pose toutefois pour caractériser l'écoulement de référence lorsqu'il y a variation de section, puisqu'alors Re est également variable. *On convient dans ce cas de prendre pour référence l'écoulement établi correspondant à la plus petite des deux sections.*

Bien entendu, si la comparaison se faisait par rapport à un écoulement tel que p_1^* et p_2^* soient les mêmes dans les deux cas, c'est le débit qui serait affecté par la présence de la singularité. On pourrait alors parler de *perte de débit* (voir aussi à ce sujet § 6.2.2♠).

Toujours est-il que l'effet d'une singularité est d'alourdir la facture d'énergie : ΔX_s est donc positive. En d'autres termes, à nombre de Reynolds égal, un écoulement non établi est plus dissipatif qu'un écoulement établi.

L'analyse des écoulements non établis a montré aussi que la perte de charge n'y est pas liée uniquement au frottement pariétal, comme c'est le cas en écoulement établi (relation 6.173) : elle dépend également de la déformation du profil de vitesse U , qui se manifeste par un transfert entre flux de quantité de mouvement (termes en $\int \rho U^2 dS$) et débit d'énergie cinétique (termes en $\int \rho U^3 dS$).

La connaissance des conditions aux limites sur S_1 et S_2 rendra possible le calcul des termes en U . Mais il n'en va pas de même avec le terme de frottement τ_{pM} : on ne dispose d'aucun moyen simple pour le calculer, ni même pour en faire correctement une évaluation approchée ; il faut recourir soit à un calcul complet, presque toujours très lourd, soit à l'expérience.

Pour simplifier les choses, on a convenu d'adopter face à ce problème une attitude réductrice. La perte de charge singulière ΔX_s ayant été définie par (6.176b) aussi bien en régime laminaire que turbulent, on pose :

$$\boxed{\Delta X_s = \zeta \rho \frac{V_d^2}{2}} \quad (6.177)$$

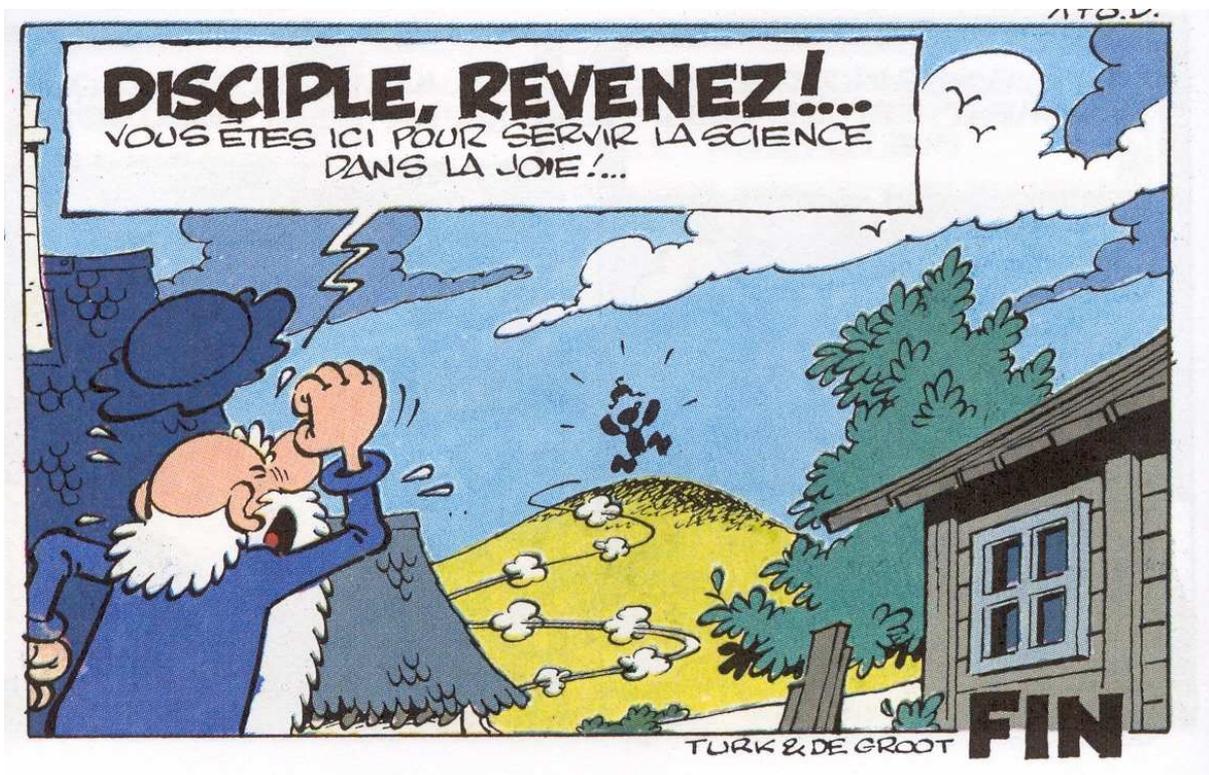
où ζ (prononcer « dzèta ») est la 6ème lettre de l'alphabet grec, hélas souvent représentée, dans l'écriture manuscrite, par un vibron sans forme spécifique.

Cette relation introduit donc un paramètre sans dimension ζ appelé « coefficient de perte de charge singulière », qui est en fait un nombre d'Euler (§ précédent). De la sorte, ΔX_s se présente sous la même forme que ΔX en écoulement établi (6.140b). La perte de charge totale s'écrira donc :

$$\Delta X = \Delta X_e + \Delta X_s = \left(4 C_f \frac{L}{D_h} + \zeta \right) \rho \frac{V_d^2}{2} \quad (6.178)$$

Il est clair que pour une géométrie donnée, ζ (dzèta !) dépend en particulier de Re et des conditions aux limites. A l'instar de C_f , ce n'est donc généralement pas une constante. Toutefois, dans tous les calculs de circuits fluides qui ne requièrent pas une précision exemplaire, on attribue aux coefficients ζ des valeurs conventionnelles, parfois un peu approximatives, mais qui permettent à tout le moins d'estimer les ordres de grandeur des pertes de charge. Dans le chapitre 7, nous donnerons un échantillon représentatif des situations les plus courantes.

L'un des avantages apportés par le coefficient ζ (dzèta !!) est de permettre un calcul simple du débit en fonction des conditions aux limites. Dans les écoulements établis, nous avons vu que q_v est soit proportionnel à $\partial p^* / \partial x$ (en régime laminaire, § 6.2.4), soit exprimé par une fonction analytique simple de U_τ , et donc de $\partial p^* / \partial x$ (en régime turbulent, 6.58b et § 6.4.4). Mais en écoulement non établi on ne voit même pas comment l'on pourrait bien faire sortir des équations une expression analytique du débit. Au contraire, en faisant intervenir le coefficient de perte de charge singulière ζ , on tourne la difficulté puisqu'il est alors aisé, à partir de (6.178), d'obtenir la vitesse V_d , d'où le débit $q_v = S V_d$.



(du chapitre)