

Chapitre 5

DYNAMIQUE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS EXTERNES

Une erreur peut devenir exacte selon que celui qui l'a commise s'est trompé ou non.

Pierre DAC

Avec les couches limites turbulentes, nous abordons la première retombée concrète du chapitre 3, qui traitait des écoulements turbulents. Ici, seuls seront mis à contribution le modèle pseudo-laminaire élémentaire et le modèle $k - \varepsilon$, car ils permettent de répondre aux principales questions qui peuvent se poser dans une étude d'ingénierie.

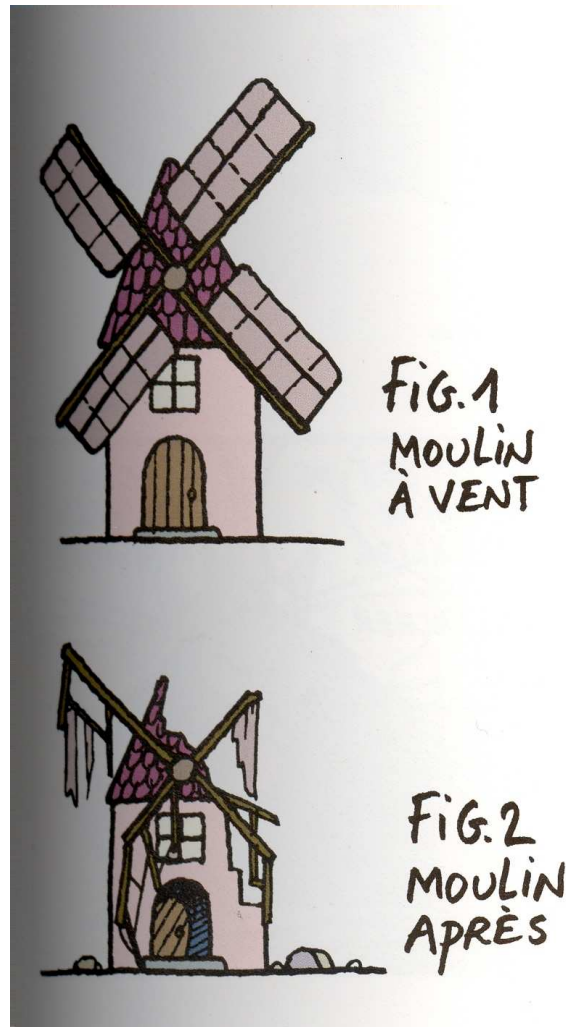
Nous examinons d'abord la structure de la couche limite turbulente, beaucoup plus complexe que la couche limite laminaire, ainsi que les hypothèses de calcul qui s'y rapportent. L'étude du champ de vitesse fait ensuite l'objet d'une première approche, simple, basée sur l'intégration directe de l'équation de quantité de mouvement dans la couche limite.

L'analyse complète du problème est abordée dans le cadre de la méthode différentielle, dont l'élaboration a été amorcée au chapitre 4. C'est ici l'occasion de souligner un point important ; en dépit de différences physiques considérables, les écoulements laminaires et turbulents peuvent être traités à l'aide du même outil mathématique, du moins tant que l'on dispose d'un modèle pour la viscosité cinématique turbulente ν_t . Sous cette condition, la méthode différentielle est élégante, et s'adapte parfaitement à des écoulements sans similitude des vitesses, situation qui est précisément celle des couches limites turbulentes. Elle s'applique également aux écoulements laminaires qui ne bénéficient pas de l'auto-similarité des vitesses (voir ch. 6), à la seule condition de faire $\nu_t = 0$. Nous aurions pu d'ailleurs la présenter d'emblée sous sa forme la plus générale au chapitre 4, et exécuter ensuite les cas particuliers ($dU_\infty / dx \neq 0$, puis $dU_\infty / dx = 0$, etc.). Si nous avons procédé en sens inverse, c'est pour permettre au non-spécialiste un accès plus aisé à ces cas simples usuels.

La méthode semi-intégrale, que nous abordons ensuite, constitue un complément de la précédente. Bien que ses capacités soient un peu plus limitées, elle est intéressante par le fait qu'elle donne des expressions analytiques de U , δ , τ_p et C_f . Par là, elle se révèle aussi précieuse dans les calculs d'avant-projets que dans l'élaboration de problèmes d'examens !

En s'appuyant sur les résultats de la méthode semi-intégrale, la technique d'intégration directe de la première équation de Navier-Stokes conduit à des évaluations correctes et assez simples du coefficient de frottement C_f pour les écoulements turbulents sur paroi poreuse et sur paroi rugueuse.

Enfin, une place relativement importante est accordée aux jets turbulents, libres ou pariétaux. Cela tient à plusieurs raisons : *Primo*, malgré leur importance pratique (génie climatique, dispersion d'effluents, mélangeage...) ils sont peu évoqués, particulièrement dans les ouvrages en français. *Secundo*, ils constituent des applications complémentaires intéressantes de la méthode différentielle ; en particulier, l'étude du jet rond est une bonne occasion d'appliquer la méthode en coordonnées cylindriques.



Ph. Gelluck, Le Chat, Ed. Casterman

5.1. – COUCHE LIMITE SUR UNE PLAQUE PLANE SANS GRADIENT DE VITESSE EXTÉRIEURE

5.1.1. – Données expérimentales et interprétation

5.1.1.1. – PRÉSENTATION

Revenons, pour commencer, à l'analyse expérimentale d'un écoulement sur une plaque plane, amorcée au chapitre 4 (fig.4.3, § 4.2.3), et examinons maintenant ce qui se passe dans la région pleinement turbulente, au-delà de la zone de transition.

On observe à proximité de la paroi un écoulement de couche limite, c'est-à-dire où la vitesse moyenne U , nulle à la paroi, varie d'abord très rapidement lorsqu'on s'éloigne de la plaque, puis plus lentement pour tendre vers sa valeur asymptotique U_∞ , vitesse de l'écoulement extérieur (fig. 5.1). L'épaisseur de couche limite sera définie comme en écoulement laminaire : c'est l'ordonnée δ pour laquelle on a $U(\delta)/U_\infty = 0,99$.

Une première observation fait apparaître une différence qualitative entre couches limites laminaires et turbulentes : le gradient de vitesse à la paroi est sensiblement plus important dans une couche limite turbulente. Une image approximative en est donnée sur la figure 5.1 (qui n'est pas à l'échelle) en fonction de l'ordonnée adimensionnelle y/δ .

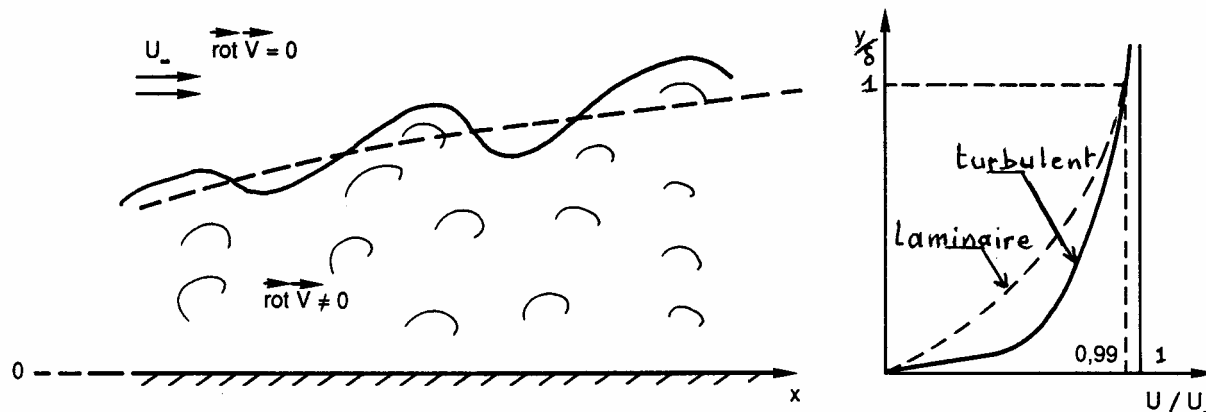


FIG. 5.1. – Couche limite turbulente

Admettons en outre que l'écoulement extérieur soit laminaire (ou faiblement turbulent) et sans gradient de vitesse extérieure ($U_\infty = cte$). Dans ce cas, contrairement à la couche limite laminaire, qui ne se distingue de l'écoulement extérieur par aucun élément tangible, la couche limite turbulente apparaît séparée de l'écoulement extérieur par une interface irrégulière et fluctuante dans le temps (fig. 5.1). L'écoulement est fortement tourbillonnaire dans la couche limite turbulente, alors qu'il est irrotationnel dans l'écoulement extérieur.

La définition du nombre de Reynolds local étant conservée ($Re_x = U_\infty x/\nu$ avec $x = 0$ au bord d'attaque de la plaque), la valeur critique Re_{xc} qui caractérise la transition laminaire-turbulent est de l'ordre de $3 \cdot 10^5$ à $5 \cdot 10^5$ si la paroi est très lisse et l'écoulement extérieur très régulier. Elle peut descendre à $0,5 \cdot 10^5$ si l'on est loin des conditions précédentes. En l'absence de précisions, on pourra considérer que $Re_{xc} \approx 10^5$ est un ordre de grandeur correct.

Cependant, les valeurs précédentes ne sont pas fiables quand il existe un gradient de vitesse dans l'écoulement extérieur. En effet, le nombre de Reynolds local Re_x ne prend en compte que U_∞ et x , alors que le phénomène est aussi gouverné par le gradient dU_∞/dx . Lorsque cette situation se produit, on préfère souvent remplacer x par une longueur de référence plus caractéristique de la couche limite, à savoir l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 (voir 4.92) et utiliser un Reynolds local défini par :

$$Re_{\delta_2} = \frac{U_\infty \delta_2}{\nu} \quad (5.1)$$

La même démarche est d'ailleurs opérée avec la couche limite laminaire, qui pose le même problème. Alors la transition laminaire - turbulent correspond à Re_{δ_2} voisin de 190.

5.1.1.2. – STRUCTURE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE

Les observations dont nous avons d'abord fait état concernaient l'aspect global de l'écoulement. Mais une analyse plus fine permet de mettre en évidence deux zones assez distinctes dans la couche limite turbulente.

♣ *Une couche externe*, représentant environ 80% de l'épaisseur totale δ , où le gradient de vitesse $\partial U / \partial y$ est faible, et où la distribution de vitesse $U(y)$ n'est guère influencée par les conditions à la paroi (elle dépend essentiellement du fluide et de l'écoulement extérieur).

◆ *Une couche interne* très proche de la paroi, dont l'épaisseur est de l'ordre de $0,2 \delta$. A l'inverse de la couche externe, l'écoulement dépend ici principalement des conditions à la paroi (rugosité de la surface en particulier) ainsi bien évidemment que de la nature du fluide. Dans cette zone, la loi de vitesse $U(y)$ est dénommée *loi de paroi*.

Un examen attentif conduit encore à distinguer deux sous-couches dans cette couche interne. Si l'on représente la loi de paroi en coordonnées linéaires, on ne voit rien, mais si on exécute le tracé en coordonnées semi-logarithmiques on distingue nettement deux lois de vitesse, l'une applicable très près de la surface, l'autre dans la partie externe de la couche interne (fig. 5.2). Les régions correspondantes de l'écoulement sont appelées respectivement « sous-couche visqueuse » et « zone logarithmique ».

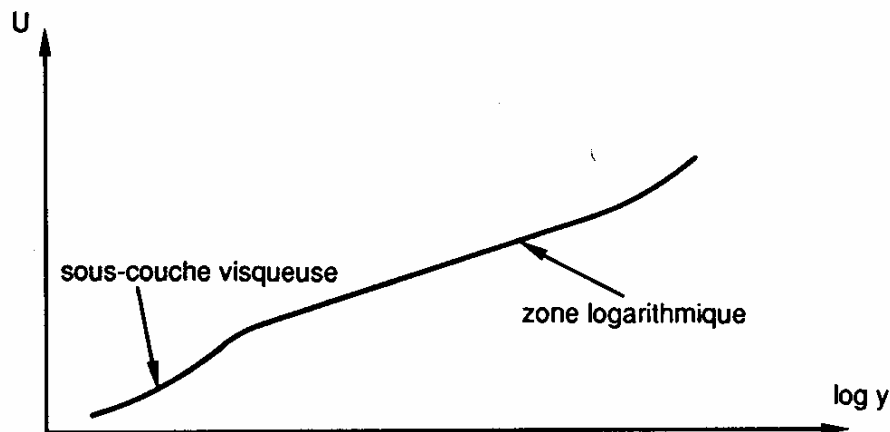


FIG. 5.2. – Aspect de la distribution de vitesse U en fonction de $\log y$ dans la couche interne

♥ *La sous-couche visqueuse* est une zone où la viscosité moléculaire ν devient prépondérante par rapport à la viscosité turbulente ν_t qui tend vers zéro au voisinage de la paroi : en effet, la macro-échelle des structures turbulentes se trouve de plus en plus limitée par la proximité de la surface matérielle (§ 3.6.2.1). Dans cette région l'écoulement est donc laminaire.

La dynamique de la sous-couche visqueuse est assez complexe. Son épaisseur tend à augmenter dans le sens de l'écoulement, jusqu'à l'apparition d'une instabilité ; il s'ensuit l'émission d'une bouffée tourbillonnaire qui entraîne son amincissement, et un nouveau cycle recommence (fig. 5.3). La transition laminaire-turbulent au voisinage de l'abscisse critique x_c correspond d'ailleurs à un processus analogue.

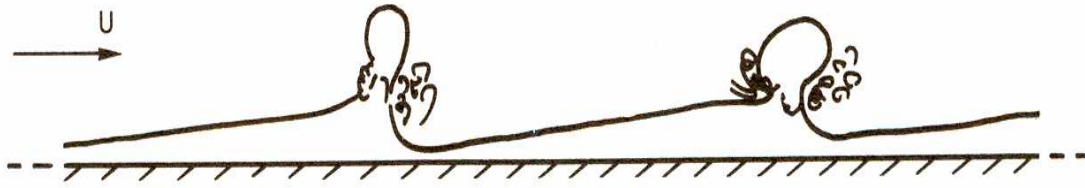


FIG. 5.3. – Évolution de la sous-couche visqueuse

Ce mécanisme d'instabilité est donc générateur de turbulence dans la couche limite puisqu'il a pour effet d'injecter dans l'écoulement un paquet de fluide beaucoup plus lent, échangé en quelque sorte contre un paquet plus rapide qui vient réalimenter la sous-couche visqueuse.

Ainsi, l'énergie cinétique de turbulence est générée par la collision entre le fluide de la couche limite et la bouffée plus lente qui lui arrive. Pendant ce temps, dans la sous-couche laminaire, la viscosité moléculaire agit pour « laminer » les tourbillons, et transforme l'énergie cinétique turbulente en chaleur. Un nouvel état plus stable s'installe, dans lequel la production d'énergie cinétique turbulente est du même ordre de grandeur que la dissipation.

La sous-couche visqueuse représente moins de 1% de l'épaisseur totale de la couche limite.

♠ *La zone logarithmique* constitue la partie extérieure de la couche interne. Comme son nom l'indique, la vitesse moyenne U varie ici comme $\log y$, ce qui se traduit en coordonnées semi-logarithmiques par une loi linéaire. Dans cette zone, la viscosité turbulente a pris le pas sur la viscosité moléculaire.

Il s'agit maintenant de bâtir des modèles théoriques propres à décrire les différents aspects de la couche limite turbulente, et à fournir des procédures de calcul.

5.1.2. – Équations de la couche limite turbulente

Nous partons de l'équation de quantité de mouvement aux valeurs moyennes (3.24) suivant la direction x ; elle s'écrit ici, en faisant $V_j = U$, $\vec{F} = \vec{g}$, et en prenant en compte la pression motrice p^* (1.37a) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \text{div} \left\{ \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} U - \overrightarrow{uv} \right\} \quad (5.2)$$

Si l'on s'en tient aux valeurs moyennes des vitesses, les propriétés fondamentales de la couche limite turbulente sont les mêmes que celles de la couche limite laminaire (§ 4.3.1) ; on a en particulier :

$$V \ll U$$

On peut donc adopter la forme simplifiée du modèle pseudo-laminaire (§ 3.3.4.1.♦) en définissant une viscosité cinématique turbulente ν_t telle que :

$$-\overrightarrow{uv} = \nu_t \overrightarrow{\text{grad}} U \quad (5.3a)$$

ce qui est équivalent à :

$$-\overline{u^2} = \nu_t \partial U / \partial x ; \quad -\overline{uv} = \nu_t \partial U / \partial y \quad (5.3b)$$

et (5.2) devient :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \text{div} \left\{ (v + v_t) \overrightarrow{\text{grad}} U \right\} \quad (5.4)$$

Les hypothèses de la couche limite laminaire s'adaptent aux valeurs moyennes U , V , W , mais également à la viscosité turbulente ν_t qui est, rappelons-le, une caractéristique structurelle de l'écoulement. On admettra donc l'approximation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} \ll \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.5)$$

que l'on reporte dans (5.4).

Ainsi, les équations (4.12) ont ici pour correspondantes :

$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$	
$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\}$	(5.6a, b, c)
$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y} = 0$	

Ce sont les équations de la couche limite turbulente.

5.1.3. – Loi de paroi à un paramètre et structure transversale de la couche limite

On appelle communément *lois de paroi* les expressions de la vitesse moyenne $U(y)$ dans la couche interne d'une couche limite turbulente. Ces profils de vitesse dépendent bien entendu des hypothèses et des modèles de calcul adoptés. Progressivement, l'appellation « loi de paroi » a été étendue par différents auteurs aux distributions de température, et même de taux de production d'entropie. Nous présentons ci-dessous les bases des lois dynamiques. L'aspect opérationnel, en particulier le calcul du coefficient de frottement C_f , sera développé plus loin.

5.1.3.1. – HYPOTHÈSES DE CALCUL

Admettons d'abord que l'écoulement extérieur est unidimensionnel, sans gradient de vitesse, et peu ou pas turbulent, soit :

$$U_\infty = \text{cte} ; \quad V_\infty = 0 ; \quad \overline{uv}_\infty = 0 \quad (5.7a)$$

D'après (5.2), il en résulte que :

$$\overline{\partial(p^*)_\infty} / \partial x = 0 \quad (5.7b)$$

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe (4.4.1.1) on arrive à la conséquence :

$$\overline{\partial p^*} / \partial x = 0 \quad \text{dans la couche limite} \quad (5.7c)$$

et l'équation (5.6b) se réduit à :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.8)$$

5.1.3.2. – LOI DE PAROI À UN PARAMÈTRE

♣ Au départ, aucune considération physique ne permet de poser des hypothèses raisonnables sur les propriétés du champ de vitesse dans la couche interne. La seule donnée tangible est de nature expérimentale : c'est l'aspect logarithmique de ce profil de vitesse à partir d'une certaine distance de la paroi (§ 5.1.1.2). Par tâtonnements, comme c'est souvent le cas en physique, on s'est aperçu qu'une loi logarithmique pouvait être obtenue en conjuguant une hypothèse simplificatrice sur le champ de vitesse avec l'hypothèse de Prandtl du modèle pseudo-laminaire (§ 3.3.4.3 ♦).

♦ L'hypothèse sur le champ de vitesse est la suivante : « *le premier membre de l'équation (5.8) est nul* ». Il reste alors :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = 0 \quad (5.9)$$

Le profil transversal de vitesse U dans la couche interne est donc régi par l'équation :

$$(\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} = cte \quad (5.10)$$

Cette relation traduit le fait que la contrainte totale de cisaillement est constante. Elle est en effet la somme de deux termes :

- la tension visqueuse (1.18), que nous noterons ici τ_v , et qui s'écrit avec les hypothèses de la couche limite :

$$\frac{\tau_v}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.11a)$$

- la contrainte de Reynolds τ' (formules 3.28a et 5.3), qui est une contrainte tangentielle d'origine turbulente :

$$\frac{\tau'}{\rho} = -\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.11b)$$

La tension tangentielle totale est donc :

$$\tau = \tau_v + \tau' = \rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} = cte \quad (5.11c)$$

Si τ est indépendante de y , elle est évidemment égale à sa valeur τ_p à la paroi :

$$\boxed{\tau = \tau_p = cte} \quad (5.12a)$$

d'où :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5.12b)$$

♥ Dans le modèle pseudo-laminaire, la couche interne se caractérise par le fait que le paramètre $(\nu + \nu_t)$ varie de la valeur ν à la paroi jusqu'à la valeur $\nu_t \gg \nu$ lorsqu'on atteint la zone pleinement turbulente. Le problème se pose maintenant d'exprimer ν_t analytiquement.

En nous appuyant sur l'analyse des macro-échelles de turbulence (§ 3.6.2.1 ♦) nous pouvons adopter pour la longueur de mélange la loi (3.33a) :

$$l = K y \quad (5.13a)$$

Cependant, comme aucun argument théorique ne permet d'affirmer que l suit rigoureusement une loi linéaire, nous allons lui affecter un *paramètre correctif* $a(y)$ dont le contenu sera précisé plus loin. Nous écrivons donc :

$$l = K y a \quad (5.13b)$$

soit, pour l'expression (3.32) de v_t , avec ici $\partial U / \partial y > 0$:

$$v_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| = K^2 y^2 a^2 \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.13c)$$

et, en reportant dans (5.12b) :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = v \frac{\partial U}{\partial y} + K^2 y^2 a^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (5.13d)$$

Nous n'avons finalement à résoudre qu'une simple équation du second degré en $\partial U / \partial y$, dont la solution est :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4 K^2 y^2 a^2 \frac{\tau_p}{\rho}}}{2 K^2 y^2 a^2}$$

On élimine la racine négative, qui correspondrait à une zone de recirculation, puis on multiplie numérateur et dénominateur par $\left(v + \sqrt{v^2 + 4 K^2 y^2 a^2 \frac{\tau_p}{\rho}} \right)$, ce qui donne :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2 \tau_p}{\rho} \frac{l}{v + \sqrt{v^2 + 4 K^2 y^2 a^2 \frac{\tau_p}{\rho}}} \quad (5.14a)$$

d'où en intégrant :

$$U = \frac{2 \tau_p}{\rho} \int_0^y \frac{du}{v + \sqrt{v^2 + 4 K^2 u^2 a^2 \frac{\tau_p}{\rho}}} \quad (5.14b)$$

Le seul paramètre qui intervient dans cette expression est donc le frottement pariétal τ_p , ce qui justifie l'expression de *loi de paroi à un paramètre*.

5.1.3.3. – FORME ADIMENSIONNÉE DE LA LOI DE PAROI À UN PARAMÈTRE

♣ A ce point du raisonnement, il est intéressant de généraliser la démarche en présentant la loi de paroi sous forme adimensionnée.

Le critère de similitude Γ_τ (2.22) relatif aux forces de viscosité a pour définition :

$$\Gamma_\tau = \frac{\tau_p}{\rho (V^\circ)^2} \quad (5.15a)$$

Nous avons dit que la vitesse U_∞ ne détermine pas de façon directe la dynamique de la couche interne. D'ailleurs elle ne figure pas dans la loi de paroi. C'est le gradient $\partial U / \partial y$ qui gouverne la turbulence, et qui est présent par l'intermédiaire de τ_p dans l'expression de U . Pour cette raison, on préfère comme vitesse de référence V° la « *vitesse de frottement* » U_τ , caractéristique de la couche interne, définie par :

$$\boxed{V^\circ = \sqrt{\tau_p / \rho} = U_\tau} \quad (5.15b)$$

En outre, plutôt que x , on choisit pour *longueur de référence* :

$$L^\circ = \nu / U_\tau \quad (5.15c)$$

Alors, $\Gamma_\tau = C_f / 2 = 1$ (au lieu de $\Gamma_\tau = \tau_p / \rho U_\infty^2$) et $1 / \Gamma_\nu = Re = V^\circ L^\circ / \nu = 1$ (au lieu de $Re = U_\infty x / \nu$) ; c'est-à-dire qu'avec ce choix des grandeurs de référence la similitude vis-à-vis des forces de viscosité est toujours assurée à l'échelle 1. Par contre, si l'on se plaçait dans le cas $\partial \bar{p}^* / \partial x \neq 0$, le critère de similitude Γ_p relatif aux forces de pression serait différent de 1 (nombre d'Euler, définition 2.20c).

Les conventions précédentes permettent alors de construire :

- une *vitesse adimensionnée* :

$$U^+ = U / U_\tau \quad (5.16a)$$

- une *ordonnée adimensionnée* (la lettre grecque ξ se prononce *ksi*) :

$$\boxed{\xi = y / L^\circ = y U_\tau / \nu} \quad (5.16b)$$

qui s'écrit encore, avec (5.15b) :

$$\xi = \frac{y}{\mu} (\tau_p \rho)^{1/2} \quad (5.16c)$$

♪♪ Signalons au passage que la forme de (5.16b) incite parfois à regarder ξ comme un nombre de Reynolds. Cette interprétation n'apporte pas grand-chose, et il est plus clair de considérer ξ comme une coordonnée d'espace.

◆ En introduisant ces différents paramètres dans l'équation (5.14b), on obtient la loi de paroi adimensionnée :

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} = \int_0^\xi \frac{2 du}{1 + \sqrt{1 + 4 K^2 u^2 a^2}} \quad (5.17)$$

où u est une variable muette d'intégration.

Cette intégrale n'a pas d'expression analytique simple, et elle doit faire l'objet d'une tabulation numérique.

♥ Le calage avec l'expérience donne pour la constante K , appelée *constante de Karman* (§ 3.3.4.3 ◆), une valeur comprise, selon les auteurs, entre 0,40 et 0,42. En étant conscient d'une relative imprécision sur ce terme (de l'ordre de 5%), nous adopterons la valeur la plus généralement admise :

$$K = 0,40 \quad (5.18)$$

Quant au paramètre « a », il s'avère que si on le prend égal à 1 (ce qui veut dire $l = Ky$) on sous-évalue assez nettement U^+ à proximité de la paroi ; il faut donc procéder à une correction avec $a(y) < 1$. Cela tient en particulier à ce que l'approximation (5.9) est un peu drastique, et ne correspond pas parfaitement à la réalité physique.

Une des expressions les plus satisfaisantes est celle de van Driest :

$$a = 1 - \exp\left(\frac{-\xi}{25}\right) \quad (5.19)$$

Rappelons au passage que $\xi = yU_\tau / \nu$, et que $U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$.

On trouvera sur la figure (5.4) la courbe $U^+(\ln \xi)$ calculée à partir de (5.17) avec la correction de van Driest pour a .

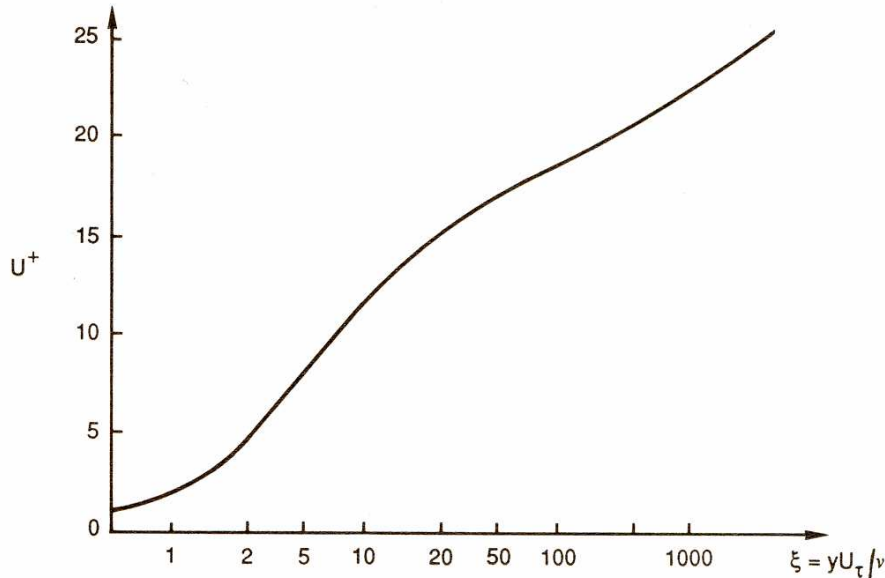


FIG. 5.4. – Loi de paroi dans la couche interne

🎵 Les variables U^+ et ξ (ksi !) ont été introduites par G. Comte – Bellot (1963). Leur intérêt est que les lois $U^+(\xi)$ sont indépendantes de Re . Cette propriété a été vérifiée par de nombreux auteurs. Elles ont quand même un inconvénient : lorsqu'il y a un point de stagnation (au bord d'une zone de recirculation), le gradient de vitesse est nul à la paroi, et $U_\tau = 0$. De ce fait, ξ n'est plus défini. Cela entraîne une difficulté en convection pour le calcul du flux de chaleur à la paroi (§ 5.1.5.3).

5.1.3.4. – COMMENTAIRES SUR LES HYPOTHÈSES

Comme nous l'avons déjà dit, les conditions théoriques permettant aux résultats de coller avec les données expérimentales sont difficiles à justifier physiquement, sauf *a posteriori*. Avec l'hypothèse (5.9), nous avons choisi l'assertion la plus brutale. On trouve dans la littérature deux autres présentations, pas forcément plus convaincantes.

♣ Certains auteurs adoptent la propriété $\tau = \tau_p = cte$ (5.12a) comme postulat, au regard du fait que la couche interne étant très mince, il est naturel (?) d'y considérer la contrainte de cisaillement comme constante. La relation (5.9) devient alors une conséquence de cette condition.

◆ D'autres considèrent que l'écoulement dans la couche interne est assez proche d'un *écoulement de Couette*, caractérisé par :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad (5.20)$$

d'où la relation (5.9).

Il s'agit d'un écoulement établi que l'on rencontre dans les conduits de section constante (Ch. 6). Cela vient un peu en contradiction avec les données expérimentales, qui montrent une couche limite s'épaississant (lentement il est vrai) dans le sens de l'écoulement.

♥ Une autre interprétation de (5.9) est que les termes $U \partial U / \partial x$ et $V \partial U / \partial y$ sont du même ordre de grandeurs dans la couche interne et que leur somme est nulle (ils sont de signe contraires). C'est un point de vue intéressant, mais qui n'est pas plus évident *a priori* que les affirmations précédentes.

5.1.4. – Hypothèse de l'équilibre local dans le modèle $k - \varepsilon$

♣ En thermodynamique des processus irréversibles, on postule l'existence, dans certaines conditions, d'un état d'équilibre local où la production d'énergie due aux fluctuations équilibre exactement sa dissipation :

$$\text{équilibre local} \Leftrightarrow \text{production} = \text{dissipation} \quad (5.21)$$

On montre alors que cet état minimise la production d'entropie et (ce qui revient au même) assure une régression optimale des fluctuations.

Au chapitre 3 (équation 3.50 et § 3.4.1.2 ♦) nous avons défini :

- la *production* d'énergie cinétique turbulente :

$$(a) = - \overline{v_j \vec{v} \cdot \text{grad} V_j}$$

soit ici, avec les hypothèses de la couche limite :

$$(a) = - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.22a)$$

- la *dissipation* (3.57b) :

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} \quad (5.22b)$$

♦ Avec le modèle à un paramètre, en se référant à (5.12b) dans la zone logarithmique (où ν est négligeable devant ν_t), on voit que :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.22c)$$

Toujours dans la zone logarithmique, sachant que $\tau_v \ll \tau'$ (5.11 et 5.12)

$$- \overline{uv} = \frac{\tau'}{\rho} \approx \frac{\tau_p}{\rho} \quad (5.22d)$$

♥ Appliquons alors l'hypothèse de l'équilibre local (5.21) : $(a) = \varepsilon$
D'après (5.22a et b) cette égalité devient :

$$- \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t}$$

Tenons compte maintenant de (5.22d et c). Alors :

$$-\frac{\tau_p}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_p}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} = C_\mu k^2 \frac{\partial U / \partial y}{\tau_p / \rho} \quad (5.23a)$$

d'où une relation entre k et U_τ : $k^2 = \frac{1}{C_\mu} \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^2$, c'est-à-dire :

$$k = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} = cte \quad (5.23b)$$

♠ On élimine enfin v_t dans ε . Pour cela, partons de (5.14a) qui, dans la zone logarithmique (où v est négligeable devant v_t et où le paramètre correctif a (5.19) est voisin de 1), se réduit à :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \frac{1}{K y} \quad (5.24a)$$

A l'aide de (5.22c), v_t devient :

$$v_t = \frac{\tau_p / \rho}{\partial U / \partial y} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} K y = U_\tau K y \quad (5.24b)$$

d'où l'expression de ε , cette fois-ci en fonction de U_τ :

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{v_t} = C_\mu \frac{k^2}{U_\tau K y}$$

et avec (5.23b) :

$$\varepsilon = \frac{U_\tau^3}{K y} \quad (5.24c)$$

Récapitulons, car ceci peut paraître légèrement embrouillé : *en combinant dans la zone logarithmique la propriété $\tau = cte$ et l'hypothèse de l'équilibre local, on parvient à exprimer k et ε uniquement en fonction de U_τ . En outre, $k = cte$ et ε suit une loi en $1/y$.*

Ceci étant, dans une couche limite turbulente, la condition d'équilibre local n'est pas parfaitement vérifiée. Malgré tout, les formules que nous venons d'obtenir pour k et ε seront utiles pour le calcul numérique de U dans la couche externe au moyen du modèle $k - \varepsilon$ (§.5.1.6).

♪ Une petite curiosité pour conclure ce paragraphe. Le lecteur n'a certainement pas oublié la brève apparition, au chapitre 3, d'une « échelle de vitesse de la turbulence » (§.3.6.3.4) :

$$v^\circ = k^{1/2}$$

On voit alors que la formule (5.23b) s'interprète de la façon suivante : dans le cadre des hypothèses adoptées, l'échelle de vitesse de la turbulence s'identifie (à un facteur $C_\mu^{1/4}$ près, voisin de 1) à la vitesse de frottement :

$$U_\tau = v^\circ C_\mu^{1/4} \cong v^\circ \quad (5.24d)$$

5.1.5. – Vitesse et température dans la loi à un paramètre

5.1.5.1. – LOI DE VITESSE DANS LA SOUS-COUCHE VISQUEUSE

Dans la sous-couche visqueuse, la viscosité turbulente est négligeable devant la viscosité moléculaire. On a donc à partir de (5.12) :

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} = cte = \frac{\tau_p}{\rho}$$

Il vient en intégrant, puisque $U = 0$ à la paroi :

$$\boxed{U = \frac{\tau_p}{\mu} y} \quad (5.25a)$$

ou encore, sous forme adimensionnée, avec U_τ (5.15b) et ξ (5.16b) :

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} = \xi \quad (5.25b)$$

Dans la sous-couche visqueuse, la vitesse évolue donc linéairement en fonction de ξ (ou de y).

Il faut noter que lorsque ξ croît, la loi de vitesse (5.17) s'écarte très lentement de la loi linéaire tant que $\xi \lesssim 3$. On peut donc admettre en pratique pour *épaisseur de la sous-couche visqueuse* : $\xi \approx 3$, ce qui représente une dimension de l'ordre de $\delta/10^3$.

5.1.5.2. – LOI DE VITESSE DANS LA COUCHE LOGARITHMIQUE

Considérons maintenant, à l'autre extrémité de la couche interne, la zone telle que $4K^2 \xi^2 a^2 \gg 1$. Ceci correspond donc à $\nu_t \gg \nu$: la viscosité turbulente est devenue prépondérante, avec $a \approx 1$ (5.19). Alors, d'après (5.17) :

$$\frac{U}{U_\tau} = \int_0^\xi \frac{2}{\sqrt{4K^2 u^2}} du = \frac{1}{K} \int_0^\xi \frac{du}{u}$$

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \text{Ln} \xi + C \quad (5.26a)$$

où C est une constante déterminée expérimentalement, pour laquelle on s'accorde sur la valeur :

$$C = 5 \quad (5.26b)$$

Rappelons que $K = 0,4$. Ainsi, avec les coefficients numériques, (5.26a) s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \text{Ln} \xi + 5} \quad (5.26c)$$

où $\xi = yU_\tau/\nu$ (5.16b).

La loi de vitesse dans cette région est une loi logarithmique, justifiant la terminologie employée.

En comparant (5.26c) avec les valeurs numériques tirées de (5.17) et avec les valeurs expérimentales, on constate que **la validité de la loi logarithmique est limitée à la zone :**

$$\mathbf{30 \lesssim \xi \lesssim 500}$$

le palier supérieur $\xi \approx 500$ correspondant à $y \approx 0,2 \delta$.

Au-delà de $\xi \approx 500$, l'expression (5.13c) de ν_t n'est plus adaptée. Enfin, dans la région intermédiaire $3 \lesssim \xi \lesssim 30$, appelée aussi *zone tampon*, il faut recourir à (5.17) et (5.19).

!!! Une simplification commode consiste à escamoter la zone tampon en prolongeant à droite la loi linéaire (5.25b) et à gauche la loi logarithmique (5.26c) jusqu'à leur point d'intersection ξ_c , tel que, la vitesse correspondante étant U_c :

$$\frac{U_c}{U_\tau} = \xi_c = 2,5 \text{ Ln } \xi + 5 \text{ soit } \xi_c = 10,8 \quad (5.26d)$$

mais ceci a pour inconvénient de surévaluer un peu la vitesse U dans la zone tampon.

Ajoutons pour compléter cette brève description que l'épaisseur totale ξ_t de la couche limite varie entre 2000 et 3000 environ.

5.1.5.3. – LOI DE TEMPÉRATURE DANS LA COUCHE INTERNE

Des propriétés analogues ont été mises en évidence pour le profil de température dans la couche interne (Hishida, Nagano, 1979) en introduisant la température adimensionnée :

$$T^+ = \frac{\rho C_p U_\tau (T_p - T)}{\varphi_p} \quad (5.27a)$$

où φ_p et T_p sont respectivement la densité de flux de chaleur et la température à la paroi. On distingue :

- une *sous-couche conductive* avec une loi linéaire analogue à (5.25b):

$$T^+ = Pr \xi \quad (5.27b)$$

- une *zone tampon*

- une *zone logarithmique* avec par exemple comme loi de température (citée par Lacasse et al., 2004) :

$$T^+ = 2,5 Pr_t \text{ Ln } \xi + 15 Pr^{2/3} - 1,25 Pr_t \left\{ 1 + \text{Ln } \frac{0,4}{10^{-3} Pr_t} \right\} \quad (5.27c)$$

Les bornes de ces trois zones thermiques sont assez élastiques selon les auteurs. En première approximation, on pourra prendre les mêmes que pour la sous-couche dynamique.

5.1.5.4. – LOI DE VITESSE DÉFICITAIRE DANS LA COUCHE EXTERNE

Dans la couche externe, qui représente environ 80 % de l'épaisseur de la couche limite (soit : $0,2\delta \lesssim y \lesssim \delta$), la vitesse U varie beaucoup plus lentement que dans la couche interne. En outre, elle y est principalement influencée par l'écoulement libre extérieur.

C'est donc plutôt la différence $U_\infty - U$ que l'on va chercher à représenter ici. Cependant, le modèle pseudo-laminaire est moins utilisable dans cette région car on ne sait pas exprimer la viscosité turbulente ν_t par une loi simple. On peut alors tourner la difficulté en admettant que la loi logarithmique (5.26c) se prolonge avec un terme correctif qui est fonction de y/δ (loi de sillage de Coles) :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \xi + 5 + B w(y/\delta) \quad (5.28)$$

Il est plus commode ici de laisser tomber le paramètre $\xi = yU_\tau/\nu$, et de le remplacer par l'ordonnée réduite déjà utilisée au chapitre 4 :

$$y^+ = y/\delta \quad (5.29)$$

Alors, (5.28) s'écrit :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{yU_\tau}{\nu} + 5 + B w(y^+) \quad (5.30a)$$

Pour $y = \delta$, c'est-à-dire $y^+ = 1$, on a $U \simeq U_\infty$, d'où :

$$\frac{U_\infty}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{\delta U_\tau}{\nu} + 5 + B w(1) \quad (5.30b)$$

En soustrayant membre à membre (5.30a) de (5.30b), il vient :

$$\frac{U_\infty - U}{U_\tau} = -2,5 \operatorname{Ln} y^+ - B \{w(y^+) - w(1)\} \quad (5.30c)$$

Evidemment, en procédant de la sorte, nous ne faisons que repousser le problème (ce n'est pas la première fois !! cf. viscosité turbulente, chapitre 3), puisque dans le cadre théorique actuel nous n'avons aucun renseignement sur la forme analytique de w . On doit donc chercher empiriquement une fonction w qui satisfasse aux données expérimentales. *A priori*, de par leur allure, des fonctions de type exponentiel pourraient convenir. Il s'avère cependant que la fonction la plus simple qui marche bien est :

$$w(y^+) = 1 - \cos \pi y^+ \quad \text{soit } w(1) = 2 \quad (5.31a)$$

Alors la détermination expérimentale de B donne :

$$B \simeq 1,34 \quad (5.31b)$$

et (5.30c) devient :

$$\boxed{\frac{U_\infty - U}{U_\tau} = -2,5 \operatorname{Ln} y^+ + 1,34 \{1 + \cos \pi y^+\}} \quad (5.31c)$$

La loi précédente est plutôt convenable à première vue ; elle a quand même deux inconvénients d'ordre pratique : le premier est qu'elle ne satisfait pas exactement la condition à la limite sur la dérivée en $y = \delta$ (car $\partial U / \partial y \neq 0$), mais cela ne prête guère à conséquence. Le second, plus contraignant, est que l'on ne peut pas en tirer l'épaisseur de couche limite. Pour évaluer δ il faudra donc recourir à des analyses plus adaptées (§ 5.3).

Le fait que (5.31c) exprime la différence $U_\infty - U$ justifie l'appellation usuelle de *loi de vitesse déficitaire* qui lui est attribuée. En ce qui concerne le coefficient de frottement C_f , son calcul nécessite d'autres développements, que l'on trouvera au paragraphe 5.3.2.

5.1.6. – Calcul avec le modèle $k - \varepsilon$: loi de paroi à deux paramètres

Nous avons vu que le modèle $k - \varepsilon$ standard ne s'applique pas très bien à proximité immédiate d'une paroi. Une possibilité consiste alors à résoudre les équations en k et ε à partir d'une ordonnée $y = d$ (ou $\xi = \xi_d$) située dans la zone logarithmique, en prenant comme

conditions à la limite leur valeur en d (Lacasse et al.), ce qui donne en revenant à (5.26c), (5.23b) et (5.24c) :

$$\begin{aligned} \frac{U_d}{U_\tau} &= 2,5 \operatorname{Ln} \xi_d + 5 \quad ; \quad \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=d} = \left(\frac{dU}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} \right)_{y=d} = 2,5 \frac{U_\tau}{d} \\ k_d = k &= U_\tau^2 / \sqrt{C_\mu} \quad ; \quad (dk/dy)_{y=d} = 0 \\ \varepsilon_d &= U_\tau^3 / K d \quad ; \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dy} \right)_{y=d} = - \frac{U_\tau^3}{K d^2} \end{aligned} \quad (5.32 \text{ a, b, c})$$

Le choix de d est libre à l'intérieur de la zone logarithmique. Il dépendra surtout du modèle numérique et du maillage utilisé.

5.2. – STRUCTURE BIDIMENSIONNELLE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE : MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE

Nous avons vu au chapitre 4 que l'étude de certaines couches limites laminaires pouvait reposer sur une méthode différentielle très fertile, basée sur une hypothèse d'auto-similarité des profils de vitesse.

Cependant, l'expérience montre que les couches limites turbulentes ne présentent en aucun cas une similitude générale des lois de vitesse. Faut-il dès lors renoncer à les traiter par la méthode différentielle ?

Il n'en est rien, car on peut parfaitement étendre le champ d'application de cette technique en faisant abstraction de toute similitude des vitesses. Ainsi, elle devient adéquate pour l'étude des couches limites turbulentes, mais elle convient également, sous cette forme, aux couches limites laminaires sans auto-similarité.

Ainsi, la méthode différentielle permet de prolonger et de généraliser la méthode de Falkner-Skan, et d'étudier éventuellement tout le développement de la couche limite, du laminaire au turbulent.

5.2.1. – Principe de la méthode (T. Cebeci)

La méthode différentielle générale que nous allons élaborer maintenant repose sur l'ensemble suivant de conventions et d'hypothèses :

- écoulement bidimensionnel, isochore ($\rho = cte$) ;
- présence d'un gradient de vitesse extérieure dU_∞ / dx ;
- composante V_p de la vitesse imposée à la paroi (soufflage ou aspiration) ;
- approximations de la couche limite étendues aux valeurs moyennes (4.8a et 4.8b, § 4.3.1) ;
- prise en compte d'une viscosité turbulente ν_t .

On part des équations aux valeurs moyennes (5.6a, équation de continuité) et (5.6b, qui résulte des deux dernières hypothèses) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.33 \text{ a, b})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\}$$

Les relations (4.18c) et (4.55) reliant le gradient de pression dans la couche limite au gradient de vitesse extérieure s'étendent sans modification aux valeurs moyennes :

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty^*}{\partial x} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad (5.33c)$$

L'équation (5.33b) devient donc, en faisant apparaître le rapport v_t/v dans le dernier terme :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.33d)$$

L'idée que nous allons exploiter maintenant est celle-ci : puisqu'il n'y a pas de similitude générale des lois de vitesse en écoulement turbulent, conservons le formalisme de la méthode différentielle en renonçant à l'hypothèse d'auto-similarité.

Dans le calcul qui suit, nous indiquerons précisément à quelles étapes du raisonnement on s'affranchit de cette hypothèse et de ses implications. On notera que le déroulement de ce calcul est tout à fait parallèle à celui de la méthode de Falkner-Skan.

5.2.2. – Équation générale

♣ On introduit d'abord, comme au chapitre 4, l'ordonnée adimensionnelle :

$$\eta = \frac{y}{\beta(x)} \quad (5.34a)$$

où $\beta(x)$ est une longueur caractéristique de la couche limite.

On définit d'autre part une vitesse adimensionnelle :

$$\frac{U}{U_\infty} = f(\eta, x) \quad (5.34b)$$

au lieu de $U/U_\infty = f(\eta)$ avec l'hypothèse d'auto-similarité.

Cherchons alors une *fonction de courant* Ψ telle que :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.34c)$$

Si Ψ existe, l'équation de continuité est automatiquement satisfaite, et nous en sommes donc débarrassés (§ 4.4.1.3).

Écrivons :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{1}{\beta}$$

La dérivée de Ψ par rapport à η aura donc pour expression :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = U \beta = U_\infty \beta f(\eta, x)$$

et la fonction Ψ s'en déduit par intégration :

$$\Psi = U_{\infty} \beta \int_0^{\eta} f(u, x) du + G(x) \quad (5.34d)$$

Posons :

$$F(\eta, x) = \int_0^{\eta} f(u, x) du + F(0, x) \quad (5.35a)$$

avec :

$$F(0, x) = \frac{G(x)}{U_{\infty} \beta} \quad (5.35b)$$

Cette formule fait intervenir $F(\eta, x)$ et $F(0, x)$ au lieu de $F(\eta)$ et $F(0)$ dans un écoulement auto-similaire. Il s'ensuit que l'expression de Ψ (5.34d) devient :

$$\Psi = U_{\infty} \beta F(\eta, x) = \Psi(\eta, x) \quad (5.35c)$$

Désormais, comme au chapitre 4, on notera ' la dérivation par rapport à η :

$$F'(\eta, x) = \frac{\partial F}{\partial \eta} = f(\eta, x) = \frac{U}{U_{\infty}} \quad (5.35d)$$

ou sous une forme plus ramassée :

$$U = U_{\infty} F' \quad (5.35e)$$

◆ Nous devons maintenant exprimer en fonction de F les termes de l'équation (5.33d) :

! Pour V on a (5.34c) :

$$-V = \frac{\partial \Psi(\eta, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} (U_{\infty} \beta F) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (U_{\infty} \beta F)$$

où $U_{\infty} \beta$ n'est fonction que de x :

$$-V = U_{\infty} \beta \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + U_{\infty} \beta \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{d(U_{\infty} \beta)}{dx}$$

Sachant que, d'après (5.34a) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (5.36)$$

on obtient finalement :

$$V = - F \beta \frac{dU_{\infty}}{dx} + U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) - U_{\infty} \beta \frac{\partial F}{\partial x} \quad (5.37)$$

!! Pour $\partial U / \partial x$, à partir de (5.35d), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\eta, x)}{\partial x} &= \frac{\partial (U_{\infty} F')}{\partial x} + \frac{\partial (U_{\infty} F')}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= F' \frac{dU_{\infty}}{dx} + U_{\infty} \frac{\partial F'}{\partial x} + U_{\infty} \frac{\partial F'}{\partial \eta} \left(- \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= F' \frac{dU_{\infty}}{dx} + U_{\infty} \frac{\partial F'}{\partial x} - U_{\infty} F'' \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \end{aligned} \quad (5.38)$$

!!! De même, pour $\partial U / \partial y$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (U_\infty F') \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= U_\infty F'' \frac{1}{\beta}\end{aligned}\quad (5.39)$$

!!!! Enfin, pour le dernier terme de (5.33d), posons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu \left(1 + \frac{\nu}{\nu_t} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} &= \nu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \\ &= \nu \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) U_\infty \frac{F''}{\beta} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \nu \frac{U_\infty}{\beta^2} \left\{ \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) F'' \right\}'\end{aligned}\quad (5.40)$$

Reportons les relations (5.37) à (5.40) dans (5.33d). Après multiplication des deux membres par $\beta^2 / \nu U_\infty$ et réarrangement des termes, il vient :

$$\begin{aligned}\left\{ \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) F'' \right\}' + \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} (1 - F'^2) + \left(\frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{U_\infty}{\nu} \beta \frac{d\beta}{dx} \right) F F'' \\ = \frac{\beta^2 U_\infty}{\nu} \left(F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (5.41)$$

On pose, comme dans la méthode de Falkner-Skan :

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{U_\infty}{\nu} \beta \frac{d\beta}{dx} = \frac{\beta}{\nu} \frac{d(U_\infty \beta)}{dx} \\ m &= \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx}\end{aligned}\quad (5.42a)$$

Puisqu'il n'y a pas ici auto-similarité des profils de vitesse dans la couche limite, σ et m sont en général des fonctions de x . Aucune contrainte n'étant spécifiée ni sur $U_\infty(x)$ (qui est une donnée) ni sur $\beta(x)$, la relation entre σ et m est arbitraire, ce qui revient à dire que le choix de $\beta(x)$ est lui-même arbitraire.



Pour assurer la meilleure cohérence formelle avec le cas laminaire (§ 4.5.1.4), nous pouvons choisir dans (4.66d) : $K = (1 - m)^{1/m}$ et $x_0 = 0$, d'où :

$$\beta(x) = \left(\frac{\nu x}{U_\infty(x)} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{m + 1}{2}\quad (5.42b)$$

Nous obtenons finalement la forme générale de l'équation différentielle en F :

$$\boxed{\left\{ \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) F'' \right\}' + \frac{m + 1}{2} F F'' + m(1 - F'^2) = x \left(F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right)}\quad (5.43)$$

qui se réduit évidemment à l'équation de Falkner-Skan si $v_t = 0$, si F est indépendant de x et si $m = cte$ (cas particulier où il existe des solutions auto-similaires).

L'équation (5.43) doit donc être résolue numériquement sur un échantillonnage donné de valeurs de x . Pour cela, il est souhaitable de pouvoir exprimer v_t par des formules assez simples (§ 5.2.4).

La résolution est, bien entendu, plus lourde que pour l'équation de Falkner-Skan, mais elle est répétitive puisque le même algorithme est utilisé pour chacune des valeurs de x choisies. En outre, la même équation est utilisable dans toute la couche limite, laminaire, turbulente, ou de transition.

L'avantage de la méthode différentielle par rapport aux équations classiques de la couche limite est que le passage par la fonction de courant Ψ permet d'exprimer U et V en fonction de F , alors que l'élimination directe de V dans (3.33a, b) est impossible. On a donc une équation à une inconnue F pour chaque valeur de x , au lieu de deux équations couplées à deux inconnues U et V .

5.2.3. – Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées à l'équation (5.43) sont les suivantes :

♣ A la paroi : $y = 0$, $\eta = 0$
 La condition sur U est : $U(0) = 0$, d'où :

$$F'(0, x) = 0 \quad (5.44a)$$

La condition sur V est imposée : $V = V_p$, et comme $V = -\partial\Psi/\partial x$, il vient à partir de (5.35c) :

$$V_p = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{\eta=0} = -\frac{d}{dx}\{U_\infty \beta F(0, x)\}$$

où le groupement $\{U_\infty \beta F(0, x)\}$ ne dépend que de x . Bien évidemment, V_p qui est une donnée du problème peut dépendre de x . Vu l'expression de β (5.42b), la fonction $F(0, x)$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$V_p = -\frac{d}{dx}\{(U_\infty \nu x)^{1/2} F(0, x)\}, \text{ et alors :}$$

$$F(0, x) = -(U_\infty \nu x)^{-1/2} \int_0^x V_p(u) du \quad (5.44b)$$

En particulier, si $V_p = cte$:

$$F(0, x) = -V_p \left(\frac{x}{U_\infty \nu}\right)^{1/2} \quad (5.44c)$$

◆ Au loin : $y \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \infty$
 La condition sur U est : $U = U_\infty$, soit :

$$F'(\infty, x) = 1 \quad (5.44d)$$

♥ Le frottement à la paroi peut d'autre part être exprimé par τ_p ou $1/2 C_f$. D'après (5.39) :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\mu \rho}{x} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} F''(0, x) \quad (5.45a)$$

et :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} = \left(\frac{\mu}{\rho U_\infty x} \right)^{1/2} F''(0, x) = Re_x^{-1/2} F''(0, x) \quad (5.45b)$$

Il est bon de rappeler ici que, avec la méthode différentielle, quelles que soient les circonstances, le frottement à la paroi est toujours caractérisé par $F''(0, x)$ puisque $\partial U / \partial y$ est proportionnel à F'' , cf. (5.39).

5.2.4. – Mise en forme analytique de la viscosité turbulente

♣ *Région interne*

Dans la première partie de l'étude théorique (§ 5.1) nous nous sommes limités à des écoulements sur parois étanches et sans gradient de vitesse extérieure. On pouvait alors, dans certaines zones, se contenter d'expressions simplifiées pour v_t , en particulier $v_t = 0$ dans la sous-couche visqueuse.

Cependant, si cette dernière approximation donne de bons résultats dans le problème dynamique, elle fausse un peu ceux du problème thermique, surtout si le nombre de Prandtl est grand. Cela tient à ce que, du fait des bouffées de turbulence émises par la sous-couche visqueuse, même une viscosité turbulente très faible peut avoir un impact important sur le transfert de chaleur. A cet égard, le modèle de van Driest avait déjà pour effet de gommer cette imperfection. Mais il nous faut aussi, dans le cadre général de la méthode différentielle, prendre en compte dans v_t les cas $V_p \neq 0$ et $dU_\infty / dx \neq 0$.

🎵 Aussi allons-nous reprendre en l'étoffant un peu l'approche théorique simplifiée du paragraphe 5.1.3. Dans ce but, nous conserverons le modèle de Couette (5.9 et 5.20) en l'adaptant légèrement :

$$\left. \begin{array}{l} U = U(y) \text{ soit } \partial U / \partial x = 0 \\ V(x, y) = cte = V_p \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

L'équation à résoudre est toujours (5.6b) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

avec :

$$\tau = \rho(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{et} \quad - \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*}{dx} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$$

Intégrons (5.6b) de 0 à y avec les conditions (5.46). Sachant que pour $y = 0$, $U = 0$ et $\tau = \tau_p$, il vient :

$$V_p U = y U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{l}{\rho} (\tau - \tau_p)$$

soit :

$$\frac{\tau}{\tau_p} = 1 + \rho V_p \frac{U}{\tau_p} - y \frac{\rho}{\tau_p} U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad (5.47)$$

On notera au passage que pour $V_p = 0$ et $U_\infty = cte$, on retrouve bien $\tau = \tau_p = cte$ (5.12a).

Reprenons maintenant en la généralisant la correction de van Driest sur la longueur de mélange (§ 5.1.3.3). Nous posons :

$$l = K y a = K y \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{A}\right) \right\} \quad (5.48)$$

où A sera fonction de $V_p(x)$ et de dU_∞/dx . Si ces deux termes sont nuls, alors $A = 25$ comme dans (5.19). L'expression de ν_t en fonction de a s'écrit toujours comme dans (5.13c) :

$$\nu_t = K^2 y^2 a^2 \partial U / \partial y$$

En regardant l'équation (5.47) on voit que, par rapport au cas $V_p = 0$ et $U_\infty = cte$:

- si l'écoulement extérieur est accéléré ($dU_\infty/dx > 0$), $\tau/\tau_p \searrow$, donc $\nu_t \searrow$ et par suite $A \nearrow$;
- inversement, si l'écoulement extérieur est ralenti, $A \searrow$;
- un soufflage ($V_p > 0$) à la paroi augmente τ/τ_p d'où $A \searrow$;
- une aspiration ($V_p < 0$) diminue τ/τ_p d'où $A \nearrow$.

Ce raisonnement est à la fois purement qualitatif et un peu approximatif. Il permet néanmoins d'asseoir une expression empirique de A , issue de données expérimentales :

$$A = \frac{25}{7,1 \left\{ V_p^+ + 4,25 \frac{(d\bar{p}^*/dx)^+}{1 + 10 V_p^+} \right\} + 1} \quad (5.49a)$$

avec :

$$V_p^+ = V_p / U_\tau \quad (5.49b)$$

$$\frac{y\rho}{\tau_p} U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = - \frac{y}{\tau_p} \frac{d\bar{p}^*}{dx} = - \xi \left(\frac{d\bar{p}^*}{dx} \right)^+$$

Ce dernier terme figure dans (5.47) et donne avec (5.16c) :

$$\left(\frac{d\bar{p}^*}{dx} \right)^+ = \frac{\mu}{\rho^{1/2} \tau_p^{3/2}} \frac{d\bar{p}^*}{dx} \quad (5.49c)$$

Pour récapituler, nous avons donc étoffé le paramètre l (5.48) qui prend maintenant en compte les cas $dU_\infty/dx \neq 0$ et $V_p \neq 0$. On peut rentrer ensuite cette expression de l dans la viscosité turbulente ν_t (5.13c) puis dans l'équation différentielle (5.43).

◆ Région externe

Dans la région externe, on a élaboré d'autres expressions empiriques pour l , trop compliquées pour être vraiment intéressantes. Ici, de surcroît, le modèle à longueur de

mélange du type $\nu_t = l^2 \partial U / \partial y$ est plutôt inadapté puisque $\partial U / \partial y \rightarrow 0$, ce qui implique des valeurs élevées de l , qui n'ont plus alors de correspondance directe avec une échelle de turbulence (§ 3.6.2.1).

En fait, dès que l'on quitte la région interne, la viscosité turbulente reste pratiquement constante, ce qui correspond à l'hypothèse de Boussinesq (3.30) ; elle peut alors être calculée au moyen des expressions (5.13c) et (5.26c), de la façon suivante.

Soit y_l l'ordonnée à partir de laquelle on peut admettre $\nu_t \# cte$. On a donc :

$$\nu_t = K^2 y_l^2 a^2(y_l) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=y_l} \quad (5.50a)$$

avec, d'après (5.26c) qui est encore valable en y_l :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = U_\tau \frac{2,5}{\xi} \frac{U_\tau}{\nu} = 2,5 \frac{U_\tau}{y}$$

A la lisière de la couche externe, le paramètre correctif de van Driest n'a plus d'effet ($a(y_l) \# 1$), d'où :

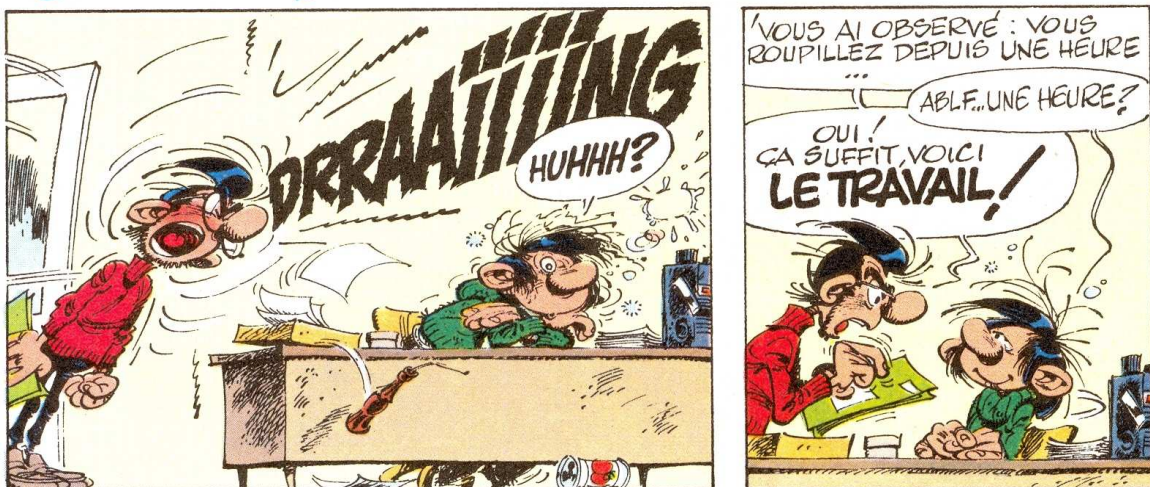
$$\nu_t = 2,5 K^2 U_\tau y_l \quad (5.50b)$$

Les recoupements avec l'expérience montrent que la meilleure valeur de y_l paraît être :

$$y_l = 0,21 \delta \quad (5.50c)$$

Il en résulte pour ν_t (avec $K = 0,4$) :

$$\nu_t = 0,084 \delta U_\tau \quad (5.50d)$$



5.2.5. – Calcul pratique de U , τ_p et δ

Les considérations précédentes ne doivent pas faire perdre de vue que l'objectif final est de connaître le champ de vitesse U et surtout le frottement à la paroi τ_p , ainsi que l'épaisseur de couche limite δ (puis éventuellement le champ de température et le flux de chaleur à la paroi).

La résolution numérique de l'équation (5.43) devra fournir $F(\eta, x)$, $F'(\eta, x)$ et $F''(0, x)$. On obtient dès lors :

$$U(\eta, x) = U_\infty(x) F'(\eta, x) \quad (\text{cf. 5.35e})$$

$$\tau_p = \left(\frac{\mu \rho}{x} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} F''(0, x) \quad (\text{cf. 5.45a})$$

$$\frac{1}{2} C_f = \left(\frac{\mu}{\rho U_\infty x} \right)^{1/2} F''(0, x) \quad (\text{cf. 5.45b})$$

Enfin, $\delta(x)$ est solution de la relation :

$$U(\delta, x)/U_\infty = F'(\eta_\delta, x) = 0,99$$

La précision est plus aléatoire sur ce paramètre mais l'ordre de grandeur obtenu est généralement suffisant.

Le lecteur pourra objecter qu'il n'y a dans ce paragraphe aucun résultat concret, immédiatement utilisable. En vérité, la méthode différentielle doit certainement avoir la préférence lorsqu'on veut résoudre un problème de façon détaillée, mais elle est relativement inapte à fournir du « prêt-à-porter ». Pour ce genre d'article, il vaut mieux s'adresser à la méthode semi-intégrale.

Des ordres de grandeur de C_f , U , δ ...seront donnés au paragraphe 5.3.2. ♠.

5.2.6. – Prise en compte de la rugosité de la paroi

Dans tout ce qui précède, la surface de la plaque a été supposée parfaitement lisse. Il n'en est pas toujours ainsi, et si la paroi est rugueuse son état de surface pourra être caractérisé en première approximation par le simple paramètre « rugosité » :

$$\varepsilon = \text{hauteur moyenne des aspérités} \quad (5.51a)$$

Posons :

$$\xi_\varepsilon = \frac{U_\tau \varepsilon}{\nu} \quad (5.51b)$$

L'influence de la rugosité sur l'épaisseur de couche limite et sur la loi de vitesse sera significative si les aspérités débordent de la sous-couche visqueuse, c'est-à-dire si :

$$\xi_\varepsilon \gtrsim 3$$

car alors elles interviendront en activant l'émission des bouffées de turbulence et le développement même de cette turbulence.

Par contre, pour $\xi_\varepsilon \lesssim 3$, la surface sera dite « hydrauliquement lisse ».

En fait, du point de vue de la viscosité turbulente, les choses se passent à peu près comme si on avait effectué une translation $-\Delta y$ de la paroi, ou en coordonnées adimensionnelles, de $-\Delta \xi$, avec :

$$\Delta \xi = \frac{U_\tau \Delta y}{\nu} \quad (5.51c)$$

A la suite d'études expérimentales, on peut admettre pour $\Delta \xi$ les valeurs empiriques suivantes :

$$3 \approx \xi_\varepsilon \approx 70 : \quad \Delta\xi = 0,9 \left\{ \xi_\varepsilon^{0,5} - \xi_\varepsilon \exp\left(-\frac{\xi_\varepsilon}{6}\right) \right\} \quad (5.52)$$

$$70 \approx \xi_\varepsilon \approx 2000 : \quad \Delta\xi = 0,7 \xi_\varepsilon^{0,58}$$

valeurs acceptables tant que V_p et dU_∞ / dx ne sont pas trop grands.

On intègre ensuite cette translation fictive de la paroi dans le paramètre l en écrivant (cf. 5.48) :

$$l = K(y + \Delta y)a_\varepsilon = K \left(y + \frac{\nu \Delta\xi}{U_\tau} \right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\xi + \xi_\varepsilon}{A}\right) \right\} \quad (5.53)$$

avec toujours K constante de Karman # 0,4, d'où enfin la nouvelle valeur de $\nu_t = l^2 \partial U / \partial y$.

5.3. – MÉTHODE SEMI-INTÉGRALE ET LOIS APPROCHÉES

5.3.1. – Écoulements avec gradient de vitesse extérieure

5.3.1.1. – LOI EN PUISSANCE ET FROTTEMENT PARIÉTAL

La méthode semi-intégrale s'appuie plus que la méthode différentielle sur des données empiriques, mais elle fournit des lois approchées simples au moyen de calculs exclusivement analytiques.

♣ Notre point de départ sera une loi phénoménologique suggérée par l'expérience, la *loi en puissance*. Elle exprime la vitesse U dans la couche limite, y compris lorsque dU_∞/dx n'est pas nul, mais à condition que $V_p = 0$, et elle s'écrit :

$$\boxed{\frac{U}{U_\tau} = 8,75 \xi^{1/7}} \quad \text{pour } 5 \cdot 10^5 \lesssim Re_x \lesssim 10^7 \quad (5.54)$$

les définitions de U_τ et ξ étant, rappelons-le, $U_\tau = (\tau_p / \rho)^{1/2}$ (5.15b) et $\xi = y U_\tau / \nu$ (5.16b).

La loi en puissance (5.54) est évidemment une loi approchée, comme l'était déjà le polynôme de Pohlhausen (4.98) pour la couche limite laminaire. En particulier, à l'infini elle ne présente pas les qualités analytiques requises puisqu'elle n'a pas d'asymptote. Cependant sa dérivée en $y = \delta$ est petite, et on la prolongera par :

$$y \geq \delta, \quad U = U_\infty = cte$$

Nous avons d'ailleurs rencontré le même problème avec la loi logarithmique (5.31c) dans la couche externe.

◆ Pour $y = \delta$, on a en particulier :

$$\frac{U_\infty}{U_\tau} = 8,75 \left(\frac{\delta U_\tau}{\nu} \right)^{1/7} \quad (5.55)$$

ou encore :

$$\frac{U_\infty}{(\tau_p / \rho)^{1/2}} = 8,75 \left(\frac{\delta \sqrt{\tau_p / \rho}}{\nu} \right)^{1/7}$$

soit :

$$U_\infty = 8,75 \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{1/7} \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^{8/14}$$

On en tire :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \left(\frac{U_\infty}{8,75} \right)^{14} \left(\frac{\delta}{\nu} \right)^{-14/56}$$

et en regroupant certains paramètres :

$$\tau_p = 0,0225 \rho U_\infty^2 \left(\frac{\delta U_\infty}{\nu} \right)^{-0,25} \quad (5.56a)$$

Nous reviendrons sur cette expression une fois effectué le calcul de δ

♥ Enfin, remarquons dès à présent que :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} = \left(\frac{U_\tau}{U_\infty} \right)^2 \quad (5.56b)$$

5.3.1.2. – RELATIONS ENTRE δ_1 , δ_2 ET δ

Mettre en œuvre la méthode semi-intégrale, c'est en premier lieu résoudre l'équation de Karman (4.94) (en reprenant le raisonnement suivi au chapitre 4, on vérifie en effet que celle-ci reste valable en régime turbulent, cf. Annexe 5.A.1). Il faut pour cela exprimer δ_1 et δ_2 en fonction d'un seul paramètre qui sera ici l'épaisseur de couche limite δ .

♣ Calcul de δ_1

Au chapitre 4, nous avons défini ainsi le paramètre δ_1 (4.91) pour un écoulement isochore :

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \quad (5.57a)$$

Ecrivons (5.54) sous la forme ;

$$y < \delta : \quad \frac{U}{U_\infty} = \frac{8,75 \xi^{1/7}}{U_\infty / U_\tau} \quad (5.57b)$$

$$y \geq \delta : \quad U = U_\infty$$

Puisque $U = U_\infty$ pour $y = \delta$, nous pouvons nous contenter d'intégrer (5.57a) de 0 à δ :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \quad (5.57c)$$

Reportons alors (5.57b) dans l'expression précédente. Nous avons : $dy = (v/U_\tau) d\xi$
 et pour $y = \delta$, $\xi = \delta U_\tau / v$, d'où :

$$\delta_1 = \int_0^{\frac{\delta U_\tau}{v}} \left\{ 1 - 8,75 \frac{U_\tau}{U_\infty} \xi^{\frac{1}{7}} \right\} \frac{v}{U_\tau} d\xi$$

soit après intégration :

$$\delta_1 = \frac{v}{U_\tau} \left\{ \frac{\delta U_\tau}{v} - \frac{8,75}{1 + 1/7} \frac{U_\tau}{U_\infty} \left(\frac{\delta U_\tau}{v} \right)^{1+1/7} \right\}$$

et avec (5.55) :

$$\delta_1 = \frac{v}{U_\tau} \left\{ \frac{\delta U_\tau}{v} - \frac{1}{1 + 1/7} \frac{\delta U_\tau}{v} \right\}$$

ou enfin :

$$\delta_1 = 0,125 \delta \quad (5.58)$$

◆ *Calcul de δ_2*

Le paramètre δ_2 (4.92) est défini en écoulement isochore par :

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \quad (5.59)$$

Comme avec δ_1 , la loi phénoménologique (5.57b) utilisée pour U limite le domaine d'intégration de 0 à δ . Le calcul est analogue à celui du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^{\frac{\delta U_\tau}{v}} \left\{ \frac{8,75}{U_\infty / U_\tau} \xi^{\frac{1}{7}} - \frac{8,75^2}{(U_\infty / U_\tau)^2} \xi^{\frac{2}{7}} \right\} \frac{v}{U_\tau} d\xi \\ \delta_2 &= \frac{v}{U_\tau} \frac{8,75 U_\tau}{U_\infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{7}} \xi^{1 + \frac{1}{7}} - \frac{8,75 U_\tau}{U_\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} \xi^{1 + \frac{2}{7}} \right]_0^{\frac{\delta U_\tau}{v}} \\ &= \frac{v}{U_\tau} \left(\frac{\delta U_\tau}{v} \right)^{-\frac{1}{7}} \left\{ 0,875 \left(\frac{\delta U_\tau}{v} \right)^{1 + \frac{1}{7}} - 0,778 \left(\frac{\delta U_\tau}{v} \right)^{1 + \frac{2}{7} - \frac{1}{7}} \right\} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\delta_2 = 0,097 \delta \quad (5.60)$$

et le rapport δ_1 / δ_2 a pour valeur :

$$\boxed{\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1,29} \quad (5.61)$$

Déjà signalé à propos des écoulements laminaires, un avantage de la méthode semi-intégrale refait surface ici : du fait que la couche externe représente 80% de δ les incertitudes d'estimation sur la valeur de U dans la couche interne se répercutent peu sur δ_1 / δ et δ_2 / δ .

5.3.1.3. – RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE KARMAN

Il nous faut maintenant résoudre l'équation de Karman (4.94b) qui garde – nous l'avons indiqué un peu plus haut – la même forme en régime turbulent :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} \quad (5.62)$$

Reprenons l'expression (5.56a) de τ_p en y remplaçant δ par sa valeur tirée de (5.60). Cela donne :

$$0,0125 \left(\frac{\delta_2 U_\infty}{\nu} \right)^{-0,25} = \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} (\delta_1 + 2\delta_2)$$

Si l'on prend en compte (5.61), on ne conserve que δ_2 :

$$0,0125 \left(\frac{\delta_2 U_\infty}{\nu} \right)^{-0,25} = \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{3,29 \delta_2}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} \quad (5.63a)$$

Éliminons d'abord δ_2 du premier membre en multipliant par $\delta_2^{0,25}$:

$$0,0125 \left(\frac{U_\infty}{\nu} \right)^{-0,25} = \delta_2^{0,25} \left\{ \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{3,29 \delta_2}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} \right\} \quad (5.63b)$$

Cette équation devrait pouvoir se mettre sous la forme suivante, α , a et b étant des constantes :

$$U_\infty^\alpha \cdot cte = \frac{d}{dx} (\delta_2^a U_\infty^b)$$

ou mieux, pour avoir le même premier membre que (5.63b) (c et e étant deux autres constantes) :

$$\begin{aligned} 0,0125 \left(\frac{U_\infty}{\nu} \right)^{-0,25} &= e U_\infty^c \frac{d}{dx} (\delta_2^a U_\infty^b) \\ &= e a \delta_2^{a-1} U_\infty^{c+b} \frac{d\delta_2}{dx} + e b \delta_2^a U_\infty^{c+b-1} \frac{dU_\infty}{dx} \end{aligned} \quad (5.63c)$$

Cette écriture permet d'identifier terme à terme (5.63b) et (5.63c). On obtient :

$$\text{I) } \delta_2^{0,25} = e a \delta_2^{a-1} U_\infty^{c+b} \quad \text{d'où : } e a = 1 ; \quad a - 1 = 0,25 ; \quad c + b = 0, \text{ soit :}$$

$$a = 1,25 ; \quad e = 1/a = 0,8$$

$$\text{II) } 3,29 \frac{\delta_2^{1,25}}{U_\infty} = e b \delta_2^a U_\infty^{c+b-1} = e b \delta_2^{1,25} U_\infty^{-1} \quad \text{d'après I), d'où } e b = 3,29 \text{ et :}$$

$$b = 4,11 ; \quad c = -4,11$$

Finalement, l'équation s'écrit :

$$0,0125 \left(\frac{U_\infty}{\nu} \right)^{-0,25} = \frac{1}{1,25} U_\infty^{-4,11} \frac{d}{dx} (\delta_2^{1,25} U_\infty^{4,11})$$

soit :

$$\frac{d}{dx} (\delta_2^{1,25} U_\infty^{4,11}) = 0,0156 U_\infty^{3,86} \nu^{0,25} \quad (5.64)$$

Pour intégrer cette équation, il faut ensuite définir la borne inférieure x_0 de l'intervalle d'intégration.

Le point d'abscisse x_0 est appelé *origine virtuelle* de la couche limite turbulente, et représente l'endroit où elle démarrerait si elle n'était pas précédée de la couche limite laminaire. On a donc :

$$\delta_2^{1,25} U_\infty^{4,11} = 0,0156 \nu^{0,25} \int_{x_0}^x U_\infty^{3,86} du$$

$$\boxed{\delta_2 = 0,036 \frac{\nu^{0,2}}{U_\infty^{3,29}} \left(\int_{x_0}^x U_\infty^{3,86} du \right)^{0,8}} \quad (5.65)$$

d'où l'on déduit l'épaisseur de couche limite, par (5.60) :

$$\delta = \frac{\delta_2}{0,097}$$

puis τ_p (ou $C_f/2$) par (5.56).

L'estimation de x_0 peut se faire en écrivant que pour $x = x_c$ (abscisse critique de la transition laminaire - turbulent), $\delta_{2 \text{ lam}} = \delta_{2 \text{ turb}}$, la première valeur étant donnée par (4.112b puis 4.112d, ch. 4) et la seconde par (5.65). Mais la précision obtenue n'est pas exemplaire car Re_{x_c} (et donc x_c) est rarement connu *a priori* avec certitude. Néanmoins, on aboutit de cette façon à un ordre de grandeur acceptable pour x_0 .

⚠ Assez souvent, on évacue la difficulté en admettant $x_0 \neq 0$ et en faisant comme s'il n'y avait pas de couche limite laminaire, mais ceci n'est correct que si l'on se place assez loin de l'abscisse de transition, disons pour $Re_x \gtrsim 5 Re_{x_c}$ au moins.

5.3.2. – Écoulements sans gradient de vitesse extérieure

♣ Lorsque $U_\infty = \text{cte}$, le calcul analytique de (5.65) est immédiat :

$$\delta_2 = 0,036 \nu^{0,2} U_\infty^{-0,2} (x - x_0)^{0,8} \quad (5.66)$$

Dans ce cas particulier, la méthode évoquée à la fin du paragraphe précédent donne, en admettant $10^5 < Re_{x_c} < 5 \cdot 10^5$:

$$0,5 \lesssim \frac{x_0}{x_c} \lesssim 0,7$$

Lorsque Re_x est proche de Re_{x_c} on pourra prendre $x_0 \approx 0,6 x_c$ si l'on n'est pas trop exigeant sur la précision.

!!! A partir de maintenant, nous admettrons : $x_0 \neq 0$

c'est-à-dire que les résultats obtenus seront convenables pour $Re_x \geq 5 Re_{xc}$. Alors :

$$\delta_2 = 0,036 \nu^{0,2} U_\infty^{-0,2} x^{0,8} \quad (5.67a)$$

d'où l'on tire, avec (5.60) :

$$\boxed{\delta = 0,37 \nu^{0,2} U_\infty^{-0,2} x^{0,8}} \quad (5.67b)$$

ou, en faisant intervenir le nombre de Reynolds local Re_x :

$$\delta = 0,37 x Re_x^{-0,2} \quad (5.67c)$$

La première forme a l'avantage de montrer que δ varie comme $x^{0,8}$ dans la couche limite turbulente, alors que la loi correspondante en laminaire est en $x^{0,5}$ (4.44). La couche limite turbulente s'épaissit donc plus vite que la couche limite laminaire. Par contre, δ dépend beaucoup moins de ν et de U_∞ , l'exposant de Re_x étant 0,2 au lieu de 0,5.

◆ Revenant ensuite à (5.56), nous obtenons τ_p :

$$\tau_p = 0,0225 \rho U_\infty^2 \left(\frac{U_\infty}{\nu} 0,37 x Re_x^{-0,2} \right)^{-0,25}$$

soit en regroupant les termes :

$$\boxed{\tau_p = 0,029 \rho U_\infty^{1,8} \nu^{0,2} x^{-0,2}} \quad (5.68a)$$

ou pour le coefficient de frottement :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = 0,029 Re_x^{-0,2}} \quad (5.68b)$$

On voit en comparant avec (4.47) que τ_p (ou C_f) évolue plus lentement que dans la couche limite laminaire, où il est en $x^{-0,5}$ (fig. 5.5).

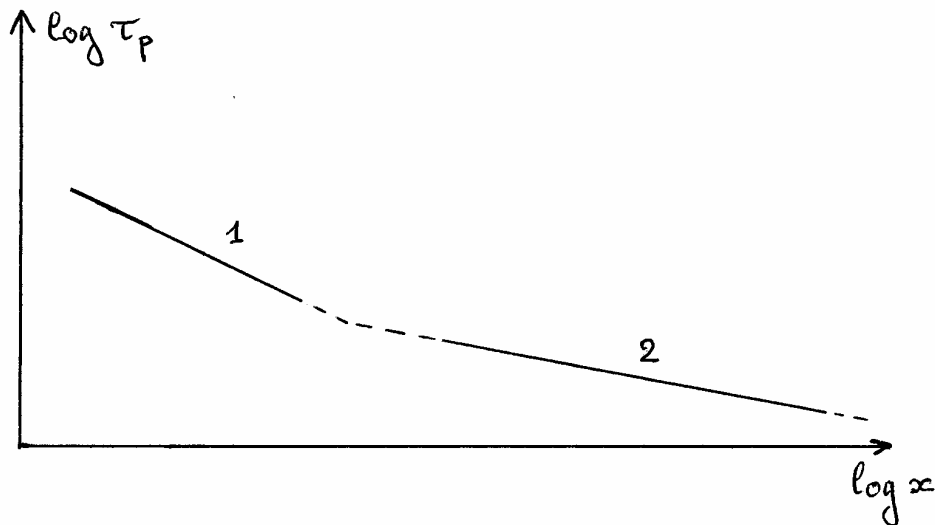


FIG. 5.5 – Évolution approximative du frottement à la paroi (coordonnées logarithmiques)
1. – Laminaire (pente $-0,5$) ; 2. – Turbulent (pente $-0,2$)

Pour une plaque de longueur L , en admettant la couche limite entièrement turbulente, la contrainte moyenne à la paroi $\langle \tau_p \rangle$ et le coefficient de traînée C_{Xf} (4.39 et 4.49a) ont respectivement pour valeur :

$$\langle \tau_p \rangle = 0,029 \rho U_\infty^2 \left(\frac{U_\infty}{\nu} \right)^{-0,2} \frac{1}{L} \int_0^L x^{-0,2} dx$$

$$\boxed{\langle \tau_p \rangle = 0,036 \rho U_\infty^{1,8} \nu^{0,2} L^{-0,2}} \quad (5.69a)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} C_{Xf} = 0,036 Re_L^{-0,2}} \quad (5.69b)$$

♥ Si l'on veut prendre en compte à la fois la partie laminaire de l'écoulement et le fait que $x_0 \neq 0$, on dispose d'une correction empirique simple sur C_{Xf} :

$$\begin{cases} 5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7 \\ \frac{1}{2} C_{Xf} = 0,036 Re_L^{-0,2} - \frac{A}{Re_L} \end{cases} \quad (5.70a)$$

avec :

$$A = \frac{Re_{xc}}{2} (C_{Xc \text{ turb}} - C_{Xc \text{ lam}}) \quad (5.70b)$$

c'est-à-dire, avec (4.50) et (5.69b) :

$$\frac{1}{2} C_{Xf} = 0,036 Re_L^{-0,2} - \frac{Re_{xc}}{Re_L} (0,036 Re_{xc}^{-0,2} - 0,664 Re_{xc}^{-0,5}) \quad (5.71)$$

En particulier, si $L = x_c$, $Re_L = Re_{xc}$, et l'on retrouve l'expression de C_{Xf} en laminaire.

Toutes ces formules sont valables pour $5 \cdot 10^5 \lesssim Re_x \lesssim 10^7$. Au-delà de 10^7 elles donnent δ par excès et C_f par défaut, et il faut recourir à une autre relation empirique, par exemple celle de Schulz-Grumov :

$$Re_x \gtrsim 10^7, \quad \frac{1}{2} C_f = 0,185 (\log Re_x)^{-2,58} \quad (5.72)$$

♠ Une illustration numérique des résultats précédents s'impose, car il est indispensable d'avoir en tête des ordres de grandeur. Reprenons pour cela les deux exemples traités en convection laminaire (§ 4.4.6), à savoir : air à 20°C et eau à 20°C, avec $Re_{xc} = 5 \cdot 10^5$ et $U_\infty = 10 \text{ m/s}$. Nous choisissons pour la plaque une largeur 1 m et une longueur $L = 10 x_c$, soit d'après (4.4.6) : $L = 7,5 \text{ m}$ pour l'écoulement d'air et $L = 0,5 \text{ m}$ pour l'écoulement d'eau.

Calculons $\delta(L)$, $C_{Xf}/2$ et la puissance dissipée P_f/S respectivement à partir de (5.67c), (5.69b) et (4.51b). On obtient :

- pour l'air :

$$\delta(L) = 0,126 \text{ m} ; \quad \frac{1}{2} C_{Xf} = 16,5 \cdot 10^{-4} ; \quad P_f/S = 2 \text{ W/m}^2$$

- pour l'eau :

$$\delta(L) = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; \quad \frac{1}{2} C_{Xf} = 16,5 \cdot 10^{-4} ; \quad P_f / S = 17 \cdot 10^2 \text{ W / m}^2$$

On ne manquera pas de comparer les valeurs ci-dessus à celles des tableaux 4.2 et 4.3 (§ 4.4.6), qui correspondent à la partie laminaire de l'écoulement.

Signalons enfin que, avec la valeur choisie pour L , la correction apportée sur C_{Xf} par l'expression empirique (5.71) est d'environ 10% en moins.

5.3.3. – Loi de vitesse U/U_∞

Dans ce qui précède, nous nous sommes appuyés sur la loi empirique (5.54) donnant U/U_τ en fonction de ξ . Mais à la fois ξ et la « vitesse de frottement » U_τ sont des paramètres un peu abstraits, et non directement mesurables. Pour disposer d'une loi plus immédiatement perceptible et pratique, cherchons plutôt l'évolution de U/U_∞ en fonction de y .

D'après (5.54), (5.15b) et (5.16b) nous avons :

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{U}{U_\tau} \frac{U_\tau}{U_\infty} = 8,75 \left(\frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \right)^{\frac{1}{7}} \frac{U_\tau}{U_\infty}$$

et si l'on prend en compte (5.55) :

$$\frac{U}{U_\infty} = 8,75 \left(\frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \right)^{\frac{1}{7}} \frac{1}{8,75} \left(\frac{\delta}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \right)^{-\frac{1}{7}}$$

soit :

$$\boxed{\frac{U}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}} \quad (5.73)$$

!! *C'est donc une loi de la même forme que U/U_τ . Mais il faut remarquer que si (5.54) \Rightarrow (5.73), la réciproque n'est pas vraie.*

5.3.4. – Coefficient de frottement sur une paroi perméable ($V_p \neq 0$) sans gradient de vitesse extérieure

Lorsque la composante V_p de la vitesse à la paroi n'est pas nulle, on ne dispose plus d'une loi phénoménologique simple du type (5.54) pour initier le calcul. Mais en s'appuyant sur un des résultats de la méthode semi-intégrale, on pourra opérer une extension de la procédure simplifiée exposée au paragraphe (5.1.3), et accéder ainsi à une évaluation du coefficient de frottement C_f .

♣ Reprenons l'équation (5.6) de la couche limite turbulente :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.6)$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse $U_\infty = \text{cte}$; alors, (5.7c) reste valable :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = 0 \quad \text{dans la couche limite} \quad (5.7c)$$

D'autre part, nous conserverons le modèle de Couette (5.46) dans la couche interne :

$$\left. \begin{aligned} V = V_p = \text{cte} \\ \partial U / \partial x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

Dans ces conditions, (5.6) s'écrit :

$$V_p \frac{dU}{dy} = \frac{d}{dy} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} \right\} \quad (5.75a)$$

avec pour conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad U = 0, \quad \nu_t = 0 \\ y = \delta, \quad U \approx U_\infty \end{aligned} \right\} \quad (5.75b)$$

◆ Intégrons (5.75a) une première fois entre 0 et y :

$$V_p [U]_0^y = \left[(\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} \right]_0^y$$

Pour $y = 0$, $\nu_t = 0$ et $\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_p}{\rho}$, d'où :

$$V_p U = (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy} - \frac{\tau_p}{\rho}$$

ce que l'on peut écrire sous la forme d'une équation différentielle à variables séparées :

$$\frac{dU}{V_p U + \frac{\tau_p}{\rho}} = \frac{dy}{\nu + \nu_t} \quad (5.76)$$

Ceci permet une seconde intégration, que nous ferons cette fois depuis la paroi jusqu'à la lisière de la couche limite :

$$\int_0^{U_\infty} \frac{dU}{V_p U + \frac{\tau_p}{\rho}} = \int_0^\delta \frac{dy}{\nu + \nu_t} \quad (5.77)$$

!!! Mais l'équation précédente peut susciter une réserve puisque les hypothèses (5.74) ne sont en principe acceptables que dans la couche interne. En réalité, on observe que la contribution de la couche externe dans les intégrales (5.77) est modeste ($\nu_t \gg \nu$), ce qui est confirmé par l'expérience.

On obtient alors :

$$\frac{1}{V_p} \left[\text{Ln} \left(U + \frac{\tau_p}{\rho V_p} \right) \right]_0^{U_\infty} = \int_0^\delta \frac{dy}{\nu + \nu_t}$$

ou encore :

$$\frac{1}{V_p} \text{Ln} \left(\frac{U_\infty + \tau_p / \rho V_p}{\tau_p / \rho V_p} \right) = \frac{1}{V_p} \text{Ln} \left(1 + \frac{\rho V_p U_\infty}{\tau_p} \right) = \int_0^\delta \frac{dy}{\nu + \nu_t} \quad (5.78)$$

♥ Posons comme intermédiaire de calcul :

$$B_f = \frac{\rho V_p U_\infty}{\tau_p} \quad (5.79a)$$

et notons que, puisque $\frac{1}{2} C_f = \tau_p / \rho U_\infty^2$,

$$B_f = \frac{V_p}{U_\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} C_f} \quad (5.79b)$$

L'équation (5.78) peut alors s'écrire :

$$\text{Ln}(1 + B_f) = \frac{1}{2} C_f B_f U_\infty \int_0^\delta \frac{dy}{v + v_t}$$

d'où nous pouvons tirer :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{1}{U_\infty} \frac{\text{Ln}(1 + B_f)}{B_f} \left(\int_0^\delta \frac{dy}{v + v_t} \right)^{-1} \quad (5.80a)$$

L'intérêt de faire intervenir simultanément C_f et B_f est que, Re_x étant fixé, si $V_p \rightarrow 0$,

$B_f \rightarrow 0$ d'où $\frac{\text{Ln}(1 + B_f)}{B_f} \rightarrow 1$, et :

$$\left(\frac{1}{2} C_f \right)_{V_p=0} = \frac{1}{U_\infty} \left(\int_0^\delta \frac{dy}{v + v_t} \right)^{-1} \quad (5.80b)$$

En regardant les formules (5.48), (5.49a) et (5.50), on constate que l'intégrale qui figure dans (5.80) est assez peu dépendante de V_p . Dans ces conditions, elle disparaît si l'on fait le rapport terme à terme de (5.80a) et de (5.80b), et il reste :

$$\frac{C_f / 2}{\left(\frac{1}{2} C_f \right)_{V_p=0}} = \frac{\text{Ln}(1 + B_f)}{B_f} \quad (\text{pour } Re_x \text{ donné}) \quad (5.81a)$$

♠ Dans le cas présent, nous avons d'après (5.68b) :

$$\frac{1}{2} (C_f)_{V_p=0} = 0,029 Re_x^{-0,2}$$

et il vient pour C_f :

$$\frac{1}{2} C_f = 0,029 Re_x^{-0,2} \frac{\text{Ln}(1 + B_f)}{B_f} \quad (5.81b)$$

Après avoir multiplié les deux membres par B_f , remplaçons ce terme par son expression (5.79b) :

$$\frac{V_p}{U_\infty} = 0,029 Re_x^{-0,2} \text{Ln} \left(1 + \frac{V_p}{U_\infty} \frac{1}{C_f / 2} \right)$$

soit :

$$1 + \frac{V_p}{U_\infty} \frac{1}{C_f / 2} = \exp \left(34,5 \frac{V_p}{U_\infty} Re_x^{0,2} \right)$$

d'où l'on tire le coefficient de frottement :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{V_p}{U_\infty \left\{ \exp \left(34,5 \frac{V_p}{U_\infty} Re_x^{0,2} \right) - 1 \right\}} \quad (5.82)$$

L'hypothèse du paragraphe ♥ ayant permis de faire l'impasse sur le calcul de l'intégrale $\int_0^\delta dy / (\nu + \nu_t)$, il suffit de connaître V_p / U_∞ pour obtenir C_f .

5.3.5. – Coefficient de frottement sur une paroi rugueuse (écoulement sans gradient de vitesse extérieure)

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la paroi était parfaitement lisse, c'est-à-dire qu'aucune irrégularité géométrique ne venait troubler la circulation du fluide. En pratique, ce n'est pas toujours le cas. Nous avons déjà abordé la question en (5.2.6) où nous avons défini la *rugosité* ε de la paroi (hauteur moyenne des aspérités) et le paramètre ξ_ε (5.51b).

Lorsque $dU_\infty / dx = 0$ on peut approcher assez correctement la valeur de C_f en jumelant, comme dans le paragraphe précédent, la loi de paroi à un paramètre (§ 5.1.3) et la méthode semi-intégrale.

5.3.5.1. – LOI DE VITESSE U/U_τ

♣ Il s'avère expérimentalement que pour une ordonnée y fixée, la viscosité turbulente est plus élevée lorsque la surface est rugueuse que lorsqu'elle est lisse, surtout à proximité de la paroi. Cette constatation peut se formaliser aisément en admettant pour la longueur de mélange l , en remplacement de (5.13a), l'expression :

$$l = K (y + \Delta y) \quad (5.83)$$

qui est une forme simplifiée de (5.53) où nous ignorons le terme correctif a_ε , moins influent ici que a dans le cas d'une paroi lisse.

La diffusivité turbulente est alors :

$$\nu_t = K^2 (y + \Delta y)^2 \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.84)$$

et, au lieu de l'équation (5.13d), on a :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \nu \frac{\partial U}{\partial y} + K^2 (y + \Delta y)^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (5.85a)$$

La relation entre Δy et ε sera précisée un peu plus loin, en (5.89), mais notons dès à présent que Δy est petit devant ε . Cela suffit néanmoins pour modifier le profil de vitesse au voisinage de la paroi.

En dehors de la sous-couche visqueuse, là où $\nu_t \gg \nu$, le terme $\nu \partial U / \partial y$ est négligeable, et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = K^2 (y + \Delta y)^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (5.85b)$$

◆ Reprenons maintenant la définition (5.51c) :

$$\Delta \xi = \frac{\Delta y U_\tau}{\nu} \quad (5.86)$$

En réintroduisant U_τ (5.15b), ξ (5.16b) et $U^+ = U/U_\tau$, (5.85b) s'écrit aussi :

$$K^2 (\xi + \Delta \xi)^2 \left(\partial U^+ / \partial \xi \right)^2 = 1 \quad (5.87a)$$

d'où :

$$\frac{\partial U^+}{\partial \xi} = \frac{1}{K (\xi + \Delta \xi)} \quad (5.87b)$$

Si l'on néglige en première approximation l'épaisseur de la sous-couche visqueuse (qui est plus faible que sur une plaque lisse), on peut intégrer (5.87b) de 0 à ξ :

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \int_0^\xi \frac{d\xi}{\xi + \Delta \xi}$$

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \{ \text{Ln}(\xi + \Delta \xi) - \text{Ln} \Delta \xi \} = \frac{1}{K} \text{Ln} \left(\frac{\xi}{\Delta \xi} + 1 \right) \quad (5.88)$$

Nous adopterons ici une loi d'origine expérimentale, moins fine que (5.52), mais d'un maniement plus simple :

$$\left. \begin{array}{l} \xi \geq 3,1 \Rightarrow \Delta \xi = 0,043 \xi_\varepsilon \\ \xi < 3,1 \Rightarrow \Delta \xi = 0 \end{array} \right\} \quad (5.89)$$

d'où :

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \text{Ln} \left(23 \frac{\xi}{\xi_\varepsilon} + 1 \right) \quad (5.90a)$$

♥ Pour $\xi \geq \xi_\varepsilon$, le second terme de la parenthèse devient négligeable, et en donnant à K sa valeur $K = 0,4$ la loi de vitesse s'écrit :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \text{Ln} \xi + 2,5 \text{Ln} \frac{23}{\xi_\varepsilon}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \text{Ln} \frac{y}{\varepsilon} + 7,84 \quad (5.90b)$$

ou encore, pour faciliter la comparaison avec la loi logarithmique (5.26c) :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \text{Ln} \xi + 5 - 2,5 \text{Ln} \frac{\xi_\varepsilon}{3,1} \quad (5.90c)$$

L'influence spécifique de la rugosité dans la couche interne se manifeste donc par la présence d'un terme correctif à la loi logarithmique, à savoir $-2,5 \text{Ln}(\xi_\varepsilon / 3,1)$, que l'on écrit parfois : $-\Delta U / U_\tau$. A ce propos, remarquons qu'avec des états de surface complexes où la rugosité ε est délicate à définir, on pourrait aussi considérer (5.90c) comme la définition conventionnelle d'une rugosité équivalente.

En faisant $\xi_\varepsilon = 3,1$ on retrouve la loi « paroi lisse », en accord avec (5.89). Pour $\xi_\varepsilon < 3,1$, $\Delta\xi = 0$ et la paroi est hydrauliquement lisse.

5.3.5.2. – CALCUL DE C_f

Pour déterminer C_f , il suffit maintenant de pouvoir exprimer U_∞ / U_τ puisqu'il existe une relation simple (5.56b) entre ces deux grandeurs :

$$\frac{1}{2} C_f = \left(\frac{U_\tau}{U_\infty} \right)^2 \quad (5.91)$$

Si l'on veut étendre la loi de vitesse (5.90) à la couche externe, on peut reprendre le terme correctif de l'équation (5.28) qui n'est pas influencé de façon notable par les caractéristiques de l'écoulement vers la paroi, et écrire en revenant à la définition de ξ :

$$\frac{U}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{y U_\tau}{\nu} + 2,5 \operatorname{Ln} \frac{23 \nu}{\varepsilon U_\tau} + B w(y^+) \quad (5.92)$$

En particulier, lorsque $y = \delta$, $U = U_\infty$ et $w(y^+) = w(1) = 2$ (5.31). Sachant que B est voisin de 1,34 on a :

$$\frac{U_\infty}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{\delta U_\tau}{\nu} + 2,5 \operatorname{Ln} \frac{23 \nu}{\varepsilon U_\tau} + 2,68 \quad (5.93a)$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes :

$$\frac{U_\infty}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{\delta}{\varepsilon} + 7,83 + 2,68 = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{\delta}{\varepsilon} + 2,5 \operatorname{Ln} 67$$

Nous avons pu ainsi éliminer U_τ du membre de droite, et il vient en regroupant une fois encore :

$$\frac{U_\infty}{U_\tau} = 2,5 \operatorname{Ln} \left(67 \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \quad (5.93b)$$

Le coefficient local de frottement C_f (5.91) a donc pour valeur :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{0,160}{\left(\operatorname{Ln} 67 \frac{\delta}{\varepsilon} \right)^2} \quad (5.94a)$$

L'épaisseur de couche limite δ nous est inconnue, mais nous avons déjà eu l'occasion de souligner au chapitre 4 que le rapport δ_2 / δ est peu affecté par une évaluation légèrement erronée de U / U_∞ , puisque l'intégration que l'on effectue en calculant δ_2 gomme plus ou moins l'imprécision sur U . Il n'est donc pas aberrant de reprendre ici l'expression (5.60) de δ_2 / δ , obtenue pour une surface lisse avec la loi de vitesse $U / U_\infty = (y / \delta)^{1/7}$:

$$\delta = \delta_2 / 0,97$$

Alors :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{0,160}{\left(\operatorname{Ln} 690 \frac{\delta_2}{\varepsilon} \right)^2} \quad (5.94b)$$

Mais d'autre part, l'équation de Karman s'écrit pour $V_p = 0$ et $dU_\infty / dx = 0$ (4.93) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{d\delta_2}{dx}$$

On arrive donc à une équation différentielle :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{0,160}{\left(\text{Ln } 690 \frac{\delta_2}{\varepsilon} \right)^2} \quad (5.95)$$

dont la résolution numérique permet d'obtenir $\delta_2(x)$ et donc $C_f(x)$.

En pratique, il faut savoir que le paramètre Δy (ou $\Delta \zeta$) caractéristique de l'état de surface dépend non seulement de la rugosité ε , mais également beaucoup *de la forme et de la distribution des aspérités*. Pour les détails, nous renvoyons à des ouvrages plus spécialisés (Cebeci, Bradshaw).

En outre, la relation (5.89), qui est le point de départ de la méthode, sous-évalue $\Delta \zeta$ pour les faibles valeurs de ζ_ε ; on aboutit malgré tout pour C_f à un ordre de grandeur moyen qui est convenable dans une étude d'avant-projet.

Si l'on veut améliorer la qualité du résultat, on dispose de lois phénoménologiques plus ou moins compliquées pour exprimer $\Delta \zeta$ en fonction de ζ_ε , par exemple (5.52). Mais cette fois le terme U_τ ne s'élimine plus à droite de (5.93a). La technique adoptée reste valable, mais moins avantageuse. Il est alors préférable de revenir à la méthode différentielle exposée au paragraphe (5.2.6).

5.4. – JETS LIBRES TURBULENTS

5.4.1. – Présentation et hypothèses

On réserve le nom d'*écoulements libres* à des mouvements de fluides qui se développent loin d'une paroi, c'est-à-dire pour lesquels les conditions aux limites sont repoussées à l'infini. Plus spécifiquement, les jets libres sont des écoulements libres issus d'une source bien localisée (orifice de soufflage). Nous considérons ici des *jets noyés*, où le milieu ambiant est constitué du même fluide que le jet.

♣ La figure (5.6) schématise un jet libre émergeant d'une buse dans une ambiance immobile. Elle montre la donnée expérimentale essentielle, à savoir l'épanouissement du jet qui s'élargit progressivement à partir de l'origine, cependant que la vitesse U_m sur l'axe diminue.

Cet épanouissement est le résultat du cisaillement entre deux domaines fluides animé de mouvements différents : le jet (vitesse de soufflage U_0) et le milieu environnant (immobile), qui a pour effet de courber les lignes de courant dans le jet et simultanément de provoquer un entraînement du fluide extérieur.

◆ Les jets turbulents présentent une autre caractéristique assez importante au point de vue pratique. En admettant comme condition de soufflage une vitesse U_0 uniforme à l'orifice, et une faible turbulence, on observe à l'origine du jet une zone de section triangulaire dans laquelle la vitesse est uniforme, égale à U_0 , et où la turbulence reste faible. Cette zone est appelée *noyau central* ou *noyau potentiel* du jet.

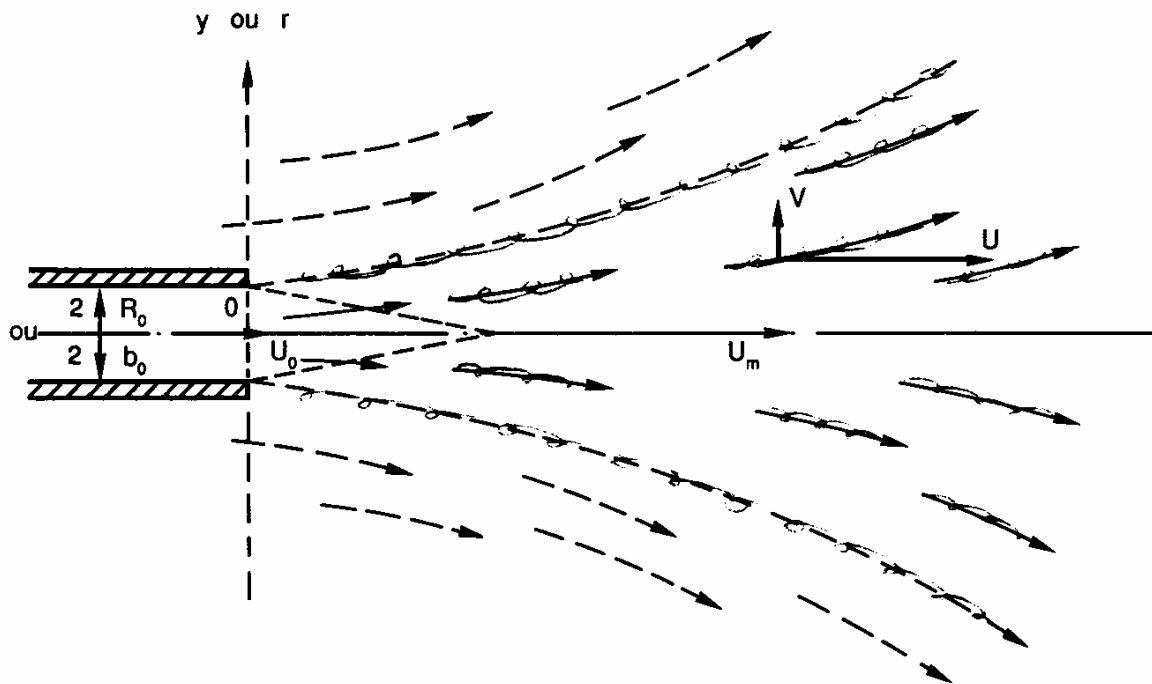


FIG. 5.6. - Épanouissement d'un jet plan ou axisymétrique

Sur les bords du noyau central, la pression est égale à la pression ambiante p_a . A l'intérieur, on a $p > p_a$, et dans tout le reste du jet règne une faible dépression ($p < p_a$). Hors du noyau central, l'association de la dépression et d'une forte turbulence entraîne un mélange entre le jet et le milieu ambiant. En d'autres termes, on assiste à une *dilution* par le fluide ambiant du fluide éjecté à la buse.

Dans ces conditions, il est évidemment *impossible de caractériser une frontière du jet*. Tout au plus peut-on, en raisonnant sur les vitesses moyennes, admettre que les lignes de courant issues des bords de l'orifice constituent une 'frontière' conventionnelle. On rencontre là le même problème que pour définir l'épaisseur d'une couche limite.

♥ Nous nous cantonnons dans ce qui suit aux jets isochores bidimensionnels, plans (orifice de soufflage rectangulaire de forme allongée) ou axisymétriques (orifice circulaire, jet rond).

Notons que les deux géométries courantes de soufflage : *jet de mur* (orifice débouchant perpendiculairement à une paroi plane) ou *jet de buse* (orifice à l'extrémité d'un tube : cas de la figure 5.6) sont à peu près équivalentes et n'entraînent pas de différences de structures significatives dans les jets.

♠ En ce qui concerne maintenant les hypothèses de calcul, les équations de la couche limite (5.6) s'appliquent bien aux jets turbulents dans les cas envisagés. En raison de l'épanouissement assez lent du jet, on a en effet :

$$\begin{aligned}
 V &\ll U \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\ll \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.96a}$$

De plus, les variations de pression se révèlent toujours faibles dans le jet, dès lors qu'on est assez loin du noyau central, et l'on admet :

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} \neq 0 \quad (5.96b)$$

tout en conservant : $\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y} = 0$.

Enfin, pour étudier la dynamique des jets, nous reprendrons le modèle pseudo-laminaire. L'équation à résoudre sera donc à nouveau l'équation aux valeurs moyennes (5.8) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.97)$$

Appelons Re_0 le nombre de Reynolds à l'orifice. Lorsque le jet est pleinement turbulent, c'est-à-dire d'après les données expérimentales pour

$$Re_0 \gtrsim 10^3$$

on observe que la viscosité ν du fluide est négligeable devant la viscosité turbulente ν_t , et l'équation (5.97) se réduit à :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.98a)$$

Il faut lui adjoindre bien entendu l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.98b)$$

De même que pour certains écoulements sur paroi plane, il se trouve que malgré la turbulence, les équations précédentes admettent des solutions auto-similaires, qui se présentent de surcroît sous forme analytique, et sont donc particulièrement aisées à manipuler. Malheureusement, elles ne sont valables qu'à des distances de l'orifice supérieures à environ $20 b_0$ ou $20 R_0$. En deçà, l'hypothèse $\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} = 0$ est mise en défaut, et l'on ne dispose d'aucun modèle simple pour exprimer \bar{p}^* . Cette restriction est tempérée par le fait que beaucoup d'applications concernent le domaine $x/b_0 > 20$ (ou $x/R_0 > 20$).

5.4.2. – Le jet plan noyé

5.4.2.1. – CARACTÉRISTIQUES DU JET PLAN

Le modèle du jet plan est une bonne approximation pour beaucoup de jets issus de fentes rectangulaires. La coordonnée x est prise selon le plan de symétrie du jet, l'origine O se trouvant sur la section de soufflage (fig. 5.6) ; la coordonnée « y » est perpendiculaire au plan de symétrie ; l'épaisseur du jet à l'origine est $2b_0$ et sa vitesse U_0 .

On considère que dans la direction z perpendiculaire au plan xy , la longueur L_0 de la buse est grande devant b_0 , et l'on néglige l'épanouissement latéral du jet de manière à se placer en écoulement bidimensionnel.

Les équations (5.98) sont soumises à des conditions aux limites et à des conditions de symétrie dues à la géométrie du jet. En particulier, il ne peut y avoir de transfert de quantité

de mouvement à travers le plan de symétrie ; la contrainte tangentielle τ doit donc s'annuler pour $y = 0$, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} U(x, y) = U(x, -y) \\ y = 0 \quad : \quad V = 0 \\ \tau = \rho \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty \quad : \quad U = 0 \end{array} \right\} \quad (5.99)$$

En toute rigueur, il est abusif d'imposer à U une condition à l'infini puisque les équations (5.98) ne sont valables que dans le jet. Mais des méthodes mathématiques plus raffinées permettent d'effectuer correctement ce raccord.

5.4.2.2. – POUSSÉE DU JET

On appelle *poussée* J_0 du jet le débit de quantité de mouvement issu de l'orifice de soufflage. La poussée d'un jet est donc une force.

Si L_0 est la longueur de la buse et $2b_0$ son épaisseur (fig. 5.6), sa section est $2b_0 L_0$, et J_0 vaut (voir 1.30a) :

$$J_0 = L_0 \int_{-b_0}^{b_0} \rho U_0 \cdot U_0 dy \quad (5.100a)$$

c'est-à-dire, en admettant une vitesse de soufflage U_0 uniforme :

$$J_0 = 2 \rho b_0 L_0 U_0^2 \quad (\text{en Newton ou kN}) \quad (5.100b)$$

Écrivons d'autre part le bilan intégral de quantité de mouvement entre deux plans parallèles d'abscisses x_1 et x_2 . En situant ces plans assez loin de la buse, dans la région où la pression \bar{p}^* est quasi uniforme, on obtient immédiatement :

$$L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2(x_1, y) dy = L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2(x_2, y) dy$$

soit, si l'on inclut la symétrie :

$$2 \rho L_0 \int_0^{\infty} U^2 dy = cte = J \quad (5.101a)$$

Pour écrire le même bilan en tête du jet, il faudrait prendre en compte la pression. Dans cette zone, on a donc : $J \neq J_0$.

Cependant, l'approximation :

$$J \approx J_0 = 2 \rho b_0 L_0 U_0^2 \quad (5.101b)$$

est la plupart du temps très satisfaisante.

5.4.2.3. – HYPOTHÈSE DE SIMILITUDE

Bien que l'on soit en écoulement turbulent, l'expérience montre une remarquable auto-similarité des profils de vitesse dans le jet. Cela suggère d'adapter la méthode différentielle du paragraphe 4.4.1.2.

Soit $U_m(x)$ la vitesse sur le plan de symétrie du jet :

$$U_m(x) = U(x, 0) \quad (5.102)$$

De même que pour les écoulements au voisinage d'une paroi, on cherche s'il existe une transformation des coordonnées $x \Rightarrow \beta(x)$ telle que l'on ait :

$$\frac{U}{U_m} = f(\eta) \quad (5.103a)$$

où η est une ordonnée adimensionnelle définie par :

$$\eta = \frac{y}{\beta(x)} \quad (5.103b)$$

Le raisonnement du paragraphe 4.4.1 se poursuit en faisant intervenir la fonction de courant $\Psi(x, y)$ telle que :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ce qui, rappelons-le, présente l'avantage de satisfaire à l'équation de continuité (5.98b) ; on obtient à nouveau les relations (4.23), où la vitesse U_∞ est remplacée par U_m :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y) &= U_m(x) \beta(x) F(\eta) \\ F(\eta) &= \int_0^\eta f(u) du + F(0) \\ f(\eta) &= F'(\eta) = \frac{U}{U_m} \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$

et l'on cherche la forme fonctionnelle de $\beta(x)$ qui convient à ces exigences.

Alors, le débit de quantité de mouvement J dans le jet s'écrit d'après (5.101, 103a et 104) :

$$J = 2 \rho L_0 \int_0^\infty U_m^2(x) F'^2(\eta) \beta(x) d\eta$$

soit :

$$J = 2 \rho L_0 U_m^2 \beta \int_0^\infty F'^2(\eta) d\eta \quad (5.105a)$$

que l'on présente encore sous la forme :

$$J = 2 \rho L_0 M \int_0^\infty F'^2 d\eta \quad (5.105b)$$

en posant :

$$M = U_m^2(x) \beta(x) \quad (5.106a)$$

La propriété $J = cte$ implique alors évidemment :

$$M = cte \quad (5.106b)$$

5.4.2.4. – ÉQUATION ADIMENSIONNELLE DU MOUVEMENT

♣ Un coup d'œil en arrière (§ 5.4.1♠ et 5.4.2.3) nous montre que, au départ, le cadre du présent calcul est le même que celui qui nous a conduit à l'équation de Falkner-Skan, à condition de remplacer U_∞ par U_m et v par v_t .

On a donc :

$$\text{- d'après (5.104) : } U = U_m F' \quad (5.107a)$$

$$\text{- d'après (4.58c) : } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU_m}{dx} F' - U_m F'' \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (5.107b)$$

$$\text{- d'après (4.28) : } \frac{\partial U}{\partial y} = U_m \frac{F''}{\beta} \quad (5.107c)$$

$$\text{- d'après (4.58b) : } V = -F \beta \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) \quad (5.107d)$$

En outre, v_t est *a priori* une fonction de x et y . Au vu de (5.98a), (4.29) est donc remplacée par :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{(v_t F'')'}{\beta^2} U_m \quad (5.108a)$$

En l'absence de frontière matérielle dans la direction y , nous pouvons admettre que v_t ne dépend que de la distance à l'orifice : $v_t = v_t(x)$, d'où $\partial v_t / \partial y = 0$ et l'expression (5.108a) devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) = v_t \frac{F'''}{\beta^2} U_m \quad (5.108b)$$

En reportant dans l'équation à résoudre (5.98a), il vient après simplification :

$$U_m F'^2 \frac{dU_m}{dx} - U_m F F'' \frac{dU_m}{dx} - U_m^2 \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dx} F F'' = v_t U_m \frac{F'''}{\beta^2}$$

et, en multipliant par $\beta^2 / v_t U_m$ pour rendre l'équation adimensionnelle :

$$\frac{\beta^2}{v_t} \frac{dU_m}{dx} F'^2 - \left(\frac{\beta^2}{v_t} \frac{dU_m}{dx} + \frac{\beta}{v_t} U_m \frac{d\beta}{dx} \right) F F'' = F''' \quad (5.109)$$

◆ Il faut maintenant prendre en compte la propriété $M = cte$ (5.106b) qui fournit une relation entre les paramètres U_m et β . On déduit de (5.106a et b) :

$$\frac{d}{dx} (U_m^2 \beta) = 2U_m \beta \frac{dU_m}{dx} + U_m^2 \frac{d\beta}{dx} = 0$$

ou encore, en multipliant par $\beta / 2U_m$:

$$\beta^2 \frac{dU_m}{dx} = -\frac{1}{2} U_m \beta \frac{d\beta}{dx} \quad (5.110)$$

ce qui donne, après report dans (5.109) et regroupement des termes :

$$\frac{U_m}{2v_t} \beta \frac{d\beta}{dx} (F'^2 + F F'') + F''' = 0 \quad (5.111)$$

Ici encore, l'existence de solutions auto-similaires (qui est une donnée expérimentale) exige que le coefficient adimensionnel présent dans l'équation (5.111) soit constant :

$$\frac{U_m}{2\nu_t} \beta \frac{d\beta}{dx} = C \quad (5.112)$$

♥ L'équation à résoudre est donc maintenant :

$$F''' + C F'^2 + C F F'' = 0 \quad (5.113)$$

avec les conditions aux limites (5.99), qui s'expriment par le truchement de (5.104) :

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 : V = 0 \\ \partial U / \partial y = 0 \\ U = U_m \end{array} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} F(0) = 0 \\ F''(0) = 0 \\ F'(0) = 1 \\ F'(\infty) = 0 \end{array} \right. \quad (5.114)$$

5.4.2.5. – CHAMP DE VITESSE DANS LE JET

♣ En se servant des conditions précédentes, on effectue deux intégrations successives de (5.113) qui donnent :

$$F'' + C F F' = 0$$

puis :

$$F' + \frac{1}{2} C F^2 = 1 \quad (5.115)$$

Cette équation différentielle est une équation de Riccati, dont la solution s'obtient en calculant d'abord η en fonction de F :

$$\frac{dF}{d\eta} = 1 - \frac{1}{2} C F^2, \quad \text{soit} \quad d\eta = \frac{dF}{1 - \frac{1}{2} C F^2}$$

d'où :

$$\eta = \int_0^F \frac{du}{1 - \frac{1}{2} C u^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{C}} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{\frac{C}{2}} F}{1 - \sqrt{\frac{C}{2}} F}$$

ce qui s'exprime aussi au moyen de la fonction *th* :

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{C}} \operatorname{arg th} \left(\sqrt{\frac{C}{2}} F \right)$$

et en inversant :

$$F = \sqrt{\frac{2}{C}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{C}{2}} \eta \right) \quad (5.116)$$

Dans l'opération précédente, la constante d'intégration est nulle puisqu'on doit avoir, d'après (5.114), $F(0) = 0$.

◆ Il faut maintenant s'intéresser de plus près à la constante C , définie par (5.112). Elle regroupe trois paramètres (U_m , β , v_t), mais nous savons déjà que U_m et β sont reliés par (5.106), si bien que :

$$C = \frac{M^{1/2}}{v_t} \beta^{1/2} \frac{d\beta}{dx} \quad (5.117a)$$

En l'absence de toute information sur la viscosité turbulente, nous pourrions choisir en priorité la valeur de C (par exemple 1/2, comme pour l'équation de Blasius : certains auteurs, Rajaratnam en particulier, adoptent cette convention ; ou encore 1 comme pour le jet plan laminaire, cf. § 4.7.2). Toutefois, on préfère souvent fixer d'abord $\beta(x)$. Le point de départ de cette démarche est encore de nature expérimentale : on observe que les courbes $y = b(x)$ telles que $U(b)/U_m = cte$ sont des droites $b(x) = kx$, dont la pente paraît peu dépendante des conditions de soufflage. L'usage est alors de choisir $b(x) = \beta(x)$ tel que :

$$\boxed{\frac{U(\beta)}{U_m} = \frac{1}{2}} \quad (5.117b)$$

c'est-à-dire que la courbe $\beta(x)$ est l'ensemble des points où la vitesse vaut la moitié de la vitesse sur l'axe du jet. L'expérience donne alors :

$$x \gtrsim 20 b_0, \quad \beta(x) \approx 0,11 x \quad (5.117c)$$

La constante C se trouve déterminée par cette condition. En effet, la dérivation de F (5.116) donne (cf. § 472):

$$F' = \frac{1}{ch^2 \sqrt{\frac{C}{2}} \eta} \quad (5.118)$$

Sachant que $U/U_m = F'$ et que $U/U_m = 0,5$ pour $y = \beta$, c'est-à-dire pour $\eta = 1$:

$$ch^2 \sqrt{\frac{C}{2}} = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{0,5}$$

d'où :

$$C = 1,55 \quad \text{et} \quad \sqrt{C/2} = 0,88 \quad (5.119)$$

Finalement :

$$\boxed{F' = \frac{U}{U_m} = \frac{1}{ch^2 0,88 \eta} = 1 - th^2 0,88 \eta} \quad (5.120a)$$

et :

$$F = 1,135 th(0,88 \eta) \quad (5.120b)$$

avec :

$$\eta = \frac{y}{\beta(x)} = \frac{y}{0,11 x}$$

La forme générale de cette solution est due à Goertler (1942), et l'allure de la courbe $F'(\eta)$ est représentée sur la figure 5.7.

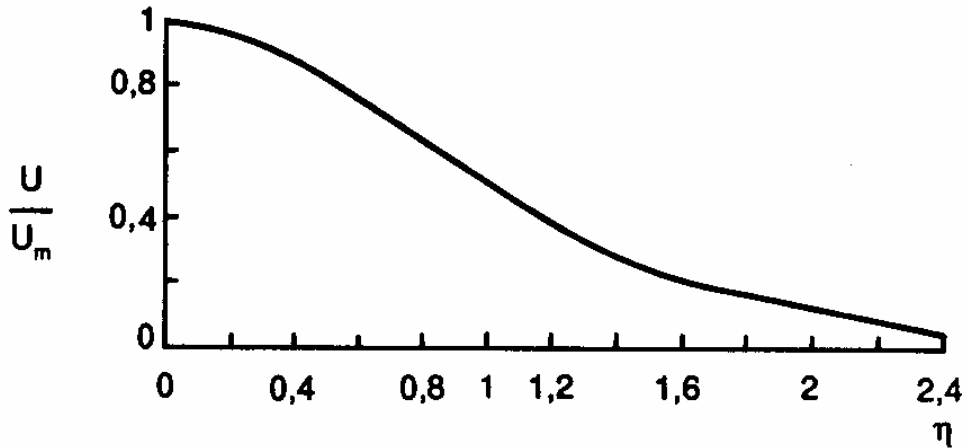


FIG. 5.7. - Distribution transversale de vitesse dans le jet plan.

♥ D'autre part, sachant que $\beta(x) = 0,11 x$, nous obtiendrons la distribution de vitesse $U_m(x)$ sur le plan de symétrie à partir de la relation (5.106a) :

$$M = U_m^2(x) \beta(x)$$

Mais il nous faut préalablement déterminer la constante M au moyen des expressions (5.105b) et (5.101b) :

$$J = 2 \rho L_0 M \int_0^{\infty} F'^2 d\eta$$

$$J = J_0 = 2 \rho b_0 L_0 U_0^2$$

Ayant obtenu en (5.120a) l'expression de F' , nous pouvons atteindre la valeur de J :

$$J = 2 \rho L_0 M \int_0^{\infty} (1 - th^2 0,88 \eta)^2 d\eta \quad (5.121a)$$

Cette intégrale se calcule en écrivant :

$$\begin{aligned} J &= 2 \rho L_0 M \int_0^{\infty} \left\{ (1 - th^2 0,88 \eta) + (th^4 0,88 \eta - th^2 0,88 \eta) \right\} d\eta \\ &= 2 \rho L_0 M \left\{ \frac{1}{0,88} [th \eta]_0^{\infty} - \frac{1}{3} \frac{1}{0,88} [th^3 \eta]_0^{\infty} \right\} \end{aligned}$$

soit, en ayant l'outrecuidance de rappeler au lecteur que $th 0 = 0$ et $th \infty = 1$:

$$J = J_0 = 1,51 \rho L_0 M \quad (5.121b)$$

et par conséquent :

$$M = 0,66 \frac{J_0}{\rho L_0} = 1,32 b_0 U_0^2 \quad (5.121c)$$

Avec (5.106a) et (5.117c) on aboutit ainsi à $U_m(x)$:

$$\boxed{U_m = \left(\frac{M}{\beta} \right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad \frac{U_m}{U_0} = 3,45 \left(\frac{b_0}{x} \right)^{1/2}} \quad (5.122)$$

Les relations (5.120a) et (5.122) définissent complètement le champ de vitesse dans le jet pour $x \geq 20 b_0$ (on n'oubliera pas que b_0 est la demi-épaisseur de la buse, fig. 5.6).

♠ *Reste le problème de la viscosité turbulente ν_t . Elle se trouve en fait définie à partir des données expérimentales (auto-similarité et loi 5.117c), et ne joue qu'un rôle marginal dans cette approche théorique. De (5.112) on tire :*

$$\nu_t = \frac{U_m \beta}{2C} \frac{d\beta}{dx} = \frac{(0,11)^2}{2C} x U_m(x)$$

et, avec (5.119) et (5.122) :

$$\nu_t = 0,0135 b_0^{1/2} U_0 x^{1/2} \quad (5.123a)$$

Ceci correspond à une longueur de mélange :

$$l = \left(\frac{\nu_t}{\partial U / \partial y} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{x^{3/2}}{th C \eta (1 - th^2 C \eta)} \right)^{1/2} \quad (5.123b)$$

qui est proportionnelle à $x^{3/4}$, mais qui n'est pas une fonction simple de η .

Quant à l'ordre de grandeur de ν_t , à partir des conditions minimales de validité du modèle théorique ($Re_0 > 1000$, $(x/b_0) > 20$) un rapide calcul donne : $\nu_t > 150\nu$.

On relèvera enfin une propriété dont l'intérêt est difficile à évaluer : il ressort des formules précédentes que :

$$\frac{U_m \beta}{\nu_t} = cte = 28 \quad (5.123c)$$

Ce groupement peut être vu comme un nombre de Reynolds turbulent, qui caractérise donc tous les jets plans, indépendamment du fluide et des conditions de soufflage.

♪♪ Vis-à-vis du champ des vitesses moyennes, puisque nous disposons d'une fonction de courant Ψ , nous pouvons toujours définir des *lignes de courant*, qui sont les courbes le long desquelles $\Psi = cte$. Mais bien que nous soyons en régime moyen permanent, il serait aventureux de les identifier à des « trajectoires moyennes », car cette notion est purement formelle et n'a guère de sens opérationnel en écoulement turbulent.

5.4.2.6. - DÉBIT DANS LE JET

A une abscisse donnée x , le débit total dans le jet est la somme du débit soufflé à la buse et du débit de fluide ambiant entraîné ; le débit-masse a pour expression générale d'après la définition (1.28) :

$$q_m = 2 \rho L_0 \int_0^\infty U dy \quad (\text{en kg/s}) \quad (5.124a)$$

soit, avec (5.103a) et (5.104) :

$$q_m = 2 \rho L_0 U_m \beta \int_0^\infty F' d\eta = 2 \rho L_0 U_m \beta [F(\infty) - F(0)] \quad (5.124b)$$

(on peut aussi préférer le *débit-volume* $q_v = q_m / \rho$, en m^3/s).

La fonction F est donnée par (5.120b), et le débit-masse a pour valeur :

$$q_m = 2 \rho L_0 \times 3,45 U_0 b_0^{1/2} x^{-1/2} \times 0,11 x \times 1,135$$

$$q_m = 0,86 \rho L_0 U_0 b_0^{1/2} x^{1/2} \quad (5.125a)$$

et q_m varie par conséquent en $x^{1/2}$.

Il est intéressant de considérer le *taux de dilution* dans le jet à l'abscisse x , en rapportant q_m au débit q_{m0} soufflé à la buse. Sachant que $q_{m0} = 2\rho b_0 L_0 U_0$, on obtient :

$$\boxed{\frac{q_m}{q_{m0}} = 0,43 \left(\frac{x}{b_0} \right)^{1/2}} \quad (5.125b)$$

valable rappelons-le pour $x \geq 20 b_0$, la hauteur de la buse étant $2b_0$.

5.4.2.7. - SIMILITUDE DES PROFILS DE CISAILLEMENT

Pour examiner le champ de contraintes τ dans le jet, revenons à notre équation de départ (5.97) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\}$$

qui s'écrit encore, en introduisant la contrainte totale $\tau = \tau_v + \tau'$ (5.11c) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\tau}{\rho} \right\} \quad (5.126)$$

Ici, nous avons admis $v \ll v_t$ assez loin de l'orifice, d'où $\tau \neq \tau'$ (contrainte de Reynolds).

Remplaçons $U, V, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y$ par leurs expressions (5.107) sans toucher à τ ; il vient :

$$U_m F'^2 \frac{dU_m}{dx} - U_m F F'' \frac{dU_m}{dx} - U_m^2 \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dx} F F'' = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \quad (5.127)$$

Puisque $U_m^2 \beta = M = cte$ (5.106), on obtient en dérivant par rapport à x :

$$\beta \frac{dU_m^2}{dx} = -U_m^2 \frac{d\beta}{dx}$$

Multiplions l'équation (5.127) par β et entrons-y la propriété précédente ; on a :

$$-\frac{1}{2} U_m^2 \frac{d\beta}{dx} (F'^2 - F F'') - U_m^2 \frac{d\beta}{dx} F F'' = \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)$$

c'est-à-dire, en regroupant :

$$-\frac{1}{2} U_m^2 \frac{d\beta}{dx} (F'^2 + F F'') = \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \frac{d\eta}{dy}$$

et, sachant que $\partial \eta / \partial y = 1 / \beta$:

$$\frac{1}{2} U_m^2 \frac{d\beta}{dx} (F'^2 + F F'') = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \quad (5.128)$$

où le symbole ' désigne toujours la dérivation par rapport à η .

L'auto-similarité des distributions de vitesse implique une fonction F ne dépendant que de η , et on a en conséquence :

$$\frac{1}{U_m^2 d\beta/dx} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \quad \text{indépendant de } x.$$

Sachant que $d\beta/dx = cte$, posons :

$$\frac{1}{U_m^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = G'(\eta) \quad (5.129a)$$

ou, en intégrant par rapport à η :

$$\frac{\tau}{\rho U_m^2} = G(\eta) + \varphi(x) \quad (5.129b)$$

Sur le plan de symétrie du jet ($\eta = 0, y = 0$) on a (voir 5.99) :

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) = 0$$

et en conséquence :

$$\boxed{\frac{\tau}{\rho U_m^2} = G(\eta)} \quad (5.130)$$

ce qui traduit une auto-similarité des profils réduits de cisaillement dans le jet, propriété vérifiée par l'expérience.

♪ Il y a lieu de remarquer que, inversement, on pourrait postuler la propriété $\tau/\rho U_m^2 = G(\eta)$ et en déduire $d\beta/dx = cte$. Les deux propositions sont équivalentes et l'ensemble forme un tout cohérent.

5.4.3. - Le jet axisymétrique noyé

5.4.3.1. - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Un second modèle simple de jet libre est obtenu avec une buse circulaire de rayon R_0 . L'écoulement est alors à géométrie cylindrique et présente une symétrie par rapport à l'axe du jet. Le problème est donc toujours bidimensionnel, mais avec des coordonnées qui sont maintenant x et r (fig. 5.6).

Les mécanismes physiques et les hypothèses sont comparables à ceux du jet plan ; cependant le changement de géométrie entraîne des modifications dans les équations, dans les calculs, et par voie de conséquence dans la forme des lois donnant $U, U_m, q_m \dots$ en fonction de x et de r .

Toutefois, la condition pour avoir un jet pleinement turbulent reste la même que pour le jet plan, à savoir : $Re_0 \gtrsim 10^3$ ($Re_0 = \text{Reynolds à l'orifice}$). Alors, la viscosité turbulente ν_t est prépondérante devant ν .

De même, pour une abscisse $x \gtrsim 20 R_0$, on admettra :

$$\partial p^* / \partial x \neq 0 \quad (5.131)$$

En ce qui concerne la poussée J_0 du jet (définition 5.100a), on a ici :

$$J_0 = \pi R_0^2 \rho U_0^2 \quad (5.132a)$$

et le débit de quantité de mouvement à l'abscisse x s'écrit :

$$J = \int_0^\infty \rho U^2 2\pi r dr = 2\pi \rho \int_0^\infty U^2 r dr \quad (5.132b)$$

Ainsi que pour le jet plan (§ 5.4.2.2), on admet :

$$J \# cte = J_0 \quad (5.132c)$$



5.4.3.2. - PARTICULARITÉS DU CALCUL

En coordonnées cylindriques, les équations (5.98) s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV) = 0 \quad (5.133a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(v_t r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (5.133b)$$

et les conditions aux limites (5.99) deviennent :

$$\left. \begin{array}{l} r=0 ; \quad V=0 \\ \tau = \rho v_t \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad d'o\grave{u} \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ r \rightarrow \infty ; \quad U=0 \end{array} \right\} \quad (5.134)$$

La variable adimensionnelle η est définie à présent par :

$$\eta = \frac{r}{\beta(x)} \quad (5.135)$$

les solutions auto-similaires étant toujours de la forme :

$$\frac{U}{U_m} = f(\eta) \quad (5.136)$$

avec $U_m(x) = U(x,0)$ = vitesse sur l'axe.

Cependant, pour satisfaire à la nouvelle équation de continuité, la fonction de courant Ψ doit maintenant répondre à la condition :

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} ; \quad V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.137)$$

de sorte que :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = rU = rU_m f(\eta) \quad (5.138a)$$

En exprimant r en fonction de la variable $\eta = r/\beta(x)$, il vient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{1}{\beta} \quad (5.138b)$$

c'est-à-dire, en regroupant (5.138a et b) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \beta r U_m f(\eta) = U_m \beta^2 \eta f(\eta)$$

$$\Psi = U_m \beta^2 \int_0^\eta u f(u) du + G(x) \quad (5.139a)$$

où $G(x)$ est précisé par les conditions aux limites.

Nous écrivons :

$$\Psi = U_m \beta^2 F(\eta) \quad (5.139b)$$

en posant :

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= \int_0^\eta u f(u) du + F(0) \\ F(0) &= G(x) / \beta^2 U_m \end{aligned} \right\} \quad (5.140)$$

Dans ces conditions, on a ici :

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta} F'(\eta) = \frac{U}{U_m} \quad (5.141)$$

et de ce fait, en ce qui concerne le débit de quantité de mouvement dans le jet (5.132b) :

$$\begin{aligned} J &= 2\pi\rho \int_0^\infty U^2 r dr = 2\pi\rho \int_0^\infty U_m^2 \frac{1}{\eta^2} F'^2 \eta \beta d\eta \\ J &= 2\pi\rho U_m^2 \beta^2 \int_0^\infty \frac{F'^2}{\eta} d\eta \end{aligned} \quad (5.142)$$

soit, en admettant $J = cte$ (5.132c) :

$$U_m^2(x) \beta^2(x) = M = cte \quad (5.143)$$

5.4.3.3 - ÉQUATION ADIMENSIONNELLE DU MOUVEMENT

♣ Pour introduire la variable η dans l'équation du mouvement (5.133b) il nous faut recalculer $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial r$ et V en coordonnées cylindriques.

$$U = U_m \frac{F'}{\eta} \text{ d'après (5.141)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{r}{\beta^2} \frac{d\beta}{dx}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{\beta} \quad (5.144a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{F'}{\eta} \frac{dU_m}{dx} + \frac{U_m}{\eta} F'' \left(-\frac{r}{\beta^2} \frac{d\beta}{dx} \right) - U_m F' \frac{1}{\eta^2} \left(-\frac{r}{\beta^2} \frac{d\beta}{dx} \right) \\ &= \frac{F'}{\eta} \frac{dU_m}{dx} - \frac{U_m}{\beta} F'' \frac{d\beta}{dx} + U_m F' \frac{1}{\eta \beta} \frac{d\beta}{dx} \end{aligned} \quad (5.144b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U_m}{\eta} \frac{F''}{\beta} - \frac{U_m}{\eta^2} \frac{F'}{\beta} \quad (5.144c)$$

et avec (5.135) :

$$r \frac{\partial U}{\partial r} = U_m F'' - U_m \frac{F'}{\eta}$$

Supposons comme pour le jet plan que la viscosité turbulente ne dépend pas de la coordonnée transversale (ici r). Alors le dernier terme de l'équation (5.133b) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(v_t r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \left(U_m \frac{F'''}{\beta} - \frac{U_m}{\eta} \frac{F''}{\beta} + U_m F' \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{\beta} \right) v_t \quad (5.144d)$$

En outre, avec 5.139b) :

$$V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$V = -F \frac{\beta}{\eta} \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{d\beta}{dx} \left(F' - 2 \frac{F}{\eta} \right) \quad (5.144e)$$

En reportant les expressions (5.141) et (5.144) dans l'équation du mouvement (5.133b), on obtient après quelques regroupements et simplifications :

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{v_t \eta} \frac{dU_m}{dx} F'^2 + \left(\beta^2 \frac{dU_m}{dx} + 2\beta U_m \frac{d\beta}{dx} \right) \left(\frac{F F'}{v_t \eta^2} - \frac{F F''}{v_t \eta} \right) \\ = F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} \end{aligned} \quad (5.145)$$

◆ La condition (5.143) permet encore d'écrire :

$$dM / dx = 0 \quad (5.146)$$

c'est-à-dire :

$$\beta^2 \frac{dU_m}{dx} = -\beta U_m \frac{d\beta}{dx} \quad (5.147)$$

et, en remplaçant dans (5.145) :

$$\frac{U_m \beta}{v_t} \frac{d\beta}{dx} \left(\frac{F F'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{F F''}{\eta} \right) = F''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} \quad (5.148)$$

L'existence de solutions auto-similaires n'est possible que si l'équation précédente ne dépend que de η . Elle est donc conditionnée par la relation :

$$\frac{U_m \beta}{v_t} \frac{d\beta}{dx} = cte = C \quad (5.149a)$$

!!! De même que pour le jet plan, l'expérience montre ici que la courbe $\beta(x)$ définie par (5.149b) est une droite dont la pente est pratiquement indépendante des conditions d'expérience, à savoir :

$$x \geq 20 R_0, \quad \beta(x) \approx 0,1 x \quad (5.150)$$

La valeur de la constante étant à notre discrétion, nous la choisirons en conservant la condition (5.117b) :

$$\frac{U(\beta)}{U_m} = \frac{1}{2} \quad (5.149b)$$

La détermination numérique de C sera effectuée un peu plus loin (5.157e).

♥ Puisque d'après (5.143) on a $U_m \beta = M^{1/2}$, la viscosité turbulente est de la forme :

$$\nu_t = \frac{0,1}{C} M^{\frac{1}{2}} \quad (5.151a)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\nu_t = cte} \quad (5.151b)$$

Dans le jet rond, d'après les données expérimentales, la viscosité turbulente peut donc être considérée comme indépendante des coordonnées d'espace. Son expression exacte sera précisée tout à l'heure.

♠ Ainsi, l'équation différentielle (5.148) à résoudre s'écrit :

$$C \left(\frac{F F'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{F F''}{\eta} \right) = F'''' - \frac{F''}{\eta} + \frac{F'}{\eta^2} \quad (5.152)$$

Les conditions aux limites à prendre en compte proviennent de (5.134, 5.141 et 5.144) :

a) $r \rightarrow 0 : \eta \rightarrow 0$; alors :

$$\begin{aligned} U \rightarrow U_m ; \quad \frac{F'}{\eta} \rightarrow 1 & \quad \text{d'après (5.141)} \\ \text{d'où} \quad F'(0) = 0 & \\ V \rightarrow 0 ; \quad \frac{F}{\eta} \rightarrow 0 & \quad \text{d'après (5.144e)} \\ \text{d'où} \quad F(0) = 0 & \\ \frac{\partial U}{\partial r} \rightarrow 0 ; \quad \frac{F''}{\eta} \approx \frac{F'}{\eta^2} & \quad \text{d'après (5.144c)} \\ \text{d'où} \quad F''(0) = 1 & \end{aligned} \quad (5.153a)$$

b) $r \rightarrow \infty : \eta \rightarrow \infty$

$$U \rightarrow 0 ; \quad \frac{F'}{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{d'après (5.141)} \quad (5.153b)$$

5.4.3.4. - DISTRIBUTION DE VITESSE DANS LE JET

♣ Il reste à résoudre l'équation (5.152). Avec les conditions précédentes, une première intégration donne :

$$F'' - \frac{F'}{\eta} + C \frac{F F'}{\eta} = 0 \quad (5.154a)$$

Un léger réaménagement des termes, à savoir :
 $\eta F'' + F' - 2F' + C F F' = 0$

nous permet de procéder aisément à une seconde intégration :

$$\eta F' - 2F + \frac{C}{2} F^2 = 0 \quad (5.154b)$$

la constante d'intégration étant nulle d'après (5.153).

Introduisons la fonction auxiliaire :

$$G = F \sqrt{\frac{C}{2}} - \sqrt{\frac{2}{C}} \quad (5.155)$$

L'équation précédente devient alors :

$$\eta G' \sqrt{\frac{2}{C}} + G^2 - \frac{2}{C} = 0 \quad (5.156)$$

et se transforme en équation de Riccati, qui s'écrit encore, vu que $G' = dG/d\eta$:

$$\frac{d\eta}{\eta} = \sqrt{\frac{C}{2}} \frac{dG}{1 - \frac{C}{2} G^2}$$

d'où en intégrant :

$$\text{Ln } \eta = \sqrt{\frac{C}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{C}} \text{Ln} \frac{1 + \sqrt{\frac{C}{2}} G}{1 - \sqrt{\frac{C}{2}} G} + \frac{1}{2} \text{Ln } k \quad (5.157a)$$

k étant une constante déterminée par les conditions aux limites. On en tire :

$$2 \text{Ln } \eta = \text{Ln } k \frac{1 + \sqrt{\frac{C}{2}} G}{1 - \sqrt{\frac{C}{2}} G}$$

soit, en revenant à la définition (5.155) de G :

$$\eta^2 = k \frac{\frac{C}{2} F}{2 - \frac{C}{2} F} \quad (5.157b)$$

De là, on déduit l'expression de $F(\eta)$:

$$F = \frac{4}{Ck} \frac{\eta^2}{1 + \frac{1}{k} \eta^2} \quad (5.157c)$$

et de sa dérivée première :

$$F' = \frac{8}{Ck} \frac{\eta}{\left(1 + \frac{1}{k} \eta^2\right)^2} \quad (5.157d)$$

Sachant que $F'/\eta = 1$ pour $\eta = 0$ (condition 5.153) et que $F'/\eta = 0,5$ pour $\eta = 1$ (définition 5.149b de β), on détermine les constantes :

$$Ck = 8 ; \quad 1/k = 0,415 \quad \text{et} \quad C = 3,31 \quad (5.157e)$$

⚠ Attention, pour les constantes, certains auteurs font la démarche inverse : ils fixent d'abord la valeur de C , en choisissant la plus simple : $C = 1$, d'où $1/k = 0,125$ et $\beta(x) = 0,055x$ (voir aussi à ce sujet § 5.4.2.5 ♦).

Avec les valeurs (5.157e) adoptées ici, la loi de distribution de la vitesse dans le jet est donc (cf. 5.141) :

$$\boxed{\frac{F'}{\eta} = \frac{U}{U_m} = \frac{1}{(1 + 0,415 \eta^2)^2}} \quad (5.158)$$

avec, rappelons-le :

$$\eta = \frac{r}{\beta(x)} = \frac{r}{0,1x} \quad (5.159a)$$

En outre :

$$F = \frac{0,5 \eta^2}{1 + 0,415 \eta^2} \quad (5.159b)$$

La courbe U/U_m est représentée sur la figure 5.8 ; elle offre le même aspect que celle du jet plan.

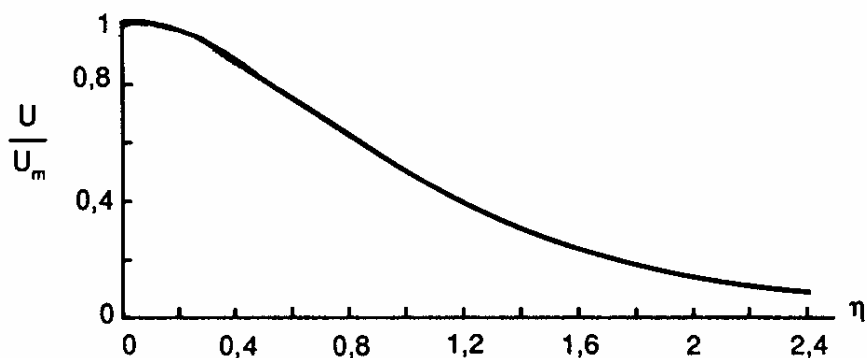


FIG. 5.8. - Distribution transversale de vitesse dans le jet rond

♦ Nous pouvons à présent évaluer la constante M à partir de (5.142), (5.143) et (5.158) :

$$J = 2\pi\rho M \int_0^\infty \frac{F'^2}{\eta} d\eta = 2\pi\rho M \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{(1 + 0,415 \eta^2)^4} \quad (5.160a)$$

L'intégrale se calcule par changement de variable, en posant :

$$X = 1 + 0,415 \eta^2 ; \quad dX = 2 \times 0,415 \eta d\eta$$

$$J = 2\pi\rho M \frac{1}{2 \times 0,415} \int_1^\infty \frac{dX}{X^4} = 2\pi\rho M \frac{1}{8 \times 0,415}$$

autrement dit :

$$J = 0,6 \pi \rho M \quad (5.160b)$$

et aussi, avec (5.132a) :

$$J = J_0 = \pi R_0^2 \rho U_0^2$$

soit :

$$M = 1,66 R_0^2 U_0^2 \quad (5.161)$$

De (5.143) on tire enfin :

$$\boxed{U_m = \frac{M^{1/2}}{\beta} ; \quad \frac{U_m}{U_0} = 12,6 \frac{R_0}{x}} \quad (5.162)$$

La distribution des vitesses moyennes dans le jet à des abscisses $x \gtrsim 20 R_0$ est entièrement déterminée par les expressions (5.158) et (5.162), en bon accord avec les résultats expérimentaux, à ceci près que la loi U/U_m surévalue légèrement cette grandeur pour $\eta \gtrsim 1,7$.

♥ Nous avons observé (§ 5.4.3.3 ♥) qu'une loi linéaire pour $\beta(x)$ entraînait une viscosité turbulente uniforme dans le jet. Nous pouvons maintenant calculer la valeur de ν_t d'après (5.151a) et (5.161) :

$$\nu_t = \frac{0,1}{C} M^{1/2} \quad \text{avec} \quad C = 3,31$$

soit :

$$\nu_t = 0,039 U_0 R_0 \quad (5.163a)$$

Sachant que le nombre de Reynolds au soufflage doit être supérieur à 1000 environ, on en déduit que ν_t est au moins égale à 20ν .

En outre, on retrouve une propriété déjà signalée dans l'étude du jet plan (§ 5.4.2.5. ♠), avec une constante légèrement différente :

$$\frac{U_m \beta}{\nu_t} = cte = 33 \quad (5.163b)$$

La longueur de mélange $l = \left(\frac{\nu_t}{\partial U / \partial r} \right)^{1/2}$ qui donne en principe naissance à

l'expression de ν_t n'est pas une fonction simple de x ou de y , et ne saurait être postulée *a priori*. L'occasion est peut-être bonne pour observer que le modèle pseudo-laminaire tel que nous l'avons présenté au chapitre 3 s'appuie sur une logique un peu idéalisée (longueur de mélange \rightarrow viscosité turbulente \rightarrow structure de l'écoulement), et que les données expérimentales peuvent venir le bousculer, puisqu'ici la valeur de ν_t est une conséquence de la loi expérimentale $\beta(x) \sim x$ (voir aussi § 5.4.2.5 ♠).

5.4.3.5. - DÉBIT DE FLUIDE DANS UN JET ROND

Le fluide ambiant se trouve entraîné par le jet avec le même mécanisme que dans le jet plan. Le débit total est donc une fonction croissante de x , et il a pour expression (cf. 1.28) :

$$q_m(x) = \int_0^\infty \rho U 2\pi r dr = 2\pi \rho U_m \int_0^\infty \frac{U}{U_m} r dr \quad (5.164a)$$

c'est-à-dire, avec (5.141) et en introduisant la variable η (5.135) :

$$q_m = 2\pi \rho U_m \int_0^\infty \frac{F'}{\eta} \beta \eta \beta d\eta = 2\pi \rho U_m \beta^2 \{F(\infty) - F(0)\} \quad (5.164b)$$


De (5.159b) on tire : $F(\infty) = 1,2$ et $F(0) = 0$. D'où en incluant (5.162) :

$$q_m = 0,3 \pi \rho U_0 R_0 x \quad (\text{en kg/s}) \quad (5.165)$$

Le *taux de dilution* en x est le rapport entre q_m et le débit à l'orifice $q_{m0} = \pi \rho R_0^2 U_0$.
Il vaut ici :

$$\boxed{\frac{q_m}{q_{m0}} = 0,3 \frac{x}{R_0}} \quad (5.166)$$

(et non pas $0,3 x / D_0$ comme on le voit souvent écrit par suite d'une coquille persistante).

 L'effet d'entraînement est beaucoup plus marqué qu'avec le jet plan puisque le débit est proportionnel à x au lieu de $x^{1/2}$.

5.4.3.6. - LE CISAILLEMENT DANS LE JET ROND

Revenons enfin à l'équation (5.133b), et admettons que le cisaillement dans le jet soit essentiellement dû à la turbulence, c'est-à-dire que $\tau \approx \rho \nu_t \frac{\partial U}{\partial r}$; elle s'écrit alors :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (5.167)$$

En explicitant les expressions de U (5.141), $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial r$ et V (5.144), on obtient après quelques simplifications :

$$U_m \frac{F'^2}{\eta} \frac{dU_m}{dx} + \left(U_m \frac{dU_m}{dx} + 2 \frac{U_m^2}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \right) \left(\frac{F F'}{\eta^2} - \frac{F F''}{\eta} \right) = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad (5.168)$$

Reprenons la relation (5.147) :

$$\beta^2 \frac{dU_m}{dx} = -\beta U_m \frac{d\beta}{dx}$$

et introduisons-là dans (5.168), en nous rappelant que $r = \eta \beta$ et $\partial \eta / \partial r = 1 / \beta$; il vient après multiplication du tout par β :

$$U_m^2 \frac{d\beta}{dx} \left(\frac{F F'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{F F''}{\eta} \right) = \frac{\tau}{\rho} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \quad (5.169)$$

Les solutions de cette équation sont indépendantes de x à condition que :

$$\frac{1}{\rho U_m^2} \frac{d\beta}{dx} \left(\tau + \eta \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right) = \text{fonction de } \eta \quad (5.170a)$$

L'expérience ayant montré que $d\beta/dx = cte$, il en résulte une propriété d'auto-similarité des profils réduits de cisaillement :

$$\frac{\tau}{\rho U_m^2} = G(\eta) \quad (5.170b)$$

analogue à celle que nous avons mise en évidence dans le jet plan (cf. 5.130).



5.5. – JETS PARIÉTAUX TURBULENTS

5.5.1. – Spécificités des jets pariétaux noyés

En préalable à ce qui va suivre, rappelons d'abord qu'un jet noyé débouche dans un fluide ambiant immobile de même nature que le fluide du jet.

Quant au jet pariétal, c'est un jet plan ou axisymétrique dont un seul côté est libre, l'autre étant en contact avec une paroi qui prolonge l'un des côtés de la buse d'éjection (fig. 5.9 et 5.10). On admet encore un profil de vitesse U_0 uniforme à la sortie de la buse, dont l'épaisseur sera notée b_0 .

Il est à noter que le jet radial issu d'une buse (plane ou cylindrique) perpendiculaire à la paroi présente aussi les propriétés d'un jet pariétal (fig. 5.11).

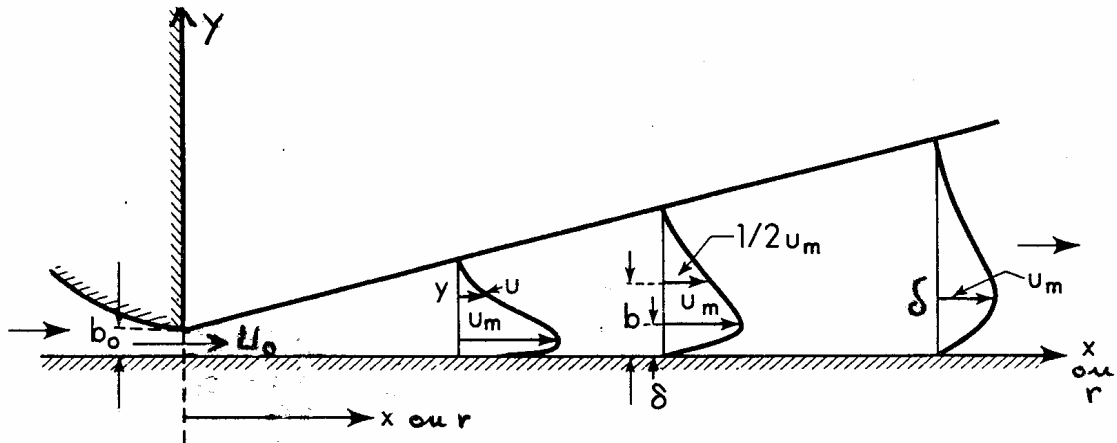


FIG. 5.9 – Structure d'un jet pariétal turbulent (d'après Rajaratnam)

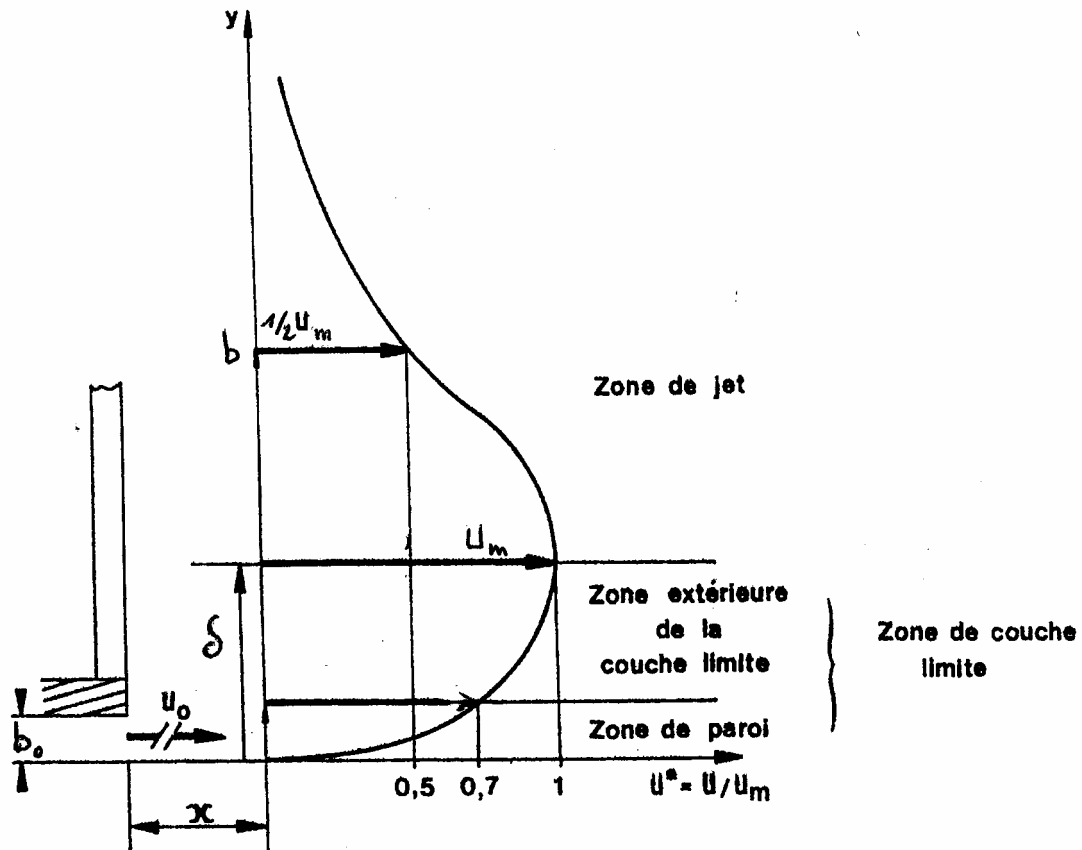


FIG. 5.10 – Zones de l'écoulement dans un jet pariétal (d'après Nizou et al.)

Cette catégorie d'écoulement est la plus complexe que nous ayons rencontrée jusqu'ici puisqu'elle associe les propriétés d'un écoulement de couche limite et celles d'un jet libre. En particulier, dans une section droite de l'écoulement, la vitesse U augmente à partir de la paroi, passe par un maximum U_m et décroît jusqu'à $U_\infty = 0$ dans le fluide ambiant. La première

zone (dans laquelle U passe de 0 à U_m) se présente donc comme une zone de couche limite, et la seconde (où U décroît de U_m à zéro) comme une zone de jet. Dans ces conditions, on définira tout naturellement l'épaisseur de couche limite δ comme l'ordonnée pour laquelle $U = U_m$:

$$U(\delta) = U_m \quad (5.171a)$$

tandis que la zone de jet sera caractérisée (comme pour les jets libres) par l'ordonnée b où U vaut la moitié de la vitesse maximale :

$$U(b) = \frac{U_m}{2} \quad (5.171b)$$

D'un point de vue mécanique, le jet pariétal combine un frottement à la paroi et une dilution par mélange turbulent avec le fluide ambiant.

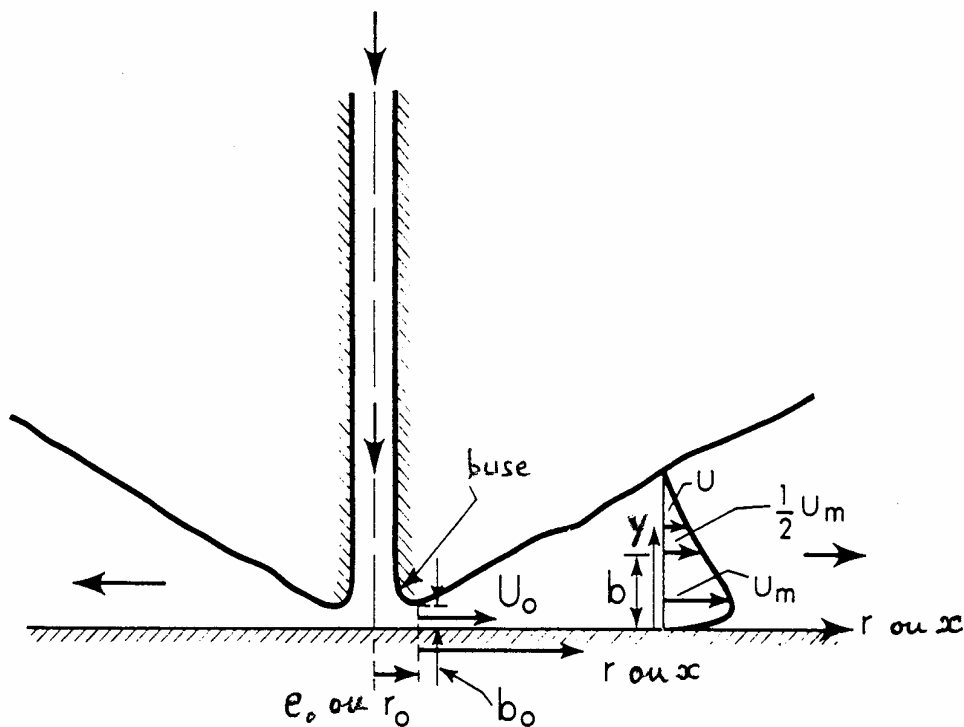


FIG. 5.11 – Jet pariétal radial

5.5.2. – Le jet pariétal plan noyé

5.5.2.1. – ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

♣ Les hypothèses de base sont les mêmes pour les couches limites et les jets (y compris pour la pression puisque dans le fluide ambiant elle obéit à la loi de l'hydrostatique $p_\infty^* = cte$). Le jet pariétal est donc décrit par l'équation de continuité (5.6a) et l'équation de quantité de mouvement (5.8) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.172a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (5.172b)$$

A ces équations sont maintenant associées les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} - \text{à la paroi : } & y = 0 ; \quad U = 0 ; \quad V = 0 \\ & \hspace{15em} (5.173) \end{aligned}$$

$$- \text{au loin : } \quad y \rightarrow \infty ; \quad U = 0 ; \quad V = 0$$

Entre $y = 0$ et $y = \delta$, on retrouve une structure classique de couche limite turbulente avec une couche interne (sous-couche visqueuse + couche logarithmique) et une couche externe (fig. 5.10) tandis que, au-delà de $y = \delta$, la structure est celle d'un jet libre comme on l'a dit plus haut.

◆ Il a été montré expérimentalement que l'auto-similarité mise en évidence dans les jets libres s'étend aux jets pariétaux. En d'autres termes, le paramètre $b(x)$ étant défini par $U(b) = U_m / 2$ (5.171b), le champ de vitesse dans la partie développée du jet obéit à la relation :

$$\frac{U}{U_m} = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{y}{b(x)} \quad (5.174)$$

Toutefois, la présence de la couche limite ne permet pas d'obtenir des solutions analytiques au système (5.172 – 173) comme c'était le cas avec les jets libres. Pour sa résolution, il faut se tourner vers les méthodes exposées dans la première partie de ce chapitre, ou dans le chapitre 3.

♥ La dynamique du jet pariétal est toujours conditionnée par la poussée à l'origine (§.5.4.2.2). Puisque la hauteur de la buse est ici b_0 , celle-ci s'écrit :

$$J_0 = \rho b_0 L_0 U_0^2 \quad (5.175)$$

Mais cette fois, contrairement au cas du jet libre, il n'y a plus conservation de la quantité de mouvement car une partie de cette quantité de mouvement est transformée en force de frottement à la paroi. Pour mettre ceci en évidence, le plus simple est d'intégrer l'équation (5.172b) dans un plan d'abscisse x perpendiculaire à la paroi :

$$\int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^\infty V \frac{\partial U}{\partial y} dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\} dy$$

soit, en opérant une petite manipulation sur le second terme :

$$\int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial(UV)}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y} \right\} dy = \left[(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right]_0^\infty$$

D'après l'équation de continuité, $\partial V / \partial y = - \partial U / \partial x$, d'où :

$$\int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy + [UV]_0^\infty + \int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy = \left[(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right]_0^\infty$$

et compte tenu des conditions aux limites :

$$2 \int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy = - \frac{\tau_p}{\rho}$$

Finalement :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho U^2 dy = -\tau_p \quad (5.176)$$

La relation précédente constitue une variante de l'équation de Karman (§ 4.6.3), adaptée aux conditions du jet pariétal.

5.5.2.2. – PRINCIPAUX RÉSULTATS

Nous nous bornerons à citer les résultats expérimentaux les plus significatifs. Ceux-ci sont valables à partir d'une distance à la buse de l'ordre de $20 b_0$ (b_0 étant la hauteur de la dite buse, cf. fig. 5.9 et 5.10).

♣ La vitesse maximale $U_m(x, y = \delta)$ (cf. 5.171a et b) est proportionnelle à $1/\sqrt{x}$:

$$\frac{U_m}{U_0} = 3,50 \left(\frac{b_0}{x} \right)^{1/2} \quad (5.176a)$$

On exprime habituellement l'épaisseur de couche limite sous la forme :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{Re_{0x}^{0,2}} \quad \text{où} \quad Re_{0x} = \frac{U_0 x}{\nu} \quad (5.176b)$$

ou encore, ce qui met mieux en évidence le fait que δ est en réalité proportionnelle à $x^{0,8}$:

$$\delta = 0,37 \nu^{0,2} U_0^{-0,2} x^{0,8} \quad (5.176c)$$

Un retour au paragraphe 5.3.2 (relations 5.67) nous permet de constater que *cette loi est exactement la même que dans une couche limite standard sans gradient de vitesse extérieure.*

◆ Le champ de vitesse exprimé en fonction de $\eta = y/b(x)$ (5.174 et 5.171b) peut être approché par une fonction analytique :

$$\frac{U}{U_m} = 1,48 \eta^{1/7} \{1 - \text{erf}(0,68 \eta)\} \quad \text{avec} \quad \frac{U(\eta = 1)}{U_m} = \frac{1}{2} \quad (5.177a)$$

le paramètre $b(x)$ obéissant à une loi linéaire :

$$b(x) = 0,068 x \quad (5.177b)$$

La structure de la couche limite répond à la description faite dans la première partie du chapitre, avec une sous-couche visqueuse dans laquelle $U = (\tau_p / \mu) y$, conformément à (5.25a), et une couche logarithmique où (5.26c) est remplacée par (Nizou et al.):

$$\frac{U}{U_\tau} = 1,80 \text{Ln} \frac{y U_\tau}{\nu} + 8,1 \quad (5.177c)$$

♥ Le frottement à la paroi est exprimé par un coefficient de frottement C_f rapporté à la vitesse locale maximale $U_m(x)$ (Nizou et al.) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U_m^2} = 0,060 \left\{ \frac{U_m (x + 20 b_0)}{\nu} \right\}^{-0,222} \quad (5.178)$$

♠ Enfin, le *taux de dilution du jet* est proportionnel à x . Avec un débit à la buse $q_{m0} = \rho b_0 L_0 U_0$ on a :

$$\frac{q_m(x)}{q_{m0}} = 0,248 \frac{x}{b_0} \quad (5.179)$$

5.5.3. – Le jet pariétal axisymétrique (ou radial) noyé

Ce type de jet est issu d'une buse cylindrique, dont on note le rayon r_0 et la hauteur b_0 (fig. 5.11). Dans la zone de jet, en définissant encore $b(x)$ par :

$$\frac{U(b)}{U_m} = \frac{1}{2}$$

L'expérience donne, r étant mesuré à partir du bord de la buse :

$$b = 0,078 r \quad (5.180a)$$

$$\frac{U_m}{U_0} = \frac{3 \sqrt{r_0 b_0}}{r} \quad (5.180b)$$

$$\frac{q_m(r)}{q_{m0}} = 0,2 \frac{r}{\sqrt{r_0 b_0}} \quad (5.180c)$$

5.6. – PORTÉE D'UN JET - EFFET COANDA

5.6.1. – Définition

On appelle « portée d'un jet » la distance x_p (ou r_p) au bout de laquelle la vitesse maximale U_m dans le jet devient inférieure à une valeur donnée U_p , la caractérisation et la valeur numérique de U_p dépendant de chaque application. Par exemple, dans le domaine de la ventilation, U_p est une « vitesse de confort » qui peut aller de 0,15 à 0,5 m/s.

Quant à « l'effet Coanda », c'est une propriété spécifique au jet pariétal, dont nous reparlerons un peu plus loin (§ 5.6.5).

5.6.2. - Évaluation

Si $U_p = U_m(x_p)$ nous avons d'après (5.122), (5.162), (5.176a) et (5.180b) :

- Pour le jet plan :

$$x_p = (3,45)^2 b_0 \left(\frac{U_0}{U_p} \right)^2 = 11,90 b_0 \left(\frac{U_0}{U_p} \right)^2 \quad (5.181a)$$

- Pour le jet rond :

$$x_p = 12,6 R_0 \frac{U_0}{U_p} \quad (5.181b)$$

- Pour le jet pariétal plan (avec ici b_0 = hauteur de buse):

$$x_p = (3,50)^2 b_0 \left(\frac{U_0}{U_p} \right)^2 = 12,25 b_0 \left(\frac{U_0}{U_p} \right)^2 \quad (5.181c)$$

- Pour le jet pariétal axisymétrique :

$$r_p = 3 \sqrt{r_0 b_0} \frac{U_0}{U_p} \quad (5.181d)$$

5.6.3. - Comparaisons

Une comparaison entre les catégories de jets concernera essentiellement leur portée et leur taux de dilution. Toutefois, les différentes géométries ne sont guère comparables, et il est impossible de dire d'une façon générale que par exemple la dilution dans tel jet est meilleure que dans tel autre. Par contre, il est intéressant de considérer la sensibilité de la portée ou de la dilution aux paramètres influents que sont la dimension de la buse, la vitesse de soufflage et la distance à l'orifice.

- ♣ - Si l'on privilégie la *portée du jet* (parag. précédent) on voit que :
 - pour tous les jets, x_p est proportionnelle à la dimension de la buse (celle-ci étant représentée par $\sqrt{r_0 b_0}$ pour le jet pariétal axisymétrique).
 - dans les jets plans (libres ou pariétaux) x_p est proportionnelle à U_0^2 .
 - dans les jets axisymétriques (libres ou pariétaux) la portée est proportionnelle à U_0 .

L'effet de la vitesse de soufflage est donc nettement plus marqué avec les jets plans.

De plus, pour une même vitesse à l'origine U_0 et pour une même hauteur de buse h_0 , la portée du jet plan libre (5.181a, où $b_0 = h_0 / 2$) est inférieure à la portée du jet plan pariétal (5.181c, où $b_0 = h_0$).

- ◆ - Si l'on met l'accent sur le *taux de dilution* (formules 5.125b, 5.166, 5.179 et 5.180c), il apparaît que pour tous les types de jets, la vitesse de soufflage est sans effet. Le seul paramètre influent est le rapport (x ou r) / L_c , où L_c est la dimension caractéristique de la buse (b_0 , R_0 ou $\sqrt{r_0 b_0}$).
 - dans le jet plan libre, la dilution est proportionnelle à $\sqrt{x/L_c}$.
 - dans tous les autres jets, la dilution est proportionnelle à x/L_c (ou r/L_c).

5.6.4. – Jet unique ou jets multiples ?

Le problème se pose essentiellement pour les jets libres : dans certains cas, on peut se demander s'il vaut mieux utiliser un gros jet ou plusieurs petits. Formulée ainsi, la question est trop vague, aussi nous allons la préciser : le débit total de soufflage q_{t0} et la section totale de soufflage S_{t0} étant donnés, est-il préférable d'utiliser un seul jet ou plusieurs ?

Là encore, la réponse va dépendre du paramètre auquel on donne la priorité : portée ou dilution.

Notons n le nombre de jets, q_0 et S_0 le débit et la section de soufflage de chaque « petit » jet, $q(x)$ et $q_t(x)$ le débit d'un jet et le débit total à l'abscisse x . Nous admettons évidemment que les jets ne sont pas trop proches, pour éviter des interactions entre eux. Alors :

$$S_{t0} = n S_0 \text{ (ou } b_{t0} = n b_0 \text{ pour le jet plan); } q_{t0} = n q_0 ; q_t(x) = n q(x)$$

♣ - Priorité à la dilution :

! Dans le jet plan on a pour un petit jet (formule (5.125b) :

$$\frac{q(x)}{q_0} = 0,43 \left(\frac{x}{b_0} \right)^{1/2} \text{ soit } \frac{q(x)}{q_{t0}/n} = 0,43 \frac{x^{1/2}}{(b_{t0}/n)^{1/2}}$$

d'où :

$$q_t(x) = n q(x) = 0,43 q_{t0} \frac{x^{1/2}}{b_{t0}^{1/2}} \sqrt{n} \quad (5.182a)$$

!! Dans le jet rond (formule 5.166) :

$$\frac{q(x)}{q_0} = 0,3 \frac{x}{R_0} = 0,3 \sqrt{\pi} \frac{x}{\sqrt{S_0}} \text{ soit } \frac{q(x)}{q_{t0}/n} = 0,53 \frac{x}{\sqrt{S_{t0}/n}}$$

et ici :

$$q_t(x) = n q(x) = 0,53 q_{t0} \frac{x}{\sqrt{S_0}} \sqrt{n} \quad (5.182b)$$

En conclusion, pour les deux types de jets libres, le débit total est proportionnel à \sqrt{n} . *La dilution est donc meilleure en utilisant plusieurs jets.* Ainsi, elle est multipliée par 2 si on utilise 4 jets au lieu d'un seul.

◆ - Priorité à la portée :

! Avec des jets plans, d'après (5.181a), sachant que $q_0 = 2 \rho b_0 L_0 U_0 = q_{t0}/n$ et que $b_0 = b_{t0}/n$, on obtient à la fin du calcul :

$$x_p = 3,92 \frac{q_{t0}^2}{\rho b_{t0} L_0^2 U_p^2} \frac{1}{n} \quad (5.183a)$$

!! Pour les jets ronds, vu (5.181b), avec $q_0 = \rho \pi R_0^2 U_0 = q_{t0}/n$, $R_0 = \sqrt{S_0/\pi}$ et $S_0 = S_{t0}/n$, la portée devient en fonction de n :

$$x_p = \frac{12,6}{\sqrt{\pi}} \frac{q_{t0}}{U_p \sqrt{S_{t0}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (5.183b)$$

Donc on diminue la portée en augmentant le nombre de jets. Mais l'influence de n est plus importante avec des jets plans. En passant de 1 à 4 jets, on divise la portée des jets plans par 4 et celle des jets ronds par 2 seulement.

5.6.5. – Jets pulsés et jets vibrés

Un autre moyen d'augmenter la dilution est de moduler la vitesse d'éjection. Ceci peut être obtenu au moyen d'un dispositif mécanique (un piston par exemple) placé en amont de la buse : on parle alors de jets pulsés. Une technique plus récente – et réservée aux jets plans ou rectangulaires - consiste à placer des lames vibrantes dans la buse, ce qui crée des vortex à la périphérie du jet. Dans ce cas, la dénomination anglaise (*synthetic jets*) a été traduite mot à mot par « jets synthétiques », ce qui ne veut pas dire grand-chose. Par analogie avec les jets pulsés, on devrait parler de *jets vibrés*.

5.6.6. – L'effet Coanda

On appelle communément « *effet Coanda* » une propriété des jets pariétaux dont certains aspects ont été observés dès le 19^{ème} siècle, et qui a fait l'objet de brevets déposés dans les années 1930 par l'ingénieur roumain Henri Coanda. Ce phénomène multiforme, un peu difficile à cerner, donne lieu à des explications plus ou moins convaincantes et à des interprétations extensives. En particulier, il est parfois relié à la notion de portée du jet, sans qu'il y ait de relation directe entre les deux.

Pour essayer d'expliquer assez simplement cet « effet », il nous faut revenir aux propriétés d'une couche limite en présence d'un gradient de vitesse extérieure.

Rappelons que dans le cas d'une couche limite laminaire, si la loi de vitesse dans l'écoulement extérieur est de la forme (4.66a) : $U_{\infty}(x) = C(x + x_0)^m$, alors le gradient de vitesse à la paroi devient négatif pour $m < -0,0904$, ce qui implique l'apparition d'une zone de recirculation et un décollement de la couche limite (§ 4.5.1.5, 4.5.1.6 et fig. 4.6). Qualitativement, on retrouve un comportement analogue dans les couches limites turbulentes.

Une valeur négative de m correspond à un gradient dU_{∞}/dx négatif, c'est-à-dire à un ralentissement de l'écoulement extérieur. Ceci peut être obtenu en particulier avec une paroi convexe (fig. 4.6), puisque dans ce cas la section offerte au fluide augmente dans le sens de l'écoulement.

Mais l'expérience montre que si la couche limite est produite non par un écoulement extérieur mais par un jet pariétal ($U_{\infty}(x)$ étant remplacée par $U_m(x)$), le décollement se trouve retardé, c'est-à-dire qu'il se produit plus loin, pour une valeur de m inférieure à la valeur critique $-0,0904$. Le jet « colle » donc plus longtemps à la paroi. *C'est cette propriété qui constitue fondamentalement l'effet Coanda.*

Signalons enfin que, si l'on souffle horizontalement un jet froid dans une ambiance plus chaude, le jet s'incurve vers le bas sous l'effet des forces de flottabilité. On observe dans ce cas qu'un jet plan libre s'incurve plus vite qu'un jet pariétal soufflé au plafond de l'enceinte. Cette propriété est aussi attribuée à l'effet Coanda, mais n'a qu'une très lointaine parenté avec l'original.



HERGÉ – Le temple du soleil

ANNEXES AU CHAPITRE 5

5.A.1 – L'ÉQUATION DE KARMAN EN RÉGIME TURBULENT

En présentant la méthode semi-intégrale au parag. 5.3.1, nous avons signalé sans insister que l'équation de Karman établie en régime laminaire (§ 4.6.3) reste valable dans une couche limite turbulente. Il est nécessaire de justifier cette propriété.

Rappelons d'abord (ch. 3, annexe 3.A.2) que dans un écoulement turbulent, lorsqu'on passe aux valeurs moyennes :

* U devient $U + \bar{u} = U$ puisque la moyenne d'une fluctuation est nulle

* U^2 devient $U^2 + \overline{u^2} + 2U\bar{u} = U^2 + \overline{u^2}$ pour la même raison.

Donc, dans l'équation (4.88), en faisant tout de suite tendre Y vers l'infini, $\frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho U^2 dy$ devient $\frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho (U^2 + \overline{u^2}) dy$, ou d'après la définition (5.3) de la viscosité turbulente :

$$= \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho \left(U^2 - \nu_t \frac{\partial U}{\partial x} \right) dy \quad (1)$$

Dans le cas laminaire, la contribution des termes en $\partial U / \partial x$ de (4.88) a été négligée, ce qui revient à dire qu'on a admis l'approximation :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \mu \frac{\partial U}{\partial x} dy \ll \tau_p$$

De la même façon, dans le cas turbulent, on admettra que le second terme de (1) est également négligeable devant τ_p . D'où finalement il n'y a rien de changé dans (4.88) ni dans la suite. L'équation de Karman (4.94a) est donc transposable à la couche limite turbulente.

5.A.2. – RETOUR SUR LE JET ROND LAMINAIRE : UN ÉCHEC DE LA THÉORIE

*Quand on a éliminé l'impossible,
ce qui demeure, aussi improbable
que cela soit, est sûrement la vérité.*

Sherlock Holmes (alias CONAN DOYLE)

Le problème du jet laminaire axisymétrique est plus rapide à présenter à partir du modèle turbulent. En effet, nous sommes arrivés à la conclusion que dans le jet rond, la viscosité turbulente est constante. Formellement, le calcul va donc être le même dans le cas laminaire (à quelques détails près), en remplaçant ν_t par la viscosité moléculaire ν du fluide.

Nous donnons ci-dessous sans commentaires les principales étapes du calcul. Elles pourront être suivies pas à pas en se reportant au § 5.4.3.

$$J = J_0 = \pi \rho R_0^2 U_0^2$$

$$U_m^2 \beta^2 = M = cte$$

$$\frac{U_m \beta}{\nu} \frac{d\beta}{dx} = C = 1 \text{ (même choix de } C \text{ que pour le jet plan laminaire, ch.4)}$$

d'où :

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\nu}{M^{1/2}} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \frac{\nu x}{M^{1/2}} \quad \text{pour } x \geq 20 R_0$$

$$F' = \frac{8}{k} \frac{\eta}{\left(1 + \frac{1}{k} \eta^2\right)^2} \quad \text{et} \quad F = \frac{0,5 \eta^2}{1 + 0,125 \eta^2}$$

$$\frac{F'}{\eta} = 1 \text{ pour } \eta = 0 \quad \text{d'où} \quad k = 8 \quad \text{et} \quad 1/k = 0,125$$

$$\frac{F'}{\eta} = \frac{U}{U_m} = \frac{1}{\left(1 + 0,125 \eta^2\right)^2}$$

$$J = J_0 = 2 \pi \rho M \quad \text{d'où} \quad M = \frac{1}{2} R_0^2 U_0^2$$

$$U_m = \frac{M^{1/2}}{\beta} = 0,5 \frac{R_0^2 U_0^2}{\nu x}$$

Jusque-là, en apparence, tout va bien. Mais les choses se gâtent quand on veut calculer le débit, puisqu'on obtient :

$$q_m(x) = 8 \pi \rho \nu x$$

Donc, le débit serait le même dans tout les jets ronds laminaires, quels que soient le rayon de l'orifice et la vitesse de soufflage !!!

Ce résultat est difficilement acceptable. Pourtant, certains auteurs, et non des moindres (Landau, Schlichting...) ont préféré soit l'ignorer, soit tenter laborieusement de le justifier.

D'ailleurs, si l'on avait encore un doute, il suffirait pour le lever de chercher la « frontière » du jet (comme nous l'avons fait pour le jet plan laminaire, § 4.7.2.9). Son ordonnée η_j est définie par (cf. 5.164):

$$\begin{aligned} q_{mj}(x) &= 2 \pi \rho U_m \beta^2 \int_0^{\eta_j} F' d\eta = 2 \pi \rho U_m \beta^2 F(\eta_j) \\ &= q_{m0} = \pi \rho R_0^2 U_0^2 \end{aligned}$$

Connaissant la forme de F , on arrive à :

$$\eta_j^2 = 0,25 \frac{R_0}{x} Re_0 \frac{1}{0,5 - 3,1 \times 10^{-3} \frac{R_0}{x} Re_0}$$

et on vérifie facilement que dans une majorité de cas compatibles avec les hypothèses ($Re_0 > 10^3$; $x/R_0 > 20$), le dénominateur est négatif. L'équation précédente n'a donc pas de solution.



C'est là qu'intervient l'aphorisme de Conan Doyle cité au début du paragraphe : si on élimine l'impossible (l'expression ci-dessus du débit), il reste l'improbable, c'est-à-dire l'inadaptation du modèle utilisé. Le fait que nous ayons obtenu une solution mathématique pour la vitesse U n'impose pas pour autant à la physique de s'y soumettre. En l'occurrence, il semble que la « constante » C ne soit pas une constante, peut-être parce que nous avons négligé le gradient de pression dans l'équation de départ, ou parce que la partie du jet proche de la buse n'a pas été prise en compte dans la dynamique d'ensemble. Quoi qu'il en soit, on doit admettre que la méthode différentielle classique n'est pas adaptée à cette configuration.