

*Université de Reims Champagne Ardenne*

**ÉCOULEMENTS EXTERNES  
GRAVITAIRES  
FLUIDES STRATIFIÉS**

**Jacques PADET**  
*Professeur Émérite*

**1ère partie**

**FLUIDES STRATIFIÉS  
ÉCOULEMENTS ATMOSPHÉRIQUES**

**Mots clés** : atmosphère ; ballons à gaz ; dilatabilité ; écoulements externes ; flottabilité ; gradient thermique adiabatique ; montgolfières ; stabilité ; stratification ; turbulence ; vent.

# PRÉSENTATION

Le texte présenté ici est en quelque sorte le chapitre 8 de *Fluides en écoulement*, mais pour des raisons pratiques, il fait l'objet d'une publication séparée. Il concerne les écoulements externes soumis à un champ de pesanteur, mais on ne sera pas surpris de le voir introduit par un important paragraphe sur la statique des fluides stratifiés, qui est un préalable à l'étude des écoulements. A la suite de questions soulevées par des pilotes de ballons atmosphériques, y ont été incluses des considérations sur le comportement des montgolfières et des ballons à gaz, étroitement dépendant des propriétés de l'atmosphère.

On trouvera ci-dessous la première partie (fluides stratifiés et écoulements atmosphériques). La seconde partie, consacrée aux écoulements à surface libre, sera proposée ultérieurement.

Reims. Octobre 2013

## Rappels de nomenclature:

Dans le texte, on a eu recours à des abréviations pour désigner les ouvrages de J. Padet disponibles sur le site de la SFT :

- FEMM : pour *Fluides en Ecoulement, Méthodes et Modèles*
- ET : pour *Echangeurs Thermiques*
- PTC : pour *Principes des Transferts Convectifs*

Les notations utilisées sont les mêmes que dans ces trois ouvrages. Quelques symboles nouveaux ont été introduits directement dans le texte, et leur signification est rappelée chaque fois que nécessaire.

# TABLE DES MATIÈRES

## 1. - Stratification d'un fluide dans le champ de pesanteur

- 1.0. - Notion de stratification
- 1.1. - Stratification de l'atmosphère au repos
- 1.2. - Stratification d'un liquide au repos
- 1.3. - Théorème d'Archimède
- 1.4. - Équilibre d'une atmosphère stratifiée
- 1.5. - Exemples de stratification thermique dans l'atmosphère
- 1.6. - Comportement d'une bouffée exogène
- 1.7. - Formation d'un nuage
- 1.8. - Approche dynamique de la stabilité
- 1.9. - Équilibre et stabilité des ballons à air chaud et des ballons à gaz
- 1.10. - Comportement comparé des ballons à air chaud et des ballons à gaz
- 1.11. - Équilibre et stratification d'un plan d'eau

ANNEXE 1.1. - Retour sur la dilatibilité de l'eau

ANNEXE 1.2. - Gradient de masse volumique dans l'air. Dilatibilité

ANNEXE 1.3 - Exercice : Un ballon sur Titan

## 2. - Écoulements atmosphériques

- 2.1. - Le vent et la couche limite atmosphérique
- 2.2. - Écoulement et stabilité d'une atmosphère stratifiée
- 2.3. - Modèle unidimensionnel : écoulement de Couette turbulent
- 2.4. - Stabilité de l'atmosphère et dispersion des effluents
- 2.5. - Structures thermoconvectives
- 2.6. - Panorama des critères de stabilité
- 2.7. - Quand le vent rencontre des obstacles

ANNEXE 2.1. - Exercice : Des tuiles dans le vent

**Bibliographie.**

**Index des matières**

# ÉCOULEMENTS EXTERNES GRAVITAIRES

## FLUIDES STRATIFIÉS

### 1. - STRATIFICATION D'UN FLUIDE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

#### 1.0. - Notion de stratification

L'idée générale de stratification correspond à une superposition de couches fluides de propriétés différentes, à l'image d'un millefeuille.

Plus précisément, considérons une couche de fluide immobile entre deux plans horizontaux. On dira que cette couche fluide est *stratifiée* si une ou plusieurs de ses propriétés physiques varient selon l'altitude  $z$ . Cette stratification peut présenter plusieurs aspects.

La « *stratification barométrique* » est liée à l'équation différentielle de l'hydrostatique (FEMM, 1.36b) (l'axe  $z$  étant dirigé vers le haut) :

$$dp = - \rho g dz \quad (1.1)$$

elle implique donc une diminution de pression quand l'altitude augmente, quel que soit le fluide considéré.

La « *stratification thermique* » représente une variation de la température selon la verticale. Elle peut provenir des conditions aux limites, de la nature du fluide (gaz parfait ...), ou des deux à la fois.

Enfin, dans un fluide inhomogène stable, on observera une « *stratification massique* », caractérisée par une décroissance de la masse volumique en fonction de l'altitude.

Avec les fluides réels, pour lesquels la masse volumique dépend de la température, deux cas vont se présenter : dans les liquides, un gradient de température entraîne une simple modification de la stratification barométrique, et éventuellement massique ; dans les gaz, il se manifeste un couplage entre les deux stratifications, qui sont intimement liées.

#### 1.1. – État de référence de l'atmosphère : stratification adiabatique

La structure de l'atmosphère est gouvernée par quelques lois générales, et par des conditions aux limites thermiques et mécaniques. Examinons d'abord un cas de stratification qui constitue un état de référence : il s'agit de la « *stratification adiabatique* ».

##### 1.1.1. - HYPOTHÈSES DE CALCUL

♣ Dans tous les cas, l'air obéit à la loi de l'hydrostatique (1.1), ainsi qu'à la *loi des gaz parfaits* :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (1.2)$$

◆ On postule ensuite que les fluctuations verticales d'une petite masse d'air au sein du fluide ambiant sont assez rapides pour être *adiabatiques* (ce qui revient à dire que la masse d'air se comporte comme si elle était isolée thermiquement du milieu ambiant)

♥ On admet enfin que les évolutions au sein du fluide sont *réversibles*.

La conséquence de ◆+♥ est que les évolutions aléatoires qui se produisent au sein du fluide sont *isentropiques*, et obéissent donc à la loi :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cte \quad (1.3)$$

⚠ La combinaison des lois (1.1) à (1.3) dans l'atmosphère va conduire à une stratification barométrique et thermique dite « adiabatique » qui constituera une référence dans un certain nombre d'applications.

### 1.1.2. - STRATIFICATION BAROMÉTRIQUE DE RÉFÉRENCE

Comme il a été dit plus haut, la stratification barométrique traduit un gradient de pression vertical, qui va être ici en relation avec un gradient de masse volumique.

Choisissons deux niveaux, l'un quelconque d'altitude  $z$ , l'autre de référence  $z_0$  (on choisira souvent  $z_0 = 0$ ). Entre ces deux ordonnées, l'application de la loi isentropique (1.3) donne :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = cte \quad (1.4)$$

D'autre part, l'équation d'état s'écrit, respectivement aux altitudes  $z$  et  $z_0$  :

$$\left. \begin{array}{l} p / \rho = rT \\ p_0 / \rho_0 = rT_0 \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

De (1.4) et (1.5) on tire :

$$\frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0}$$

ou encore, en éliminant  $p$  à partir de (1.4) :

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6)$$

Revenons maintenant à la loi de l'hydrostatique (1.1). Elle s'écrit, en tenant compte de la relation (1.6) précédente :

$$dp = -\rho_0 g \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dz \quad (1.7)$$

d'où :

$$\frac{dp}{p^{1/\gamma}} = -\frac{\rho_0 g}{p_0^{1/\gamma}} dz \quad (1.8)$$

Sachant que  $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ , l'intégration de (1.8) donne, avec  $\alpha = 1/\gamma$  :

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{(p_0)^{1/\gamma}} z + cte \quad (1.9)$$

et, avec  $p = p_0$  en  $z = 0$  :

$$cte = p_0^{(\gamma-1)/\gamma}$$

soit :

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{(p_0)^{1/\gamma}} z p_0^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

d'où finalement l'expression de  $p$  en fonction de  $z$  :

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.10a)$$

que l'on exprimera de préférence en fonction de  $T_0$ , par (1.5) :

$$\boxed{p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{r T_0} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (1.10b)$$

Pour l'air, on a (avec des valeurs légèrement arrondies) :

$$\gamma = 1,4 ; \frac{\gamma}{\gamma-1} = 3,5 ; \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0,286 \quad (1.11a)$$

$$r = 288 \text{ J / kg.K} \quad (1.11b)$$

Avec  $z = 100 \text{ m}$  et  $T_0 = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$ , le calcul donne :

$$p = 0,988 p_0, \text{ soit } p - p_0 = -1160 \text{ Pa} = -0,0116 \text{ bar}$$

et avec  $z = 1000 \text{ m}$  :

$$p - p_0 = -11150 \text{ Pa} = -0,1115 \text{ bar}$$

La variation est donc presque linéaire. En outre, si l'on compare avec la loi de l'hydrostatique pour un fluide isochore (FEMM 1.38d) :

$$p - p_0 = -\rho_0 g z \quad (1.12)$$

avec  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg / m}^3$  on trouve :  $1176 \text{ Pa}$  pour  $100 \text{ m}$  et  $11760 \text{ Pa}$  pour  $1000 \text{ m}$ .

*La correction apportée par la loi (1.10) est donc assez faible. Mais cela ne veut pas dire que le développement précédent est inutile, car la loi isentropique va nous permettre de calculer l'évolution de la température en fonction de l'altitude.*

### 1.1.3. - STRATIFICATION THERMIQUE DE RÉFÉRENCE

Revenons maintenant aux relations (1.6), pour y prendre la loi de variation de  $T$  avec la pression, et reportons dans (1.10). On obtient immédiatement une fonction linéaire décroissante :

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{p_0} z} \quad (1.13)$$

On doit concéder toutefois que cette équation décrit une évolution théorique idéale, rarement respectée dans la réalité, car elle est modifiée par les conditions aux limites (relief, température du sol, nébulosité ...) et par la turbulence atmosphérique. Malgré cela, la loi (1.13) est importante en ceci qu'elle constitue *une référence*, par le gradient de température qu'elle fait apparaître, et qui est appelé « *gradient adiabatique* »  $(dT/dz)_{ad}$  :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g T_0}{p_0} \quad (1.14)$$

D'après l'équation d'état (1.5), on a :

$$\frac{p}{\rho r T} = 1 = \frac{p_0}{\rho_0 r T_0}$$

de sorte que :


$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho g T}{p} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{r} \quad (1.15a)$$

Sachant que pour l'air, la constante  $r$  des gaz parfaits vaut  $288 \text{ J/kg.K}$ , le gradient adiabatique a pour valeur  $0,00973 \text{ }^\circ\text{C/m}$ . On a l'habitude de l'arrondir à :

$$\boxed{(dT/dz)_{ad} = - 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/m} = - 1^\circ\text{C}/100\text{m}} \quad (1.15b)$$

En outre, le profil de température « adiabatique » (1.13) peut encore s'écrire :

$$T_{ad} = T_0 + z \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \quad (1.16a)$$

 *Dans une atmosphère obéissant rigoureusement à la loi isentropique, la température diminue donc d'un degré Celsius quand on s'élève de 100 mètres. Mais il serait incorrect d'ériger cette propriété particulière en règle générale : le gradient réel varie dans des proportions importantes, en fonction des conditions aux limites.*

Dans la pratique, les profils réels de température dans l'atmosphère sont souvent linéarisés, sous la forme :

$$T = T_0 + \lambda z \quad (1.16b)$$

où  $\lambda$  est un gradient moyen qui peut être supérieur ou inférieur à :

$$\lambda_{ad} = (dT/dz)_{ad} \quad (1.16c)$$

## 1.2. - Théorème d'Archimède

Le théorème (ou principe) d'Archimède n'a pas été explicitement abordé dans FEMM (ch. 1), mais il est utile de l'évoquer ici, comme outil pour une présentation élémentaire de la stabilité d'un fluide stratifié.

♣ Dans un fluide immobile, le bilan local des forces en présence se réduit à (FEMM 1.36a) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g} \quad (1.17a)$$

Donnons-nous alors, dans le fluide, un domaine  $D$  de frontière  $S$ , et intégrons la relation précédente sur  $D$  ( $d\tau$  représentant un petit élément de volume) :

$$\int_D \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau = \int_D \rho \vec{g} d\tau \quad (1.17b)$$

Le second membre de l'équation est le poids  $\vec{P}$  du fluide contenu dans  $D$  :

$$\int_D \rho \vec{g} d\tau = \vec{P} \quad (1.17c)$$

Quant au premier membre, il contient les termes diagonaux du tenseur des contraintes  $\overline{\overline{T}}$ , à savoir la pression  $-p$ . Sachant que dans le cas général on a (cf. FEMM 1.31 et 1.32) :

$$\int_D \text{div} \overline{\overline{T}} d\tau = \int_S \vec{T} dS$$

où  $\vec{T}$  est le vecteur contrainte sur  $dS$ , il ne reste ici, en l'absence de mouvement, que le terme de pression, d'où en n'oubliant pas que  $p$  (force de compression) est comptée positive, et que la normale  $\vec{n}$  à  $S$  est orientée vers l'extérieur de  $D$  (FEMM, ch. 1) :

$$\int_D \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau = - \int_S p \vec{n} dS \quad (1.18a)$$

Ce terme représente donc la résultante  $\vec{F}_p$  des forces de pression exercées par le fluide ambiant sur la surface  $S$ , encore appelée « poussée d'Archimède », ou « poussée hydrostatique » :

$$\int_S p \vec{n} dS = \vec{F}_p \quad (1.18b)$$

Finalement, à l'équilibre, on a donc :

$$\vec{P} = - \vec{F}_p \quad (1.19)$$

*Autrement dit, la résultante des forces de pression sur la frontière de  $D$  est égale et opposée au poids du fluide contenu dans  $D$ , donc dirigée vers le haut.*

◆ Imaginons maintenant de remplacer le contenu de  $D$  par un milieu matériel différent, de masse volumique  $\rho_m \neq \rho$ , et par conséquent de poids  $\vec{P}_m \neq \vec{P}$ . Le « principe d'Archimède » stipule (même si ce n'est pas sa formulation classique) que *cette opération ne change pas la répartition de pression sur  $S$ , et ne modifie donc pas la résultante  $\vec{F}_p$* , qui reste définie par (1.18b).

Une conséquence immédiate en est que le domaine  $D$  est soumis à une force verticale désignée comme son « poids apparent »  $\vec{P}_a$  :

$$\vec{P}_a = \vec{P}_m + \vec{F}_p \quad (1.20a)$$



ou encore, en projection sur l'axe  $z$  dirigé vers le haut,  $P_m$  et  $F_p$  étant traditionnellement considérés en valeur absolue :

$$P_a = -P_m + F_p \quad (1.20b)$$

Alors,  $P_a$  est exprimé en valeur algébrique. La force appliquée à  $D$  est dirigée vers le haut si  $P_a > 0$ , et dirigée vers le bas si  $P_a < 0$  ( $D$  étant plus léger ou plus lourd que le fluide ambiant).

*Cette propriété constitue ce qu'on peut appeler le « théorème d'Archimède ».*

Mais alors, si  $\vec{P}_a$  n'est pas compensée par une autre force extérieure, l'équilibre est rompu :  $D$  va subir un mouvement ascendant ou descendant selon le sens de  $\vec{P}_a$ .

♥ La situation est analogue si le domaine  $D$  contient le même fluide, mais à une température différente, donc à une masse volumique différente. Dans ce cas, le poids apparent  $\vec{P}_a$  est appelé « *poussée thermique* » ou encore *force de flottabilité*.



### 1.3. - Stratification d'un liquide au repos

#### ♣ *Liquide homogène*

Dans un liquide, la pression et la température sont deux variables faiblement couplées, par l'intermédiaire de la masse volumique. En effet, la stratification barométrique obéit à la loi locale de l'hydrostatique, dans laquelle  $\rho = \rho(T)$  :

$$dp = -\rho(T) g dz$$

Mais comme la dilatabilité des liquides est très faible, la répercussion sur la pression est négligeable. On peut donc appliquer la loi (1.12) relative aux fluides isochores.

Quant à la stratification massique représentée par  $\rho(z)$ , ou plus précisément par  $\rho[T(z)]$ , elle dépendra directement des conditions aux limites sur la température. Ce point sera repris plus loin (§ 1.8 ; annexe 1.2).

#### ◆ *Domaine fluide inhomogène constitué de liquides non miscibles*

Si deux ou plusieurs liquides non miscibles se trouvent en état de coexistence, on peut considérer de façon schématique que chacun d'eux est constitué de gouttes en contact les unes avec les autres. Généralement, les fluides ont des masses volumiques différentes, et même si la différence est faible, le théorème d'Archimède va s'appliquer à chaque goutte. En vertu de quoi les gouttes les plus légères se réuniront progressivement en haut, et les gouttes les plus lourdes au fond. C'est ce que l'on peut très facilement observer en versant du vinaigre dans de l'huile (ou l'inverse) : les gouttes de vinaigre, plus denses, vont tomber au fond du récipient, et l'huile formera une couche homogène au-dessus, la surface de séparation étant un plan horizontal.

### 1.4. - Équilibre d'une atmosphère stratifiée

Ces préliminaires étant acquis, portons alors notre attention sur une petite masse d'air, ou particule fluide - au sens de FEMM § 1.1.1 - (on dit souvent une *bouffée d'air*, pour parler de façon imagée, ou encore une *bulle*) qui, à la suite d'une fluctuation aléatoire, passerait accidentellement de l'altitude  $z$  à l'altitude  $z + dz$  (fig. 1.1). Cet événement se produira dans les conditions précisées plus haut (§ 1.1.1), donc de façon isentropique.

♣ - Les caractéristiques de la bouffée d'air dans sa position de départ (niveau  $z$ ) étaient :  $p$ ,  $\rho$  et  $T$ .

◆ - L'air ambiant immobile obéit à la loi d'état (1.2) et à la loi de la statique (1.1), le champ de température  $T$  étant déterminé par les conditions aux limites (au sol et dans la partie supérieure de l'atmosphère).

Ses caractéristiques à l'altitude  $z + dz$  sont : pression  $p + dp$ , température  $T + dT$  et masse volumique  $\rho + d\rho$ . La relation entre les variations de ces trois grandeurs est obtenue en opérant une dérivation logarithmique de l'équation d'état  $(p/\rho) = rT$ , soit :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \quad (1.21)$$

♥ - Mais les caractéristiques de la bouffée d'air dans sa nouvelle position ( $z + dz$ ) ne sont pas les mêmes, *sauf pour la pression* : comme les variations de pression se transmettent à la vitesse du son, on admet que l'équilibre des pressions est réalisé instantanément, et donc que la nouvelle pression de la bouffée d'air est la pression de l'air ambiant, soit  $p + dp$ .

Par contre, sa masse volumique sera  $\rho + \delta\rho$ , la variation  $\delta\rho$  étant déduite de la loi isentropique (1.3) :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \text{soit : } \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.22)$$

avec en général :  $\delta\rho \neq d\rho$ .

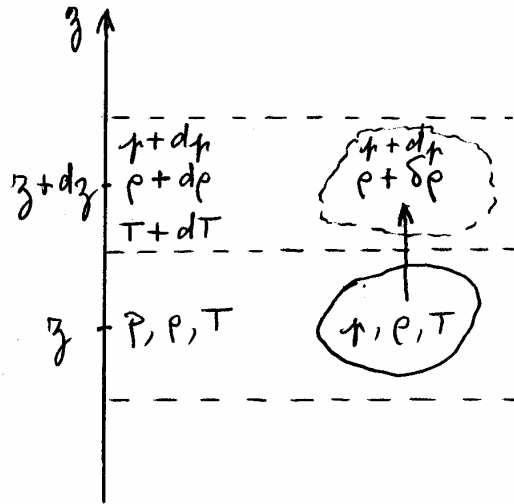


FIG. 1.1 - Stratification atmosphérique

♠ - La *condition de stabilité* de l'atmosphère peut être exprimée de façon élémentaire comme une condition de retour spontané de la bouffée d'air à son niveau initial, après la perturbation dont elle a fait l'objet.

- Si la bouffée d'air a été soulevée ( $dz > 0$ ), pour retomber elle doit devenir plus dense que l'air environnant (c'est-à-dire se refroidir davantage), ce qui s'exprime par :

$$\delta\rho > d\rho \quad (1.23)$$

soit, avec (1.21) et (1.22) :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} > \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dT}{T}$$

Ajoutons-y la loi de la statique (1.1) :  $dp = -\rho g dz$ . Il vient :

$$\frac{dT}{T} > -\frac{\rho g dz}{p} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right)$$

d'où, avec  $dz > 0$ , l'expression de la *condition de stabilité* :

$$\boxed{\frac{dT}{dz} > -\frac{\rho g T}{p} \frac{\gamma - 1}{\gamma}} \quad (1.24)$$

- Si la bouffée d'air descend, elle doit devenir plus légère que l'air environnant pour retourner à sa place, d'où :

$$\delta \rho < d\rho \quad \text{mais cette fois avec } dz < 0 \quad (1.25)$$

Le calcul aboutit à la même inégalité (1.24), qui représente donc la condition générale de stabilité. En outre, on observe que le second membre de (1.24) n'est autre que le gradient de température adiabatique  $(dT/dz)_{ad}$  (relation 1.15). La condition de stabilité s'écrit donc aussi (fig. 1.2) :

$$\boxed{\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}} \quad (1.26)$$

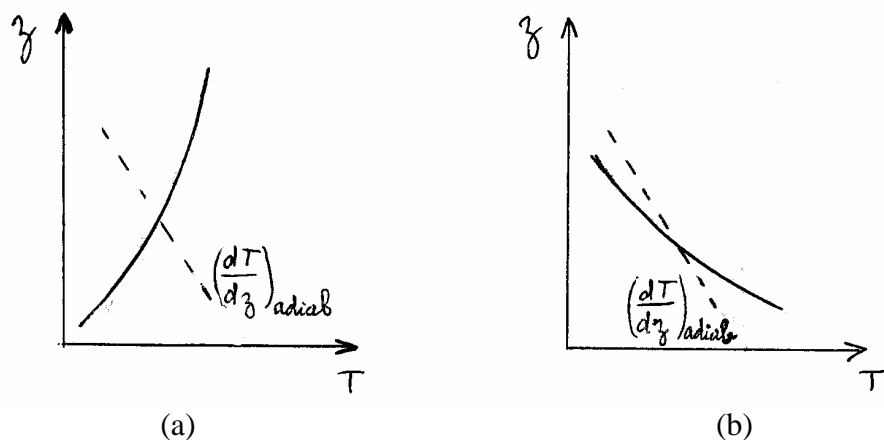


FIG. 1.2 – (a) : Stabilité ; (b) : Instabilité

Quand le gradient de température est inférieur au gradient adiabatique, on est en situation d'instabilité : l'écart de masse volumique entre la bouffée et l'air ambiant la maintient en mouvement.

Lorsque  $(dT/dz) = (dT/dz)_{ad}$ , la bouffée est toujours en équilibre thermique avec l'ambiance : l'équilibre est indifférent (*atmosphère neutre*).



Attention à ne pas confondre la distribution verticale de la température  $T(z)$  (courbes en traits pleins sur les figures 1.2 et 1.3) avec  $(dT/dz)_{ad}$  qui est une pente de référence (matérialisée par des pointillés sur les mêmes figures).

Ajoutons qu'une grande masse d'air stable est appelée « *anticyclone* » ; c'est également une zone de hautes pressions. A l'inverse, les cyclones se développent dans des atmosphères très instables qui sont aussi des régions de basses pressions.

## 1.5. – Exemples de stratification thermique dans l’atmosphère

♣ Par une nuit claire, ou au petit matin, le refroidissement du sol par rayonnement vers la haute atmosphère entraîne un refroidissement de l’air, ce qui correspond à une condition de forte stabilité (fig. 1.2a).

◆ Toujours par temps clair, le réchauffement matinal du sol par le soleil après le refroidissement de la nuit peut finir par donner une température de l’air presque constante en fonction de  $z$  (sur une hauteur limitée, bien entendu) : on est encore en situation de stabilité. Une telle configuration se rencontre également par ciel couvert, lorsque le sol et les nuages sont presque à la même température.

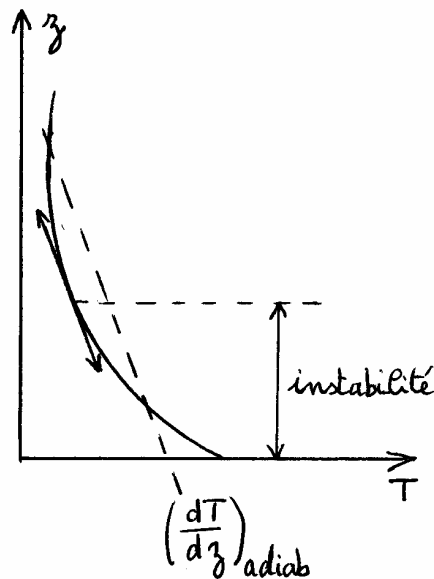


FIG. 1.3 – Suradiabatisme : couche instable au voisinage du sol

♥ Si la journée ensoleillée se prolonge, le sol réchauffé par le soleil réchauffe à son tour l’air des couches inférieures de l’atmosphère, si bien que, à proximité du sol, le gradient de température peut devenir inférieur au gradient adiabatique : une zone d’instabilité s’installe (en particulier, les points les plus chauds de la surface du sol vont donner naissance à des bouffées ascendantes), alors que l’atmosphère reste stable à plus haute altitude (fig. 1.3) : autrement dit, elle bloquera les perturbations qui proviennent de la zone de surface. Cette situation assez défavorable du point de vue de la pollution est qualifiée de « suradiabatisme » (voir § 2).

♠ Sur une plus grande hauteur, en régime périodique, considérons une succession de jours moyennement chauds et de nuits assez froides : le réchauffement de l’air pendant le jour va se faire sur une hauteur inférieure à la hauteur refroidie pendant la nuit. Il peut en résulter, pendant le jour, la présence d’une « couche d’inversion » entre la zone soumise à l’influence du sol et la zone non perturbée située plus haut (fig. 1.4). Cette région présente un gradient de température supérieur au gradient adiabatique ; elle est donc stable. Lorsque la région inférieure est instable, on retrouve la condition de suradiabatisme. Si la région supérieure est également instable, la couche d’inversion bloque toute communication entre ces deux régions.

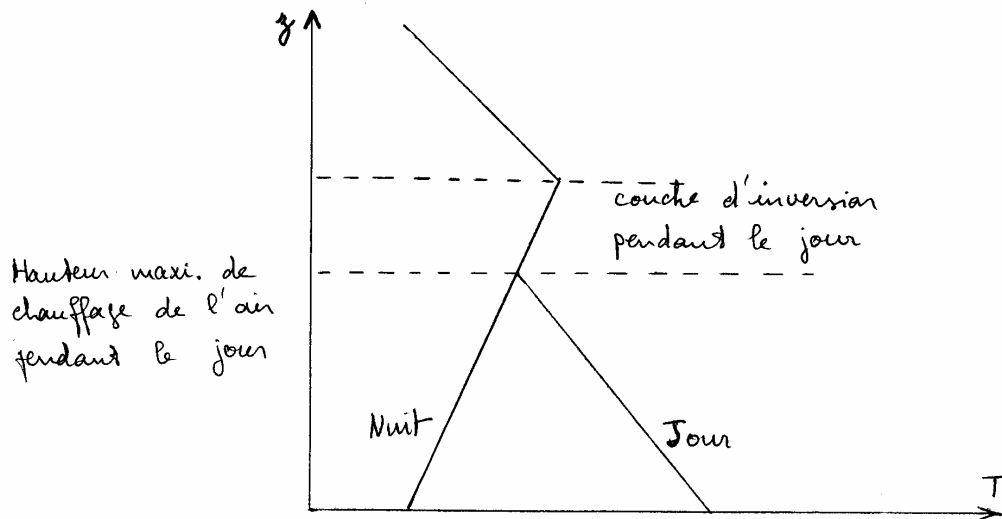


FIG. 1.4 – Représentation schématique d'une couche d'inversion

### 1.6. – Comportement d'une bouffée exogène

Imaginons à présent une bouffée chaude (on dit parfois aussi une *bulle*, mais les deux appellations permettent d'utiliser l'indice  $b$ ) générée au niveau  $z_I$ . Parmi les multiples causes possibles, on peut citer un échauffement local au sol dû à l'éclairement du soleil à travers une trouée dans les nuages, ou une source chaude comme une cheminée.

En  $z_I$ , les paramètres de l'atmosphère sont :  $p_I ; \rho_I ; T_I$ , et ceux de la bouffée :  $p_b$  (équilibre des pressions),  $\rho_{bI} ; T_{bI}$ . Le profil linéarisé de température atmosphérique est, selon (1.16b) :

$$T = T_I + \lambda z \quad (1.27a)$$

La question est de savoir à quelle altitude la bouffée va se stabiliser.

En admettant un comportement isentropique de cette bouffée, sa température  $T_b$  va évoluer en fonction de l'altitude selon la loi (1.13), soit avec les notations présentes :

$$T_b = T_{bI} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_I g T_{bI}}{p_I} z \quad (1.27b)$$

ou plus commodément, selon (1.16c) :

$$T_b = T_{bI} + \lambda_{ad} z \quad (1.27c)$$

La bouffée se stabilisera quand sa masse volumique sera identique à celle de l'atmosphère ambiante, c'est-à-dire quand les deux seront en équilibre thermique, donc lorsqu'on aura  $T = T_b$ , soit :

$$T_I + \lambda z = T_{bI} + \lambda_{ad} z$$

d'où l'altitude correspondante :

$$z = \frac{T_{bI} - T_I}{\lambda - \lambda_{ad}} \quad (1.27d)$$

avec :  $\lambda_{ad} = (dT/dz)_{ad} = -0,01^\circ\text{C}/m$  d'après (1.15b).

Lorsque  $\lambda = \lambda_{ad}$  (atmosphère neutre, § 1.4 ♠), on voit que la stabilisation n'a jamais lieu. Pour  $\lambda > \lambda_{ad}$  (atmosphère stable),  $z$  est positif, il existe donc une altitude d'équilibre. Par contre, avec  $\lambda < \lambda_{ad}$  (atmosphère instable),  $z$  est négatif : il faudrait que la bouffée descende pour trouver un niveau d'équilibre, mais comme elle va monter puisqu'elle est plus chaude, cet équilibre ne sera jamais atteint.

Toutefois, on voit bien qu'il y a dans ce résultat théorique quelque chose d'un peu réducteur au point de vue physique. Ceci a le mérite d'illustrer les limites de l'hypothèse adiabatique : en réalité, par diffusion thermique et massique, l'équilibre de température finit toujours par se réaliser avec l'ambiance, et la stabilisation se fait alors d'elle-même. En plus, une loi comme (1.27a) n'est valable que sur une hauteur limitée. Mais malgré cela, les tendances sont correctement dégagées par cette analyse élémentaire.

### 1.7. – Formation d'un nuage

Supposons maintenant que l'air est humide. C'est un mélange d'air sec et de vapeur d'eau qui sera considéré comme un gaz parfait. A la température  $T$ , on désigne par  $P_V$  la pression partielle de vapeur d'eau, et par  $P_S$  la pression de vapeur saturante. On définit le *degré hygrométrique local* de l'air par :

$$h = \frac{P_V}{P_S} \quad (1.28a)$$

En première approximation,  $P_S$  est liée à la température par :

$$\ln P_S = 26,4 - \frac{5450}{T} \quad (1.28b)$$

Un nuage se forme à l'apparition de la condensation, c'est-à-dire lorsque :

$$P_V = P_S \quad \text{ou encore} \quad h = 1 \quad (1.28c)$$

Reprenons un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, mais cette fois, la bouffée qui se forme à l'altitude  $z_I$  n'est pas une bulle plus chaude : elle reçoit une certaine quantité de vapeur d'eau, par évaporation, ou émission à partir d'une cheminée, ce qui lui donnera un degré hygrométrique  $h_{bI}$ . Les caractéristiques de la bouffée et de l'air sont donc :

- A l'altitude  $z_I$ 
  - pour l'air :  $p_I ; T_I ; P_{S1} ; h_I = 0$  (air sec)
  - pour la bouffée :  $p_{bI} = p_I ; T_{bI} = T_I ; h_{bI} ; P_{V1}$
- A l'altitude  $z$ 
  - pour l'air :  $p ; T ; h = 0$
  - pour la bouffée :  $p_b = p ; T_b ; h_b ; P_{Vb}$

Les conditions étant fixées au niveau  $z_I$ , on cherche à quelle altitude aura lieu la condensation. L'hypothèse du gaz parfait pour l'air humide a comme conséquence :

$$\frac{P_{Vb}}{p} = cte = \frac{P_{V1}}{p_I} \quad (1.28d)$$

La bouffée obéit à la relation (1.6) qui s'écrit, avec les présentes notations :

$$\frac{T_b}{T_l} = \left( \frac{p_b}{p_l} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.29a)$$

La conjonction de (1.28d) et (1.29a) donne :

$$\frac{T_b}{T_l} = \left( \frac{P_{Vb}}{P_{Vl}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Puisque nous nous intéressons à la formation du nuage, qui se produira lorsque  $P_{Vb} = P_S$  (relation 1.28c), il faut en tirer  $P_{Vb}$  :

$$P_{Vb} = P_{Vl} \left( \frac{T_b}{T_l} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.29b)$$

avec, d'après (1.28a) :

$$P_{Vl} = h_{bl} P_{Sl} \quad (1.29c)$$

d'où, en faisant intervenir (1.28b), la température de condensation  $T_b$  dans la bouffée d'air humide, obtenue en résolvant l'équation :

$$\exp\left(26,4 - \frac{5450}{T_b}\right) = h_{bl} P_{Sl} \left( \frac{T_b}{T_l} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.30)$$

Choisissons comme application numérique :  $T_l = 280 K$  et  $h_{bl} = 0,75$ . On obtient avec (1.28b) :  $P_{Sl} = 1028 Pa$ , et (1.30) donne la température de formation du nuage :

$$T_b = 275 K$$

Pour déterminer l'altitude correspondante, il faut connaître le profil de température dans l'atmosphère. Prenons par exemple une atmosphère stable, avec  $\lambda = -0,65.10^{-2} K/m$  ( $\lambda > \lambda_{ad}$ , § 1.6). A partir de  $T_b = T_l + \lambda z$ , on tire alors :

$$z = 770 m$$

On se doit de réitérer ici les réserves exprimées au § 1.6 sur les hypothèses simplificatrices adoptées. Malgré tout, une théorie élémentaire comme celle-ci a le mérite de donner des indications physiques intéressantes.

Ajoutons que, dans certaines circonstances (liées aux variations de température et d'humidité selon  $z$ ), il peut se produire une répétitivité dans la formation des bancs de nuages, donnant une structure en mille-feuille. Ce phénomène est difficilement perceptible depuis le sol, sauf dans certaines régions où le relief est favorable à son observation (fig. 1.5).





FIG. 1.5 – *Stratifications nuageuses. En haut : Côte de l'Alaska.  
En bas : Vallée de l'Alsek (Yukon, Canada) (Photographies de l'auteur)*

## 1.8. – Approche dynamique de la stabilité

### 1.8.1. – BASES

La théorie élémentaire présentée au paragraphe 1.4. peut être considérée comme une approche « statique » de la stabilité, car on y recherche une condition pour qu'une particule fluide déplacée ait envie de retourner d'où elle vient, sans considération de mouvement.

Envisageons maintenant une approche plus dynamique, qui prenne en compte le déclenchement du mouvement, celui-ci étant accessible par la relation fondamentale de la mécanique :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma} \quad (1.31a)$$

On considère donc un fluide ambiant stratifié, de masse volumique  $\rho = \rho(z)$ , dans lequel la pression obéit à la loi de l'hydrostatique (1.1). A l'altitude  $z$ , se trouve une particule fluide de masse volumique  $\rho_p$ , provenant du niveau  $z_0$  (on prend généralement  $z_0 = 0$ ), et à la même pression que le fluide ambiant (cf § 1.4. ♥).

La force exercée sur cette particule est son poids apparent (1.20b), soit en raisonnant sur un volume unité :

$$P_a = g(\rho - \rho_p) \quad (1.31b)$$

Toujours pour un volume unité, en projection sur l'axe  $z$ , la relation (1.31a) devient alors :

$$g(\rho - \rho_p) = \rho_p \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.31c)$$

Admettons que  $z$  est voisin de  $z_0$ . La masse volumique en  $z_0$  est notée  $\rho_0$ . Elle est la même pour le fluide ambiant et pour la particule dans son état initial :

$$\rho(0) = \rho_0 = \rho_{p0} \quad (1.31d)$$

Un développement limité au premier ordre de  $\rho$  et  $\rho_p$  au voisinage de  $z_0$  donne alors :

$$\rho = \rho_0 + (z - z_0) \frac{d\rho}{dz} \quad (1.32a)$$

$$\rho_p = \rho_0 + (z - z_0) \frac{d\rho_p}{dz} \quad (1.32b)$$

et (1.31c) devient, en posant  $z_0 = 0$  :

$$g z \left( \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} \right) = \rho_p \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.33)$$

### 1.8.2. – CAS DES LIQUIDES

Pour les liquides, la masse volumique ne dépend que de la température. On a donc dans le fluide ambiant :

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dT} \frac{dT}{dz} = -\rho_0 \beta \frac{dT}{dz} \quad (1.34a)$$

où  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique (ou *dilatabilité*) du fluide, en  $K^{-1}$  (voir FEMM, 2.15a).

Quant à la particule fluide, on admet que son déplacement se fait de façon adiabatique, et que sa température ne change pas, d'où :

$$\frac{d\rho_p}{dz} = 0 \quad (1.34b)$$

L'équation du mouvement (1.33) s'écrit finalement, en prenant en compte (1.31d) et en simplifiant par  $\rho_0$  :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left( g \beta \frac{dT}{dz} \right) z = 0 \quad (1.35a)$$

le gradient de température  $dT/dz$  dans le fluide étant donné.

En vue d'alléger l'écriture, posons :

$$N^2 = g \beta \frac{dT}{dz} \quad (1.35b)$$

de sorte que :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0 \quad (1.36)$$

Les solutions de cette équation sont de trois sortes, selon le signe de  $dT/dz$ , et caractérisent l'état du fluide au regard de la stabilité :

- \*  $N^2 > 0$  :  $dT/dz > 0 \Rightarrow z \propto e^{i|N|t}$  : *stable* (mouvement oscillant)
- \*  $N^2 < 0$  :  $dT/dz < 0 \Rightarrow z \propto e^{\sqrt{|N^2|}t}$  : *instable* (mouvement accéléré) (1.37)
- \*  $N^2 = 0$  :  $dT/dz = 0 \Rightarrow z = cte$  (en l'absence de vitesse initiale) : *neutre*

Dans ce calcul simple, les frottements visqueux n'ont pas été pris en compte. Ils ont évidemment un effet amortisseur sur le mouvement, mais ne modifient pas fondamentalement les résultats précédents. Ceux-ci sont conformes à ce qu'une analyse intuitive basée sur le théorème d'Archimède pouvait laisser prévoir, à savoir que la stratification sera stable si le liquide est plus froid au fond qu'à la surface.

### 1.8.3. – CAS DES GAZ

Pour les gaz, la démarche est presque identique à celle du paragraphe 1.4. Exposons-la cependant, car elle apporte quelques précisions supplémentaires.

Dans l'atmosphère ambiante, la propriété (1.34a) est remplacée ici par l'équation d'état  $p/\rho = rT$  (ce qui revient à dire que  $\beta = 1/T$ , voir Annexe 1.2). En y ajoutant la loi de l'hydrostatique  $dp/dz = -\rho g$  ; on arrive à :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{g \rho^2}{p} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} \quad (1.38a)$$

Quant à la particule fluide, elle obéit simultanément à la loi de l'hydrostatique, et à la loi isentropique (1.22), qui s'écrit avec les présentes notations :  $d\rho_p/\rho_p = (1/\gamma)(dp/p)$  ( $dp$  et  $p$  étant les mêmes que dans l'atmosphère ambiante, en raison de l'équilibre des pressions). Il vient alors, en admettant que  $\rho_p/\rho \cong \rho^2$  :

$$\frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{\rho^2 g}{\gamma p} \quad (1.38b)$$

d'où :

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{g\rho^2}{p} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{g\rho^2}{\gamma p} = -\frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} + \frac{\rho g T}{p} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right\}$$

On retrouve ici le gradient adiabatique de référence (définition 1.15a), et alors :

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.38c)$$

En remplaçant dans (1.33), et en admettant que  $\rho \cong \rho_p$ , on obtient :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0 \quad (1.39a)$$

avec :

$$N^2 = \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.39b)$$

Vis-à-vis de la stabilité, les conclusions sont analogues à celles du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} N^2 > 0 &\Rightarrow z \propto e^{i|N|t} && : \text{stabilité} \\ N^2 < 0 &\Rightarrow z \propto e^{\sqrt{|N^2|}t} && : \text{instabilité} \\ N^2 = 0 &\Rightarrow dz/dt = cte = 0 && : \text{neutralité} \end{aligned} \quad (1.40)$$

En outre, ces résultats confirment le bien-fondé de l'analyse simplifiée qui a fait l'objet du paragraphe 1.4. En particulier, pour la neutralité, on retrouve la condition :

$$\frac{dT}{dz} = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \quad (1.41)$$

🎵 L'intérêt du paramètre  $N$  est de quantifier le degré d'instabilité (ou de stabilité) hydrostatique, qui est donc fonction de l'écart entre le gradient réel et le gradient adiabatique de température, et aussi de  $1/T$  : toutes choses égales par ailleurs, on se rapproche donc de la neutralité lorsque la température augmente.

#### 1.8.4. – TEMPÉRATURE POTENTIELLE

Dans la littérature, on introduit parfois une « température potentielle  $\Theta$  » définie par :

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \quad (1.42a)$$

(cf. 1.15a, 1.39b), soit :

$$\Theta = T - T_0 - z \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \quad (1.42b)$$

ou encore, avec (1.16a) :

$$\Theta = T - T_{ad} \quad (1.42c)$$

En thermodynamique, d'après la relation de Mayer, on a :

$$r = \frac{\gamma - 1}{\gamma} C_p \quad (1.43a)$$

Sachant que :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{r}$$

la définition précédente s'écrit donc aussi :

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \frac{g}{C_p} \quad (1.43b)$$

d'où :

$$\Theta = T + \frac{g}{C_p} z + cte \quad (1.43c)$$

⚠ La littérature livre d'autres définitions de la température potentielle (ou de la température adiabatique 1.16a). Il est recommandé de toujours bien vérifier la définition de ces diverses grandeurs avant de les utiliser.

## 1.9. – Équilibre et stabilité des ballons à air chaud et des ballons à gaz

### 1.9.1. – OBJETS VOLANTS PLUS LÉGERS QUE L'AIR

L'équilibre et la stabilité des diverses catégories de ballons sont en relation étroite avec les propriétés de l'atmosphère. Leur étude trouve naturellement sa place ici, comme application des paragraphes précédents.

Les ballons contiennent un gaz plus léger que l'air, et utilisent la poussée d'Archimède pour se mouvoir verticalement. On en distingue deux familles, selon le gaz utilisé :

- *Les ballons à air chaud* (plus souvent appelés « *montgolfières* ») : leur enveloppe est peu extensible ; le volume d'air qu'ils contiennent est donc fixé. La température de cet air est variable : elle est commandée par un brûleur à gaz placé au-dessus de la nacelle, et par une soupape d'évacuation située au sommet de l'enveloppe. Quant à la pression intérieure, elle est en équilibre avec la pression extérieure, les ballons étant ouverts à leur partie inférieure.
- *Les ballons à gaz* (en fait à hélium, l'hydrogène étant abandonné pour des raisons de sécurité) : leur enveloppe est incomplètement gonflée, et leur volume est donc variable. C'est la masse de gaz contenue dans l'enveloppe qui est imposée. Du fait de la déformabilité de l'enveloppe, l'équilibre de pression est également réalisé entre le gaz et l'air ambiant.

On notera que, quelle que soit sa catégorie, le comportement d'un ballon est analogue à celui d'une particule fluide (bouffée d'air ou bulle) écartée de son point d'équilibre (§.1.4 et 1.8), ou d'une bouffée exogène (§.1.6) : au cours d'un déplacement vertical, il est admis en première approximation que le gaz du ballon subit une évolution isentropique, tandis que l'atmosphère ambiante répond à la loi des gaz parfaits.

## 1.9.2. – BALLONS À AIR CHAUD (MONTGOLFIÈRES)

### 1.9.2.1. – Données

Les données principales sont :

- le volume  $\Omega$  de l'enveloppe
- la pression atmosphérique  $p(z)$ , la température  $T(z)$  et le gradient  $dT/dz$
- la température  $T_b$  du gaz dans le ballon (ou sa masse volumique  $\rho_b$ )
- la masse propre  $M_b$  du ballon (enveloppe, nacelle, bouteilles de gaz, passagers...)

### 1.9.2.2. – État d'équilibre initial

Admettons que la montgolfière soit stabilisée à l'altitude  $z$ , la poussée hydrostatique  $F_p(z)$  équilibrant son poids total  $P_{te}$ , qui comprend le poids propre et le poids du gaz :

$$P_{te} = M_b g + \rho_b \Omega g \quad (1.44a)$$

$$F_p(z) = \rho \Omega g \quad (1.44b)$$

A l'équilibre, le poids apparent  $P_{ae}$  du ballon (1.20b) est nul :

$$P_{ae} = F_p(z) - P_{te} = 0 \quad (1.44c)$$

soit :

$$(\rho - \rho_b) \Omega - M_b = 0 \quad (1.44d)$$

### 1.9.2.3. – Intervention d'une commande d'altitude

Cette commande consiste, soit à chauffer l'air du ballon au moyen d'un brûleur à gaz, soit à évacuer de l'air chaud par la soupape supérieure (celui-ci est remplacé par de l'air froid qui entre naturellement par l'ouverture inférieure).

Dans les deux cas, on considère que l'opération est très rapide, et se traduit par un échelon de température  $\Delta T_b$  dans le ballon, d'où un échelon de masse volumique  $\Delta \rho_b$ . Le niveau  $z$  ne change pas ; la transformation est donc isobare, de sorte que selon la loi des gaz parfaits  $\rho_b = p / r T_b$ . En prenant la dérivée logarithmique il vient :

$$\frac{\Delta \rho_b}{\rho_b} = - \frac{\Delta T_b}{T_b} \quad (1.45)$$

Le poids total (1.44a) est alors :

$$P_t(z) = M_b g + (\rho_b + \Delta \rho_b) \Omega g \quad (1.46a)$$

La poussée  $F_p(z)$  (1.44b) n'est pas modifiée, d'où le nouveau poids apparent :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = (\rho - \rho_b - \Delta \rho_b) \Omega g - M_b g$$

et compte tenu de (1.44d) :

$$P_a(z) = - \Delta \rho_b \Omega g \quad (1.46b)$$

ou encore, avec (1.45) :

$$P_a(z) = \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} \Omega g \quad (1.46c)$$

Le ballon est donc maintenant soumis à une force dirigée vers le bas ou vers le haut selon le signe de  $\Delta T_b$ , ce qui a pour conséquence un mouvement vertical.

#### 1.9.2.4. – Phase transitoire

Examinons ensuite la situation lorsque le ballon passe à l'altitude  $z + dz$ .

La masse volumique de l'air extérieur devient :  $\rho + d\rho$ , la variation  $d\rho$  étant donnée par (A 2.3a) (Annexe 1.2) :

$$d\rho = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) dz \quad (1.47)$$

La pression dans le ballon est égale à la pression ambiante, soit maintenant  $p + dp$ . L'air chaud subit une évolution adiabatique, d'où une variation de masse volumique  $\delta(\rho_b + \Delta\rho_b)$  gouvernée par la loi (1.22), soit ici :

$$\frac{\delta(\rho_b + \Delta\rho_b)}{\rho_b + \Delta\rho_b} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.48)$$

D'après (1.21), on a :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (1.49a)$$

ce qui s'écrit aussi, avec (1.47) :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) dz + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} dz$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{T} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.49b)$$

Pendant le déplacement  $dz$ , à partir de (1.48), la masse volumique dans le ballon varie donc de :

$$\delta(\rho_b + \Delta\rho_b) = \frac{\rho_b + \Delta\rho_b}{T} \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.50a)$$

Cette variation doit être reliée à la variation de température  $\Delta T_b$  de l'air chaud (qui est le paramètre de commande), selon (1.45) :

$$\delta(\rho_b + \Delta\rho_b) = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.50b)$$

d'où une variation du poids du ballon :

$$dP_t = \delta(\rho_b + \Delta\rho_b) \Omega g \quad (1.51a)$$

$$dP_t = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega g dz \quad (1.51b)$$

Entre  $z + dz$ , la variation de la poussée (1.44b) a pour valeur :

$$dF_p = d\rho \Omega g \quad (1.52a)$$

ou, avec (1.47) :

$$dF_p = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) \Omega g dz \quad (1.52b)$$

Le poids apparent (1.46b) devient alors :

$$P_a(z + dz) = P_a(z) + dF_p - dP_t \quad (1.53)$$

### 1.9.2.5. – Nouvelle position d'équilibre

Pour une variation finie d'altitude  $\Delta z$ , on aura en admettant  $dT/dz = cte$  :

$$P_a(z + \Delta z) = \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} \Omega g - \left[ \frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \Omega g \Delta z \quad (1.54a)$$

La nouvelle altitude d'équilibre  $z + \Delta z_e$  est atteinte lorsque  $P_a(z + \Delta z_e) = 0$ , soit après simplification et regroupement des termes :

$$\rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} = \frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_b}{\rho} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.54b)$$

Mais sachant que, en  $z = 0$ , du fait de l'équilibre des pressions :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad \text{et} \quad \frac{p}{\rho_b} = rT_b$$

on a :

$$\frac{\rho_b}{\rho} = \frac{T}{T_b} \quad (1.54c)$$

qu'il est préférable de remplacer dans (1.54b) :

$$\frac{T}{T_b} \frac{\Delta T_b}{T_b} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.55)$$

d'où l'on tire  $\Delta z_e$ .

On notera que  $\Delta z_e$  ne dépend ni de la masse du ballon, ni de son volume, mais uniquement des grandeurs qui caractérisent l'air chaud et l'atmosphère.

D'autre part, avec  $\Delta T_b > 0$ , le poids apparent (1.46c) est positif, le déplacement aura lieu vers le haut, et donc on doit avoir  $\Delta z_e > 0$ . Ceci n'est possible que si l'expression entre accolades est positive. De même elle devra aussi être positive si  $\Delta T_b < 0$ , puisqu'alors  $\Delta z_e$  sera négatif (déplacement vers le bas). Autrement dit, *la condition d'existence d'une position d'équilibre* est :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.56)$$

### 1.9.2.6. – Stabilité du ballon à air chaud

Pour préciser dans quelles conditions la stabilité du ballon est assurée, revenons au paragraphe 1.8.1., et pour commencer à la relation (1.31a) dans laquelle  $F$  est ici le poids apparent  $P_a$ , et  $m$  la masse totale  $M_t$  du ballon. Il sera plus commode de reprendre les



mêmes notations, l'indice 0 représentant le niveau de départ (avec  $z_0 = 0$ ), et  $z$  l'ordonnée courante. L'équation de la dynamique s'écrit en conséquence :

$$P_a(z) = M_t(z) \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.58)$$

où  $P_a(z)$  est donné par (1.54a), et où la masse totale :

$$M_t(z) = M_t(z_0) + \Delta M_t(z) = \frac{I}{g} (P_t(z_0) + \Delta P_t(z)) \quad (1.59a)$$

est déduite de (1.46a) et (1.51b).

Alors (1.58) devient, avec l'appoint de (1.45) :

$$M_t(z) = M_b + (\rho_b - \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b}) \Omega + \frac{I}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega z \quad (1.59b)$$

En première approximation, nous négligerons le terme en  $z$  (une vérification numérique montre qu'il intervient pour moins de 1%). Si l'on inclut en outre la relation d'équilibre (1.44d), il reste :

$$M_t(z) = \left( \rho - \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \Omega \quad (1.59c)$$

Reportons (1.54a) (en remplaçant  $\Delta z$  par  $z$ ) et (1.59c) dans (1.58). On voit alors que cette dernière s'écrit d'une manière analogue à (1.39a) :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z + cte = 0 \quad (1.59d)$$

avec :

$$N^2 = \frac{\rho}{\rho - \rho_b (\Delta T_b / T_b)} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{I}{\gamma} \frac{\rho_b}{\rho} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.60)$$

soit, compte tenu de (1.54c) :

$$N^2 = \frac{I}{1 - \frac{T}{T_b} \frac{\Delta T_b}{T_b}} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{I}{\gamma} \frac{T}{T_b} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.61)$$

Le critère de stabilité est le même qu'en (1.40), à savoir :

$$N^2 > 0$$

et l'on retrouve la condition (1.56) obtenue en considérant l'altitude d'équilibre.

⚠ *Cependant, le paramètre  $N^2$  permet de quantifier le degré de stabilité, et donc de comparer les conditions de stabilité des différents types de ballon (§ 1.10).*

⚠⚠ Il y a une différence évidente entre les équations (1.39a) et (1.60) : la seconde comporte une constante, tandis que la première n'en a pas. La raison en est que l'étude du paragraphe 1.8. porte sur une bouffée déplacée de sa position d'équilibre, de sorte que l'accélération est nulle lorsqu'elle repasse en  $z = 0$ . Ici, nous sommes dans une situation comparable à celle d'une bouffée exogène (§ 1.6), dont l'état d'équilibre est modifié, si bien qu'elle est soumise à une accélération initiale en  $z = 0$ , ce qui est exprimé par le terme constant de (1.59d).

Par contre, avant son décollage, la montgolfière est arrimée au sol par une corde, sur laquelle elle exerce une traction. Tout se passe alors comme si elle était déplacée de sa position d'équilibre et on retrouve les conditions de l'équation (1.39a) quand elle est libérée.

### 1.9.3. – BALLONS À GAZ

Nous reprenons pour les ballons à gaz le cadre de raisonnement et les notations utilisés pour les montgolfières. Mais maintenant, le volume  $\Omega$  de l'enveloppe est variable, tandis que la masse de gaz embarquée est fixée.

#### 1.9.3.1 – Données

Les données principales sont :

- la pression atmosphérique  $p(z)$ , la température  $T(z)$  et le gradient  $dT/dz$
- la masse  $M_g$  du gaz contenu dans l'enveloppe, et sa masse volumique  $\rho_g(T)$
- la masse propre  $M_b$  du ballon (enveloppe, nacelle, passagers...)

#### 1.9.3.2. – État d'équilibre initial

Admettons que le ballon soit en équilibre à l'altitude  $z$ , la poussée hydrostatique  $F_p(z)$  équilibrant son poids total  $P_{te}$ , qui comprend le poids propre et le poids du gaz :

$$P_{te} = M_b g + M_g g \quad (1.62)$$

La température et la pression du gaz sont égales à la pression  $p$  et à la température  $T$  ambiantes. On en déduit la masse volumique du gaz :

$$\rho_g = \frac{p}{r_g T} \quad (1.63a)$$

où  $r_g$  est la constante du gaz parfait considéré ( $r_g = 2060 \text{ J/kg.K}$  pour l'hélium).

Le volume  $\Omega$  de l'enveloppe (qui n'est pas imposé *a priori*) est alors :

$$\Omega = \frac{M_g}{\rho_g} = M_g \frac{r_g T}{p} \quad (1.63b)$$

d'où la poussée appliquée au ballon :

$$F_p = \rho \Omega g = \rho M_g \frac{r_g T}{p} g \quad (1.63c)$$

et comme, dans l'atmosphère :

$$p / \rho T = r \quad (1.63d)$$

il vient :

$$F_p = \rho \Omega g = M_g \frac{r_g}{r} g \quad (1.64)$$

Le poids apparent du ballon (1.20b) est nul à l'équilibre :

$$P_{ae} = F_p - P_{te} = 0 \quad (1.65a)$$

d'où la condition d'équilibre:

$$M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) - M_b = 0 \quad \text{ou} \quad \rho \Omega - M_b - M_g = 0 \quad (1.65b)$$

### 1.9.3.3. – Intervention d'une commande d'altitude

Sauf dans des cas très spécifiques, les ballons à gaz n'emportent pas de bouteille de gaz d'appoint. La commande d'altitude consiste à larguer du lest pour monter (voir § 1.9.4), et à évacuer du gaz par une soupape pour descendre.

Ce dernier cas revient à imposer une variation de la masse de gaz :  $\Delta M_g < 0$ .

Le poids total devient alors :

$$P_t(z) = M_b g + (M_g + \Delta M_g) g \quad (1.66)$$

D'autre part, la variation de  $M_g$  entraîne une variation  $\Delta\Omega$  du volume de l'enveloppe, qui a pour expression (cf. 1.63b) :

$$\Delta\Omega = \Delta M_g \frac{r_g T}{p} \quad (1.67)$$

d'où une nouvelle valeur de la poussée (cf. 1.64) :

$$F_p(z) = \rho (\Omega + \Delta\Omega) g = (M_g + \Delta M_g) \frac{r_g}{r} g \quad (1.68)$$

et un nouveau poids apparent :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = \left\{ (M_g + \Delta M_g) \frac{r_g}{r} - M_b - (M_g + \Delta M_g) \right\} g \quad (1.69a)$$

ce qui donne, avec la condition d'équilibre (1.65b) :

$$P_a(z) = \Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) g \quad (1.69b)$$

Le ballon est donc maintenant soumis à une force dirigée vers le bas ( $\Delta M_g < 0$ ), avec pour conséquence un mouvement vertical descendant.

### 1.9.3.4. – Phase transitoire

Quand le ballon arrive à l'altitude  $z + dz$ , la masse volumique de l'air extérieur devient  $\rho + d\rho$ , la variation étant donnée par (1.47) :

$$d\rho = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) dz \quad (1.70)$$

La pression dans le ballon est égale à la pression ambiante, soit maintenant  $p + dp$ . Le gaz subit une évolution adiabatique, d'où une variation de masse volumique  $\delta\rho_g$  gouvernée par la loi (1.22), qui s'écrit ici :

$$\frac{\delta\rho_g}{\rho_g} = \frac{1}{\gamma_g} \frac{dp}{p} \quad (1.71a)$$

où  $\gamma_g$  est l'exposant de la loi de transformation isentropique pour le gaz considéré ( $\gamma_g = 1,66$  dans le cas de l'hélium).

La variation de pression dans l'atmosphère est encore donnée par (1.49b) :

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{T} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.71b)$$

d'où :

$$\delta\rho_g = \frac{\gamma}{\gamma_g} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_g}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.71c)$$

Elle a pour conséquence une variation  $\delta(\Omega + \Delta\Omega)$  du volume du ballon :

$$\delta(\Omega + \Delta\Omega) = (M_g + \Delta M_g) \delta\left(\frac{1}{\rho_g}\right) = - (M_g + \Delta M_g) \frac{\delta\rho_g}{\rho_g^2} \quad (1.72a)$$

le volume total de l'enveloppe étant à présent :

$$\Omega(z + dz) = \Omega + \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega) \quad (1.72b)$$

La valeur correspondante de la poussée (1.68) a donc pour expression :

$$F_p(z + dz) = (\rho + d\rho) [\Omega + \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega)] g \quad (1.73)$$

Pendant ce temps, la masse totale  $M_g + \Delta M_g$  ne change pas, et le poids total est toujours (1.66):

$$P_t(z + dz) = P_t(z) = P_t$$

On en déduit le poids apparent :

$$P_a(z + dz) = F_p(z + dz) - P_t \quad (1.74a)$$

soit, en développant :

$$P_a(z + dz) = (\rho + d\rho) [\Omega + \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega)] g - (M_b + M_g + \Delta M_g) g \quad (1.74b)$$

D'après la condition d'équilibre (1.65b) :

$$\rho\Omega = M_b + M_g \quad (1.74c)$$

En négligeant le terme du second ordre ( $d\rho \delta\Omega$ ), il reste :

$$\frac{1}{g} P_a(z + dz) = \rho \{ \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega) \} + d\rho (\Omega + \Delta\Omega) - \Delta M_g \quad (1.75)$$

Les différents termes de cette expression sont donnés par (1.63b), (1.67), (1.70) et (1.72a). On y ajoutera (1.63a) et (1.63d) d'après lesquelles :

$$\frac{\rho}{\rho_g} = \frac{r_g}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\rho T}{p} = \frac{1}{r} \quad (1.76)$$

Pour une variation finie d'altitude  $\Delta z$ , en admettant à nouveau  $dT/dz = cte$ , le calcul donne finalement :

$$\frac{1}{g} P_a(z + \Delta z) = \Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) - (M_g + \Delta M_g) \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z \quad (1.77a)$$

### 1.9.3.5. – Nouvelle position d'équilibre

La nouvelle position d'équilibre  $z + \Delta z_e$  est atteinte lorsque  $P_a(z + \Delta z_e) = 0$ , ce qui donne la valeur de  $\Delta z_e$  :

$$\Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) = (M_g + \Delta M_g) \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.77b)$$

De même que pour le ballon à air chaud (§ 1.9.2.5), on constate ici que  $\Delta z_e$  est indépendant de la masse propre  $M_b$ . Ce paramètre ne dépend pas non plus de la masse de gaz embarquée, mais seulement de sa variation relative  $\Delta M_g / M_g$ .

Nous avons dit également que l'opération consiste à évacuer du gaz ( $\Delta M_g < 0$ ), ce qui fait descendre le ballon ( $\Delta z_e < 0$ ). Sachant que  $r_g > r$  et  $M_g > |\Delta M_g|$ , la condition d'existence d'une altitude d'équilibre est donc :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.78)$$

### 1.9.3.6. – Stabilité du ballon à gaz

Reprenons le développement et les notations du paragraphe 1.9.2.6. L'équation de départ est encore (1.58):

$$P_a(z) = M_t(z) \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.79a)$$

où  $P_a(z)$  provient de (1.69b), et où :

$$M_t(z) = M_b + M_g + \Delta M_g = cte \quad (1.79b)$$

Elle se met à nouveau sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z + cte = 0 \quad (1.79c)$$

avec :

$$N^2 = \frac{M_g + \Delta M_g}{M_b + M_g + \Delta M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.80)$$

Le critère de stabilité est toujours :

$$N^2 > 0$$

et l'on retrouve la condition (1.78), avec les mêmes commentaires qu'au § 1.9.2.6.

## 1.9.4. – DÉLESTAGE D'UN BALLON

Jeter du lest (sous la forme de sable) est un moyen simple de gagner de l'altitude, en diminuant le poids du ballon. Pour les ballons à gaz, c'est d'ailleurs le seul moyen utilisé. Il est rarement mis en œuvre avec les ballons à air chaud, sauf cas d'urgence. Cependant, si nous voulons comparer des choses comparables, il est nécessaire d'étudier le comportement des deux types de ballons lors d'un délestage.

### 1.9.4.1. – Délestage d'un ballon à air chaud

Il n'est pas nécessaire de reprendre tous les calculs. Notons simplement les différences par rapport à une commande d'altitude utilisant l'air chaud du ballon (§ 1.9.2).

♣ A l'instant de la commande, il n'y a pas de variation de température, et (1.45) devient :  

$$\Delta T_b = \Delta \rho_b = 0 \quad (1.81a)$$

C'est maintenant la masse propre du ballon qui est diminuée de  $\Delta M_b$  (masse du lest balancé), et le poids total (1.46a) est donné par :

$$P_t(z) = (M_b - \Delta M_b)g + \rho_b \Omega g \quad (1.81b)$$

La poussée  $F_p(z)$  (1.44b) et la condition d'équilibre initial (1.44d) sont inchangées, d'où le nouveau poids apparent (1.46) :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = \Delta M_b g \quad (1.81c)$$

◆ Pendant le déplacement, la variation (1.51b) du poids du ballon est :

$$dP_t = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega g dz \quad (1.82a)$$

La variation de la poussée (1.52b) restant la même, le poids apparent (1.53 – 1.54a) est remplacé par :

$$P_a(z + \Delta z) = \Delta M_b g - \left[ \frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dz} \right)_{ad} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \Omega g \Delta z \quad (1.82b)$$

d'où la nouvelle altitude d'équilibre  $\Delta z_e$ , donnée avec l'assistance de (1.54c) par :

$$\Delta M_b = \frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Omega \Delta z_e \quad (1.83a)$$

La condition (1.56) d'existence d'une position d'équilibre est devenue :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.83b)$$

Elle est très peu différente de (1.56) (voir § 1.10).

♥ La stabilité du ballon est toujours caractérisée à partir de l'équation dynamique (1.58), dans laquelle, sachant que  $\Delta T_b = 0$ , (1.59b) est remplacée par :

$$M_t(z) = M_b - \Delta M_b + \rho_b \Omega + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega z \quad (1.84a)$$

soit, avec (1.44d), et en négligeant le terme en  $z$  :

$$M_t(z) = -\Delta M_b + \rho \Omega \quad (1.84b)$$

L'équation (1.58) se met encore sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z + cte = 0 \quad (1.84c)$$

où l'on a maintenant, à la place de (1.61) :

$$N^2 = \frac{\rho \Omega}{\rho \Omega - \Delta M_b} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.85)$$

Pour la condition de stabilité ( $N^2 > 0$ ), on retrouve (1.83b).

♠ D'autre part, l'accélération initiale est donnée par la constante de (1.84c) :

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = -cte = \frac{\Delta M_b}{\rho \Omega - \Delta M_b} g \quad (1.86)$$

#### 1.9.4.2. – Délestage d'un ballon à gaz

♣ Les conditions initiales sont les mêmes qu'en (1.9.3.2).

A l'instant de la commande, la masse de gaz reste constante ( $\Delta M_g = 0$ ), et le volume aussi ( $\Delta \Omega = 0$ ). C'est la masse propre du ballon qui est diminuée de  $\Delta M_b$ , et le poids total (1.66) est maintenant :

$$P_t(z) = (M_b - \Delta M_b)g + M_g g \quad (1.87a)$$

La poussée  $F_p(z)$  (1.68) reste ici égale à la poussée initiale  $F_p$  (1.64). Le nouveau poids apparent (1.69b) est alors :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = \left\{ M_g \frac{r_g}{r} - M_b + \Delta M_b - M_g \right\} g \quad (1.87b)$$

soit avec la condition d'équilibre (1.65b) :

$$P_a(z) = \Delta M_b g \quad (1.87c)$$

Au départ, on se trouve donc exactement dans la même situation qu'avec un ballon à air chaud (relation 1.81c).

◆ Pendant le déplacement, le poids du ballon (1.87a) ne varie pas :

$$P_t(z) = P_t(z + dz) = P_t$$

tandis que la poussée (1.73) devient (avec  $\Delta \Omega = 0$ ) :

$$F_p(z + dz) = (\rho + d\rho) [\Omega + \delta\Omega] g \quad (1.88a)$$

ce qui a pour conséquence (en incluant la condition d'équilibre (1.65b), et en négligeant le terme du second ordre  $d\rho \delta\Omega$ ), un nouveau poids apparent :

$$P_a(z + dz) = F_p(z + dz) - P_t = \rho \delta\Omega + d\rho \Omega + \Delta M_b g \quad (1.89a)$$

Les différents termes de cette expression sont donnés par (1.70), (1.72a) puis (1.71c). Sachant que  $\Omega = M_g / \rho_g$ , et compte tenu de (1.76), il vient finalement, à la place de (1.77a) :

$$\frac{1}{g} P_a(z + \Delta z) = \Delta M_b - M_g \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z \quad (1.89b)$$

La position d'équilibre  $\Delta z_e$  est alors donnée par :

$$\Delta M_b = M_g \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.90)$$

Sachant que le délestage doit provoquer une montée du ballon, sa condition d'existence est donc :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.91)$$

identique à (1.78) (commande par le gaz).

♥ Dans l'équation dynamique (1.79a),  $P_a(z)$  est originaire de (1.89b) (avec à nouveau le changement de notation :  $z = 0$ , et  $\Delta z \Rightarrow z$ ), et  $M_t(z)$  provient de (1.87a) :

$$M_t(z) = M_b - \Delta M_b + M_g \quad (1.92)$$

Le paramètre de stabilité devient :

$$N^2 = \frac{M_g}{M_b - \Delta M_b + M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.93)$$

La stabilité est respectée avec  $N^2 > 0$ , condition identique à (1.91).

♠ L'accélération initiale (1.86) est remplacée par :

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = -cte = \frac{\Delta M_b}{M_b - \Delta M_b + M_g} g \quad (1.93)$$

## 1.10 – Comportement comparé des ballons à air chaud et des ballons à gaz

### 1.10.1. – BASES DE COMPARAISON

La comparaison ne peut se faire que sur la base de données numériques.

Pour les montgolfières, des ordres de grandeur usuels sont :

$$\begin{array}{lll} M_b = 250 \text{ kg} & \Omega = 2200 \text{ m}^3 & T = 15 \text{ }^\circ\text{C} = 288 \text{ K} \\ \rho = 1,213 \text{ kg/m}^3 & T_b = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K} ; & \rho_b = 0,936 \text{ kg/m}^3 \\ M_g = \rho_b \Omega = 2060 \text{ kg} & \gamma = 1,4 & r = 288 \text{ J/kg.K} \end{array}$$

Pour les ballons à hélium :

$$\begin{array}{lll} M_b = 250 \text{ kg} & \Omega \cong 600 \text{ m}^3 & T = 15 \text{ }^\circ\text{C} = 288 \text{ K} \\ \rho_g = 0,169 \text{ kg/m}^3 & M_g = \Omega \rho_g \cong 101 \text{ kg} & \\ \gamma_g = 1,66 & r_g = 2060 \text{ J/kg.K} & \end{array}$$

Dans les deux cas :  $(dT/dz)_{ad} = 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/m}$

Le comportement des ballons peut être comparé selon quatre caractéristiques :

- la condition de stabilité  $N^2 > 0$  (équivalente à l'existence d'une altitude d'équilibre)
- le niveau d'équilibre  $\Delta z_e$
- l'accélération initiale
- l'amortissement ou l'amplification du mouvement, liés à la valeur numérique de  $N^2$ .



### 1.10.2. - COMMANDE PAR DÉLESTAGE

#### ♣ *Condition de stabilité*

Pour le ballon à air chaud, elle est donnée par (1.83b) :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0$$

$$\frac{dT}{dz} > 3,5 [1 - 0,715 \times 0,772] \times (-0,01) \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

$$\frac{dT}{dz} > -0,0157 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

Pour le ballon à gaz, c'est (1.91) :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0$$

$$\frac{dT}{dz} > 3,5 \times 0,4 \times (-0,01) \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

$$\frac{dT}{dz} > -0,014 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

♪♪ La différence est faible, et on peut considérer que la condition de stabilité est la même pour les deux modèles de ballon. Il semble cependant que dans une étroite fourchette de gradient thermique ( $-0,0157 < dT/dz < -0,014$ ) le ballon à air chaud est stable alors que le ballon à gaz est déjà en situation d'instabilité.

On remarquera aussi que les deux modèles de ballons restent stables dans une atmosphère légèrement instable (si :  $-0,0157$  ou  $-0,014 < dT/dz < -0,01 = (dT/dz)_{ad}$ ).

#### ◆ *Niveau d'équilibre*

Pour calculer  $\Delta z_e$ , il faut se fixer un gradient atmosphérique satisfaisant la condition de stabilité précédente. Prenons le cas d'une atmosphère neutre :

$$\frac{dT}{dz} = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} = -0,01 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

On doit aussi donner la masse délestée. Choisissons  $\Delta M_b = 1 \text{ kg}$ .

L'altitude d'équilibre du ballon à air chaud est donnée par (1.83a) :

$$\Delta M_b = \frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Omega \Delta z_e$$

et pour le ballon à gaz, par (1.90) :

$$\Delta M_g = M_g \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e$$

- Dans le premier cas :  $I = \frac{1,213}{288} \times (-0,01 + 0,0157) \times 2200 \Delta z_e$

$$\Delta z_e = 19 \text{ m}$$

- Dans le second :  $I = 101 \times \frac{1}{288} \times \frac{2060}{288} \times (-0,01 + 0,014) \Delta z_e$

$$\Delta z_e = 100 \text{ m}$$

Avec une atmosphère stable (dans laquelle par exemple  $dT/dz = 0$ ), on trouve respectivement :

$$\Delta z_e = 7 \text{ m pour le ballon à air chaud}$$

$$\Delta z_e = 28,7 \text{ m pour le ballon à gaz.}$$

♪♪ Pour une même masse délestée, le gain d'altitude d'un ballon à gaz est très supérieur à celui d'une montgolfière. Toutefois, plus l'atmosphère est stable, plus l'écart entre les deux diminue.

#### ♥ Accélération initiale

Avec le ballon à air chaud, on a (1.86) :

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{\Delta M_b}{\rho \Omega - \Delta M_b} g$$

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{1,213 \times 2200 - 1} \times 9,8 = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

et avec le ballon à gaz (1.93):

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{\Delta M_b}{M_b - \Delta M_b + M_g} g$$

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{250 - 1 + 101} g = 2,85 \cdot 10^{-3} \text{ g}$$

♪♪ L'accélération initiale du ballon à gaz (qui ne dépend pas du gradient thermique atmosphérique) est huit fois plus grande que celle du ballon à air chaud. Cet écart est dû en grande partie à la différence des masses de gaz embarqué (§1.10.1) : 2060 kg d'air chaud contre 100 kg d'hélium. La plus faible poussée hydrostatique exercée sur le ballon à gaz, due à son plus faible volume, atténue seulement un peu la différence.

#### ♠ Amortissement ou amplification

- En situation de stabilité ( $N^2 > 0$ ), l'accélération est maximale en position initiale ; elle devient nulle à la position d'équilibre, et  $N^2$  mesure la décélération entre ces deux points.

- Avec le ballon à air chaud (1.85) :

$$N^2 = \frac{\rho \Omega}{\rho \Omega - \Delta M_b} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\}$$

- Avec le ballon à gaz (1.92) :

$$N^2 = \frac{M_g}{M_b - \Delta M_b + M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\}$$

Pour l'un et l'autre, l'influence de la masse délestée  $\Delta M_b$  est insignifiante. En atmosphère neutre, on trouve respectivement :  $N^2 = 2.10^{-4}$  (air chaud),  $N^2 = 2,8.10^{-4}$  (gaz), et avec  $dT/dz = 0$  :  $N^2 = 5,45.10^{-4}$  (air chaud),  $N^2 = 10.10^{-4}$  (gaz).

🎵 On constate que le ralentissement du mouvement est plus important pour le ballon à gaz. En outre, il est d'autant plus marqué que l'atmosphère est plus stable.

● *En situation d'instabilité* ( $N^2 < 0$ ), prenons par exemple  $dT/dz = -0,022 \text{ °C/m}$ . On obtient :  $N^2 = -1,8.10^{-4}$  pour le ballon à air chaud, et  $N^2 = -4,9.10^{-4}$  pour le ballon à gaz.

🎵 On voit que l'accélération du ballon à gaz est amplifiée par rapport à celle du ballon à air chaud ( $N^2$  est plus grand en valeur absolue). Dans ce cas, le ballon à gaz est beaucoup plus instable que la montgolfière.

### 1.10.3 – COMMANDE PAR LE GAZ

Les résultats sont très voisins de ceux obtenus par délestage, aussi bien qualitativement que quantitativement. Pour la stabilité du ballon à gaz, ils sont même rigoureusement identiques. Les commentaires précédents restent donc valables.

### 1.10.4. – CONCLUSIONS

⚠ Les calculs présentés plus haut reposent sur des hypothèses simplificatrices qu'il est bon de rappeler :

- - Les échanges de chaleur entre le gaz des ballons et l'atmosphère ne sont pas pris en compte (l'enveloppe est considérée comme un isolant parfait)
- - On néglige la dimension des ballons, qui sont considérés comme des points ; à l'intérieur, la température et la pression sont donc supposées uniformes
- - On admet que  $dT/dz = cte$  sur la hauteur de déplacement des ballons
- - La sollicitation initiale est supposée instantanée (ceci est valable pour le délestage, mais inexact pour la commande par le gaz)
- - La traînée (résistance aérodynamique) des ballons pendant leur déplacement est négligée (elle a un effet de freinage)

Compte tenu de ces réserves, l'analyse ci-dessus montre un comportement contrasté entre ballons à air chaud (BAC) et ballons à gaz (BAG).

♣ Lorsque BAC et BAG sont sous condition de stabilité, le mouvement engendré par une modification de la masse totale est plus amorti pour le BAG, qui se révèle donc *stricto sensu* plus stable que le BAC.

Par contre, sous condition d'instabilité, c'est l'inverse ; le mouvement du BAG est beaucoup plus amplifié. Le BAG est alors plus instable que le BAC.

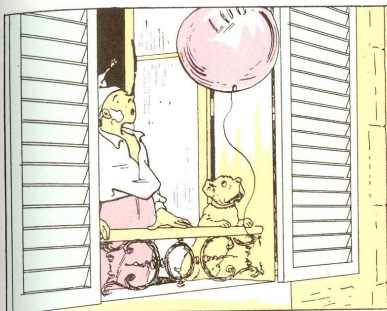
◆ Si l'on considère la sensibilité à une même sollicitation, le BAG présente toujours une accélération initiale supérieure, et, en situation stable, l'amplitude de son déplacement est nettement supérieure à celle du BAC. Dans tous les cas, il est donc beaucoup plus sensible que le BAC.

Ce résultat correspond à l'expérience des aérostatiers. Ceux-ci rapportent qu'une simple poignée de sable lancée par-dessus bord suffit à déclencher un mouvement très perceptible sur un BAG. D'ailleurs, Jules Verne disait déjà, dans *L'île mystérieuse* : « On sait de quelle sensibilité statique sont doués les aérostats ».

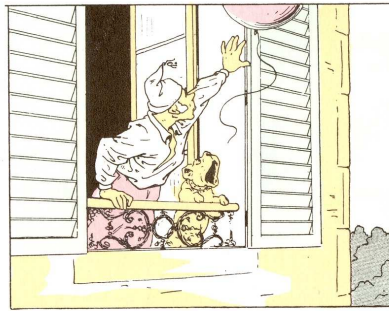
La raison principale en est que, toutes charges comprises, le BAG est plus léger que le BAC. Le reste est lié à la différence de propriétés entre l'air et l'hélium (ou l'hydrogène).

♥ D'un point de vue pratique, le pilotage d'un BAG en condition de stabilité demande plus de doigté. En condition d'instabilité, il peut devenir extrêmement délicat.

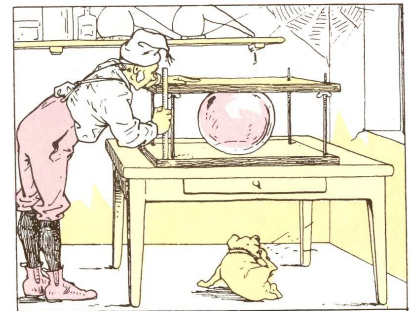
### *Cosinus calcule la force ascensionnelle des ballons à deux sous.*



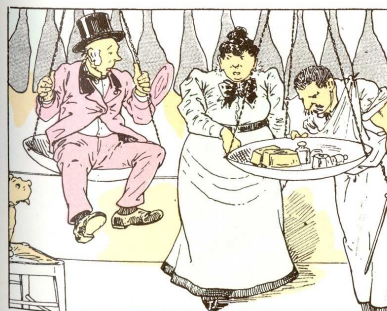
Cosinus est tiré de ses réflexions par le passage inopiné dans son champ visuel d'un ballon qui fait naître aussitôt dans son esprit certaines idées.



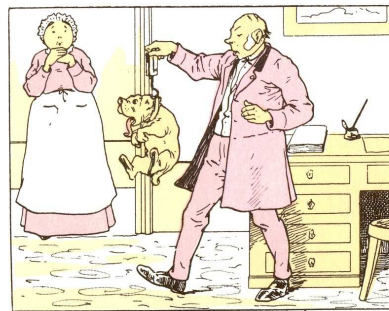
Ces idées reçoivent immédiatement un commencement d'exécution que Sphéroïde, chien d'initiative, s'empresse d'encourager du geste de la voix.



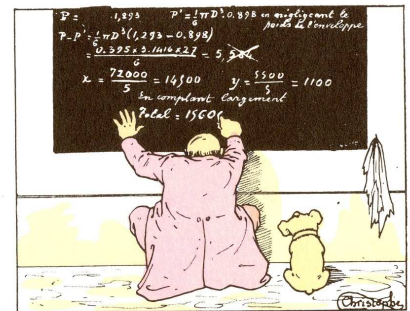
Puis, au moyen d'un appareil de son invention, Cosinus mesure, à 3 ou 4 centimètres près, le diamètre de l'objet. Il trouve qu'il est égal à 0=30.



Après quoi, Cosinus se rend chez le boucher voisin et, s'installant dans la balance destinée aux veaux, exprime le désir « qu'on détermine son poids absolu par la méthode de la double pesée ». « Oh! monsieur, dit la bouchère, on pèse ici plutôt triple que double! » Cosinus déplore l'ignorance de cette femme en matière de sciences expérimentales.



Ayant appris qu'il pèse 72 kilos, Cosinus qui a son idée, entreprend de rechercher, par une méthode approximative, au moyen d'un appareil nommé dynamomètre, le poids de Sphéroïde dont l'attitude témoigne qu'il goûte peu ce genre d'expériences. Sphéroïde apprend même avec une complète indifférence qu'il pèse 5 k. 500.



En possession de tous les éléments du problème, Cosinus se livre à de profonds calculs qui lui apprennent qu'il lui suffira de 15 600 ballons à 0 fr. 10 (dont 14 500 pour lui et 1 100 pour Sphéroïde), afin de pouvoir entreprendre son voyage par la voie aérienne. Dans ses calculs, Cosinus a cru pouvoir négliger le poids de l'enveloppe.

*N.B.* A l'époque du savant Cosinus, les ballons de fêtes foraines étaient gonflés au gaz de ville (encore appelé gaz d'éclairage), riche en hydrogène (au moins 50%), mais néanmoins plus lourd que l'hydrogène pur. Actuellement, ils sont gonflés à l'hélium.

Le ballon (de  $1200\text{ m}^3$ ) qui a permis à Léon Gambetta de quitter Paris en 1870 était également gonflé au gaz d'éclairage.

## 1.11. - Équilibre et stratification d'un plan d'eau

### 1.11.1. – DILATATION THERMIQUE : LE CAS PARTICULIER DE L'EAU

Pour la plupart des liquides, la masse volumique diminue quand la température augmente, et ceci de façon presque linéaire. Cela revient à dire que la dilatabilité  $\beta$  est positive, et peu dépendante de la température.

L'eau présente une exception notable par rapport à ce type de comportement : à partir de  $T = 0^\circ\text{C}$ , sa masse volumique augmente jusqu'à  $T_m = 3,98^\circ\text{C}$  (valeur souvent arrondie à  $4^\circ\text{C}$ ), puis diminue avec une variation non linéaire.

On est surpris de constater que la valeur maximale  $\rho_m = \rho(T_m)$  fait l'objet de divergences dans la littérature. La raison principale en est celle-ci :

En 1795, avec l'introduction du système métrique, le kilogramme a été défini comme la masse d'un décimètre cube d'eau à la température de  $4^\circ\text{C}$ . Le besoin d'un étalon solide a entraîné la réalisation d'un tel étalon en matériau métallique, conservé au Pavillon de Breteuil, à Sèvres. Ultérieurement, il s'est avéré que la masse de celui-ci était très légèrement supérieure à la masse d'un litre d'eau, et comme par définition, c'est l'étalon qui est la référence, le Comité International des Poids et Mesures a rétrogradé la masse volumique de l'eau à  $\rho_m = 999,975\text{ kg/m}^3$ . Cependant, on trouve encore fréquemment des tables de valeurs numériques dans lesquelles  $\rho_m = 10^3\text{ kg/m}^3$ . D'autres valeurs circulent aussi, dont l'origine est incertaine. Mais heureusement, dans la grande majorité des cas, ces divergences n'ont guère de conséquences pratiques. Le problème le plus sérieux n'est pas là, mais dans la détermination de la dilatabilité  $\beta$  (cf. Annexe 1.1).

### 1.11.2. – CONSÉQUENCE SUR LA STRATIFICATION D'UN PLAN D'EAU

Une conséquence de la propriété précédente est que, entre  $0$  et  $4^\circ\text{C}$ , la dilatabilité  $\beta$  est négative, et les conditions de stabilité (1.37) sont inversées. Dans un plan d'eau, on ne peut donc trouver aucune couche profonde permanente dont la température soit inférieure à  $4^\circ\text{C}$  (sauf sous l'effet de conditions aux limites très spécifiques). Toute particule fluide qui se trouverait dans ce cas se verrait transférée au-dessus du niveau de température  $T_m$ , vers la couche supérieure correspondant à sa masse volumique  $\rho$ . En particulier, dans des conditions climatiques d'hiver où la surface d'un plan d'eau est gelée, le gradient de température est inversé, l'eau la plus froide se situant vers la surface (fig. 1.6). Ceci n'est cependant pas vrai pour les fonds marins, en raison de la salinité de l'eau.

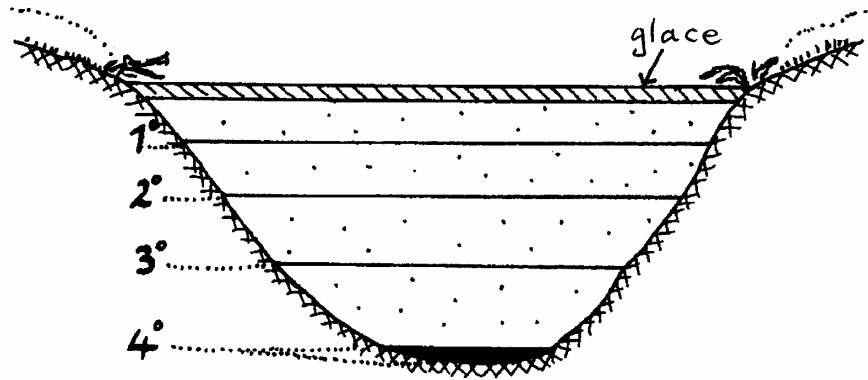


FIG. 1.6. – Exemple de stratification thermique d'un plan d'eau douce en hiver (d'après C. Pielou)

Par contre, en régime permanent, si la température de l'atmosphère est supérieure à  $4^{\circ}\text{C}$ , le profil de température est monotone décroissant à partir de la surface (fig. 1.7).

### 1.11.3. – COUCHE DE MÉLANGE ET THERMOCLINE

Dans les conditions d'été, on observe généralement une structuration particulière comportant une *couche de mélange* et une *thermocline* (fig. 1.7 et 1.8).

En effet, les mesures de températures sur une verticale font apparaître une première zone superficielle, de profondeur  $h$  (fig. 1.8) où la température est sensiblement uniforme. Cette zone, appelée « *couche de mélange* », est due à l'action des agents extérieurs (essentiellement le vent) qui ont pour effet de brasser l'eau et donc d'homogénéiser la température. L'épaisseur de la couche de mélange est extrêmement variable selon les conditions géométriques et thermiques, allant de quelques dizaines de centimètres à plusieurs dizaines de mètres.

En dessous de la couche de mélange se situe une couche de quelques centimètres à quelques mètres d'épaisseur, la « *thermocline* », où un réajustement se produit, avec une température qui diminue très rapidement. Puis, sous la thermocline, on retrouve un profil de température sensiblement linéaire et variant lentement avec la profondeur (fig. 1.8). Dans les calculs, on schématise la thermocline par une discontinuité  $\Delta T$  de la température  $T$ .

On se doit de signaler que ce type de stratification se rencontre aussi bien dans les étendues d'eau douce que dans les eaux salines (mers ou océans).

Quant à la masse volumique de l'eau, au-dessus de  $4^{\circ}\text{C}$  elle évolue bien entendu en sens inverse de la température. Dans la couche de mélange, elle est donc à peu près uniforme, mais présente une augmentation rapide dans la thermocline (schématisée par une discontinuité  $\Delta\rho$ ), pour croître ensuite plus lentement lorsqu'on descend vers le fond.

En dehors des aspects thermiques et mécaniques, la présence d'une thermocline a aussi des conséquences biologiques, les espèces vivantes que l'on rencontre étant généralement différentes au-dessus et en dessous de celle-ci.

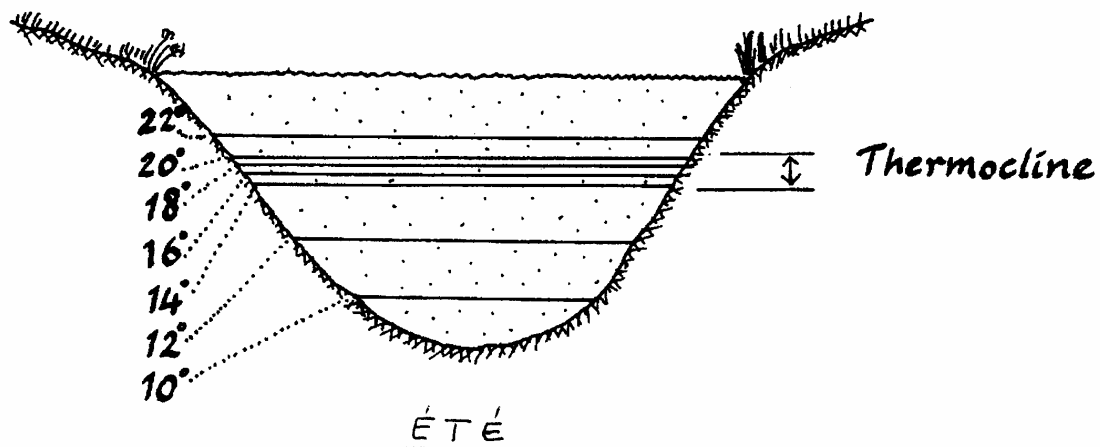


FIG. 1.7 – Exemple de stratification d'un plan d'eau douce en été (d'après C. Pielou)

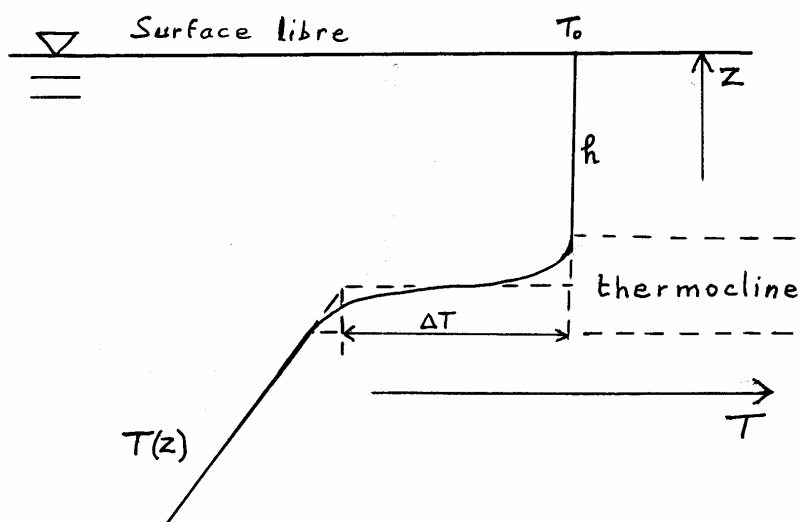


FIG. 1.8 – Stratification thermique d'un plan d'eau avec couche de mélange ( $h$ ) et thermocline

🎵 Un cas très particulier de thermocline mérite d'être signalé : c'est le célèbre phénomène « *El Niño* », qui affecte périodiquement le centre et le sud-est de l'océan Pacifique, et qui a des conséquences extrêmement importantes sur le climat. Il est dû à la présence d'une couche de mélange constituée d'eau douce chaude, apportée par des pluies abondantes, dont l'épaisseur peut atteindre quelques dizaines de mètres. Celle-ci surmonte une couche profonde d'eau froide et salée, donc sensiblement plus dense, ce qui conduit à une situation de forte stabilité, et à une limitation des échanges massiques et thermiques entre les couches océaniques, et entre l'océan et l'atmosphère.

## ANNEXE 1.1 : RETOUR SUR LA DILATABILITÉ DE L'EAU

Compte tenu des propriétés particulières de l'eau, un complément sur le calcul de sa dilatabilité n'est pas inutile.

♣ Tout d'abord, il est recommandé de calculer la masse volumique de l'eau avec la formule adoptée par le Comité International des Poids et Mesures, à savoir :

$$\rho(t) = a_5 \left\{ 1 - \frac{(t + a_1)^2 (t + a_2)}{a_3 (t + a_4)} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

avec  $t$  en  $^{\circ}\text{C}$ , et (valeurs arrondies) :

$$a_1 = -t_m = -3,98 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$a_2 = 301,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$a_3 = 522\,500 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$a_4 = 69,35 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$a_5 = \rho_m = 999,975 \text{ kg/m}^3$$

Un échantillon de valeurs de  $\rho$  calculées selon cette formule est donné ci-dessous :

$t$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )
0	999,84
1	999,90
2	999,943
$t_m$	$\rho_m$
6	999,943
10	999,70
20	998,206
40	992,21
60	983,175

⚠ A cet égard, il faut signaler que les valeurs de  $\rho$  données dans notre ouvrage « Echangeurs Thermiques » (tables numériques à la fin du chapitre « Problèmes »), et empruntées à d'autres auteurs, sont partiellement incorrectes.

Heureusement, dans beaucoup de cas, les variations de  $\rho$  en fonction de  $t$  n'ont pas à être prises en compte, mais elles conditionnent la dilatabilité  $\beta$ , qui est d'importance majeure en convection mixte ou naturelle.

◆ Rappelons maintenant la définition de  $\beta$  (FEMM, 2.15a), la température  $t$  étant exprimée ici en  $^{\circ}\text{C}$  :

$$\beta(t) = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{A1.2})$$

soit, avec la formule (A1.1), en simplifiant et en considérant  $\rho \cong \rho_m = a_5$  :



$$\beta(t) = (t + a_1) \frac{[2(t + a_2) + (t + a_1)](t + a_4) - (t + a_1)(t + a_2)}{a_3(t + a_4)^2} \quad (\text{A1.3})$$

d'où les valeurs numériques suivantes :

$t$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\beta$ ( $1/\text{K}$ )
0	$-0,677.10^{-4}$
$t_m$	0
6	$0,312.10^{-4}$
10	$0,88.10^{-4}$
20	$2,06.10^{-4}$
30	$3,02.10^{-4}$
40	$3,83.10^{-4}$

Comme on pouvait s'y attendre vu l'allure de la fonction  $\rho(t)$ , la dilatabilité est négative en dessous de  $t_m$ , nulle pour  $t = t_m = 3,98$   $^{\circ}\text{C}$ , et positive au-dessus. Mais le plus important est la variation considérable de  $\beta(t)$ , même si elle se ralentit un peu au-delà de  $40$   $^{\circ}\text{C}$ .

⚠ Il faut donc être prudent lorsqu'on utilise une valeur moyenne de  $\beta$  en convection mixte ou naturelle : cette approximation n'est acceptable que dans une plage de température assez étroite (disons  $\pm 5$   $^{\circ}\text{C}$  à partir de  $t = 15$   $^{\circ}\text{C}$ ). L'impact de cette propriété est souvent négligé dans les applications. Pourtant, on mesure ici les limites de l'approximation de Boussinesq avec ce fluide universellement présent, mais très particulier

🎵 Quant à la valeur  $\beta = 2,6.10^{-4}$  qui traîne un peu partout sur Internet, on ignore ses conditions de validité. Il semblerait qu'elle concerne l'eau de mer, mais sans autre précision. Dans le doute, mieux vaut l'ignorer.

◆ Les mécaniciens et thermiciens sont principalement concernés par la *masse volumique des fluides*, et donc par sa variation avec la température, exprimée par la dilatabilité  $\beta$ .

Par contre, les physiciens s'intéressent davantage au *volume massique des fluides*, dont la variation avec la température est caractérisée par un « coefficient  $\alpha$  de dilatation volumique ».

Quel est le rapport entre  $\alpha$  et  $\beta$  ? La réponse est assez triviale, mais détaillons-la quand même.

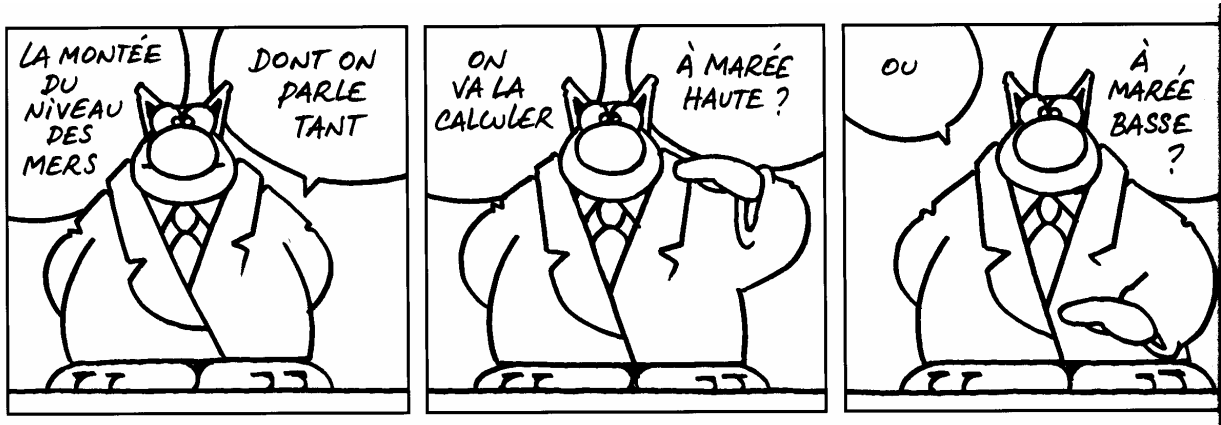
Soit  $v$  le volume massique du fluide ( $\text{m}^3/\text{kg}$ ). Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis respectivement par :

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} ; \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (\text{A1.4})$$

Sachant que  $\rho = 1/v$ , on a encore :

$$\beta = -v \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = \alpha \quad (\text{A1.5})$$

$\alpha$  ou  $\beta$ , c'est donc exactement la même chose.



Ph. Gelluck – *Le chat*

## ANNEXE 1.2 : GRADIENT DE MASSE VOLUMIQUE DANS L'AIR - DILATABILITÉ

♣ On rappelle d'abord que les caractéristiques de l'atmosphère au repos sont gouvernées par l'équation d'état (1.2), par la loi de la statique (1.1), et par les conditions aux limites, qui imposent généralement le gradient de température  $dT/dz$ .

Il en résulte une stratification thermique et barométrique de l'atmosphère, qui s'accompagne évidemment d'une « stratification volumétrique », c'est-à-dire d'un gradient de masse volumique  $d\rho/dz$ . Pour le calculer, on partira de l'équation d'état  $p/\rho = rT$ , ou :

$$\rho = \frac{p}{rT} \quad (\text{A 2.0})$$

En dérivant, il vient :

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{rT} \frac{dp}{dz} - \frac{p}{r} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dz} \quad (\text{A 2.1})$$

soit, avec l'équation de la statique  $dp/dz = -\rho g$  :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{rT} \rho g - \rho T \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dz}$$

ou encore, en permutant les deux derniers termes :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} + \frac{g}{r} \right) \quad (\text{A 2.2})$$

(relation d'ailleurs identique à (1.38a) du fait que  $p/\rho = rT$ ).

Il est commode d'introduire ici le gradient adiabatique (1.15a), qui constitue une référence pour caractériser l'état de l'atmosphère, ce qui donne (cf. 1.11) :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right)} = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - 3,5 \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) \quad (\text{A 2.3a})$$

On voit ainsi que lorsque l'altitude augmente,  $\rho$  diminue si :

$$\frac{dT}{dz} > 3,5 \frac{dT}{dz} \Big|_{ad}$$

et augmente dans le cas contraire.

En particulier, on est en présence d'une « atmosphère isochore » lorsque  $d\rho/dz = 0$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{dT}{dz} = -3,5 \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} = -3,5 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{m} \text{ ou } -3,5 \text{ } ^\circ\text{C}/100\text{m} \quad (\text{A 2.3b})$$

ce qui correspond donc à un état de forte instabilité.

🎵 D'un point de vue pratique, on voit que l'on peut admettre l'approximation  $\rho = cte$  sur une épaisseur de 10 à 30 m. Par exemple, à la température ambiante, pour  $dz = 20\text{m}$  et  $dT/dz = 0$ , on a  $|d\rho/\rho| \cong 1,6\%$ . Mais dans les mêmes conditions, cet écart monte à 8 % pour une différence de niveau de 100 m.

◆ La dilatabilité d'un gaz parfait répond à la définition générale (FEMM, 2.15a) :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A 2.4})$$

et donc, d'après l'équation d'état (A 2.0) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{p}{r} \frac{1}{T^2}$$

d'où :

$$\beta = -\frac{rT}{p} \left( -\frac{p}{r} \frac{1}{T^2} \right)$$

et par conséquent :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{T}} \quad (\text{A 2.5})$$

## ANNEXE 1.3 : EXERCICE

### Un ballon-sonde sur Titan

L'envoi d'un ballon-sonde figure parmi les projets d'exploration de Titan, satellite de Saturne pourvu d'une atmosphère.

Les données recueillies par la sonde Huygens (Tokano & al., 2006) sont les suivantes :

- atmosphère : 95% d'azote
- température au sol :  $T = 93,6 \text{ K}$  ( $-179,4 \text{ }^\circ\text{C}$ ) ; pression au sol :  $p = 1,47 \text{ bar}$
- gradient de température dans la basse atmosphère :  $dT/dz = -10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$
- accélération de la pesanteur :  $g_T = 1,4 \text{ m/s}^2 \cong g/7$

Pour la sonde, on admettra :

- gaz : hélium ; commande d'altitude par réserve de gaz embarquée.
- masse :  $M_b = 350 \text{ kg}$

#### Questions

- 1) L'atmosphère est-elle stable ou instable ? Le ballon est-il en situation de stabilité ?
- 2) Calculer la masse d'hélium nécessaire à l'équilibre au niveau du sol, et le volume du ballon.
- 3) Quelle masse de gaz  $\Delta M_g$  faut-il injecter dans le ballon pour monter de 100 m ?
- 4) Calculer l'accélération initiale et l'amortissement du mouvement. Comparer avec un ballon terrestre.

#### Solution

1)

Le gradient adiabatique est donné par (1.15a), en remplaçant  $g$  par  $g_T$  :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g_T}{r}$$

Admettons en première approximation que l'atmosphère est constituée à 100% d'azote, gaz diatomique. On a donc, comme sur terre :

$$\gamma = 1,4 ; r = 288 \text{ J/kg.K}$$

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -1,4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$$

Comme  $dT/dz = -10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ , on voit que :

$$dT/dz > (dT/dz)_{ad}$$

**L'atmosphère est stable.**

L'inégalité (1.78) donne la condition de stabilité du ballon :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma_g-1}{\gamma_g} \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \right\} > 0$$

Pour l'hélium (§ 1.10.1) :  $\gamma_g = 1,66$

$$-1 \cdot 10^{-3} > 3,5 \times 0,4 \times (-1,4 \cdot 10^{-3}) = -1,96 \cdot 10^{-3}. \text{ La condition est satisfaite.}$$

**Le ballon est stable**

2)

Il faut d'abord connaître la masse d'hélium qui équilibre la sonde au niveau du sol. Elle est donnée par (1.65b), où  $r_g = 2060 \text{ J/kg.K}$  (§ 1.10.1):

$$M_g = \frac{M_b}{\frac{r_g}{r} - 1} = \frac{350}{\frac{2060}{288} - 1}$$

$$M_g = 57 \text{ kg}$$

Le volume  $\Omega$  du ballon est donné par (1.63b) :

$$\Omega = \frac{M_g}{\rho_g} = M_g \frac{r_g T}{p}$$

Avec  $T = 93,6 \text{ K}$  et  $p = 1,47 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  :

$$\Omega = 75 \text{ m}^3$$

3)

La nouvelle altitude d'équilibre est reliée à  $\Delta M_g$  par (1.77b) :

$$\Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) = (M_g + \Delta M_g) \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e$$

Dans le second membre, on négligera  $\Delta M_g$  par rapport à  $M_g$  :

$$\Delta M_g = \frac{M_g}{\frac{r_g}{r} - 1} \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e$$

D'après la question 1) :  $\left\{ \right\} = 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/m}$ .

Pour obtenir  $\Delta z_e = 100 \text{ m}$ , il faut injecter une masse de gaz :

$$\Delta M_g = \frac{57}{6,15} \times \frac{1}{93,6} \times \frac{2060}{288} \times 0,96 \cdot 10^{-3} \times 100$$

$$\Delta M_g = 0,064 \text{ kg} = 64 \text{ g}$$

4)

♣ L'accélération initiale est obtenue à partir de (1.79a) :

$$P_a(z=0) = M_t(z=0) \left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0}$$

avec (1.66) :

$$M_t = M_b + M_g + \Delta M_g$$

et pour le poids apparent (1.79a) avec  $\Delta z = 0$  et  $g$  remplacé par  $g_T$  :

$$P_a(z=0) = g_T \Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right)$$

Ainsi :

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=0} = \left(\frac{r_g}{r} - 1\right) \frac{\Delta M_g}{M_b + M_g + \Delta M_g} g_T = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

L'ordre de grandeur est proche de celui qui a été calculé au paragraphe 1.10♥ pour un ballon terrestre.

◆ L'amortissement est caractérisé par le facteur  $N^2$  (1.80) :

$$N^2 = \frac{M_g + \Delta M_g}{M_b + M_g + \Delta M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \right\}$$

Avec les valeurs numériques utilisées :

$$N^2 = 1,45 \cdot 10^{-5}$$

Sur terre,  $N^2 = 3 \text{ à } 5 \cdot 10^{-4}$ . L'amortissement du mouvement est donc plus faible sur Titan. La différence tient à la fois à la pesanteur et aux propriétés des deux atmosphères.

## 2 - ÉCOULEMENTS ATMOSPHÉRIQUES

### 2.1. - Le vent et la couche limite atmosphérique

#### 2.1.1. – ORIGINE DU VENT

On appelle *vent* le mouvement de l'air atmosphérique, dans lequel on distingue un aspect global et un aspect local.

♣ *La circulation atmosphérique globale* résulte essentiellement du bilan radiatif de la surface terrestre, mais aussi de la rotation de la terre. Plus précisément, c'est la non uniformité de ce bilan radiatif qui est en cause.

En effet, dans les régions équatoriales, l'énergie solaire absorbée est, en moyenne annuelle, de l'ordre de  $300 \text{ W/m}^2$ , et l'énergie réémise par rayonnement de l'ordre de  $230 \text{ W/m}^2$ . Dans les régions polaires, ces valeurs sont respectivement de  $50 \text{ W/m}^2$  et de  $200 \text{ W/m}^2$ . Il y a donc un excédent de  $70 \text{ W/m}^2$  pour les unes et un déficit de  $150 \text{ W/m}^2$  pour les autres. Il en résulte des gradients de température qui engendrent des mouvements dans l'atmosphère et dans les océans, lesquels contribuent à transporter de la chaleur des basses aux hautes latitudes. En l'absence de ce transport, l'écart de température entre régions équatoriales et régions polaires serait beaucoup plus grand que celui que nous connaissons.

◆ *La circulation atmosphérique locale* reflète à plus petite échelle ce qu'il se passe au niveau global : les propriétés physiques de la surface et la nébulosité étant variables d'une région à l'autre, ceci entraîne des gradients de température et de pression à l'origine de vents locaux.

#### 2.1.2. – LA COUCHE LIMITE ATMOSPHÉRIQUE

La circulation atmosphérique locale s'apparente à un écoulement de couche limite turbulente sur une paroi rugueuse (FEMM, ch. 5), avec toutefois des échelles différentes. Les accidents du relief, la végétation, les constructions, constituent un type particulier de rugosité.

♣ Le profil de vitesse dans une couche limite atmosphérique est proche du schéma général décrit dans FEMM (§ 5.1.5. et 5.3.5.1). Celle-ci comporte donc une sous-couche visqueuse, au voisinage immédiat du sol, dont l'épaisseur va de quelques millimètres à 30 ou 40 cm. Cette couche est souvent perturbée par des structures aérodynamiques tourbillonnaires de sillages qui ne doivent pas être confondues avec des structures turbulentes.

Au-dessus, on rencontre une zone de transition, une zone logarithmique, puis une couche externe, dans laquelle la loi de vitesse est généralement présentée sous forme déficitaire (FEMM, § 5.1.5.4).

L'épaisseur de la couche limite, notée  $z_\infty$ , correspond à une vitesse du vent  $U_\infty = U(z_\infty)$  qui est la vitesse de circulation atmosphérique (encore appelée *vent météo*). Elle augmente avec la rugosité de la surface terrestre. Son ordre de grandeur est de  $150 \text{ m}$  (sol très plat ou plan d'eau) à  $500 \text{ m}$  (voire  $600 \text{ m}$ ) dans le centre des grandes villes (fig. 2.1). La zone qui s'étend au-delà de  $z_\infty$  est appelée *atmosphère libre*.

Pour certaines applications (résistance au vent des ouvrages et des bâtiments,...) on utilise une loi de vitesse approchée, dite « *vent de calcul* », qui s'écrit :

$$\frac{U}{U_{10}} = k \log \frac{z + l_0}{l_0} \quad (2.1)$$

Dans cette formule,  $l_0$  est un *paramètre de rugosité* de la surface (en  $m$ ) pour lequel, en pratique, on utilise des valeurs conventionnelles, correspondant à différentes classes de rugosité :  $l_0 = 1,5 \cdot 10^{-2} m$  sur un plan d'eau ;  $5 \cdot 10^{-2} m$  sur un terrain plat ;  $0,3 m$  sur une zone rurale avec bâtiments bas, arbres, haies... ;  $1 m$  sur les zones urbanisées et les forêt ; et  $2,5 m$  dans le centre des grandes villes.

La constante  $k$  est déterminée pour chaque valeur de  $l_0$  en écrivant que  $U = U_{10}$  pour  $z = 10 m$ . Par exemple :

$$l_0 = 5 \cdot 10^{-2} m \Rightarrow k = 0,43$$

Quant à  $U_{10}$ , c'est la vitesse mesurée à  $10 m$  de hauteur et moyennée sur une durée de  $10$  minutes. Cette vitesse est souvent appelée « *vent moyen* ».

L'utilisation des références  $U_{10}$  et  $l_0$ , ainsi que d'un logarithme décimal dans (2.1) a paru plus commode à certaines agences de normalisation, mais elle n'est pas en contradiction avec la loi classique de la zone logarithmique (FEMM, 5.26c ou 5.90c).

Il existe d'autres expressions de  $U$ , d'une forme analogue à (2.1). La particularité de celle-ci est d'obtenir  $U = 0$  quand  $z = 0$ .

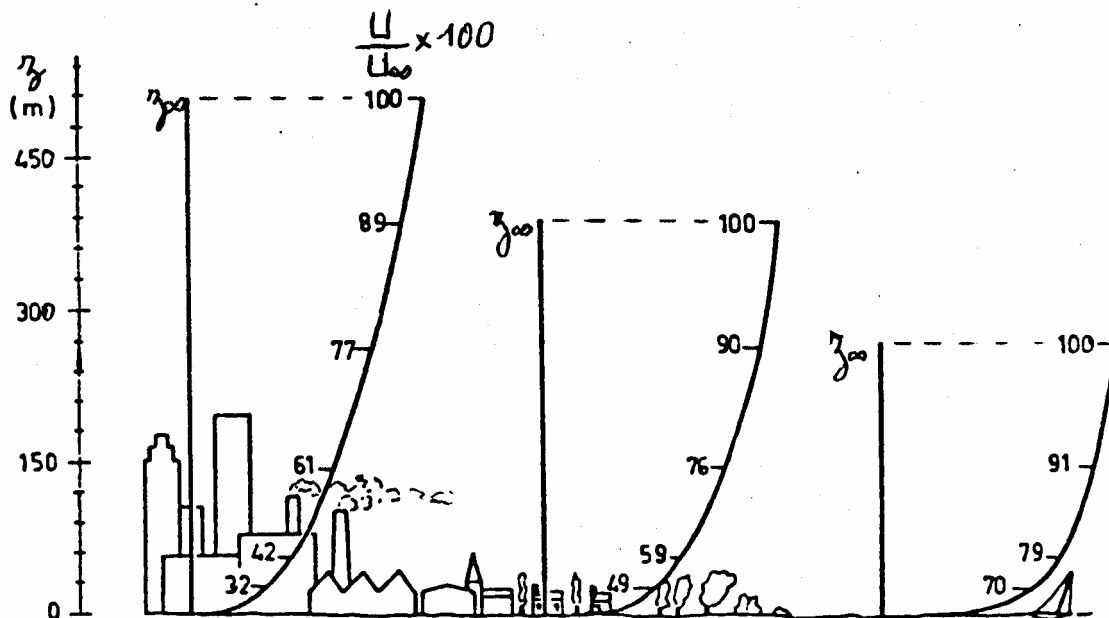


FIG. 2.1 – Profils de vitesse dans la couche limite atmosphérique selon la rugosité du terrain (d'après Davenport)



◆ L'influence d'un changement de rugosité sur la structure d'une couche limite dynamique est un problème théorique plus ardu que celui de la couche limite avec des conditions de paroi uniformes. Une nouvelle rugosité à partir de l'abscisse  $x=0$  entraîne une modification de la longueur de mélange (FEMM, § 5.2.4.), le terme  $\xi_\varepsilon$  de (5.53) étant recalculé à partir de  $x=0$ , d'où une nouvelle valeur de la viscosité turbulente  $\nu_t$  (FEMM, 5.13c). Il en résulte l'apparition d'une sous-couche dynamique, qui se développe et se substitue progressivement à la précédente couche limite (fig. 2.2). La contrainte de frottement au sol est évidemment affectée par cette modification de la surface.

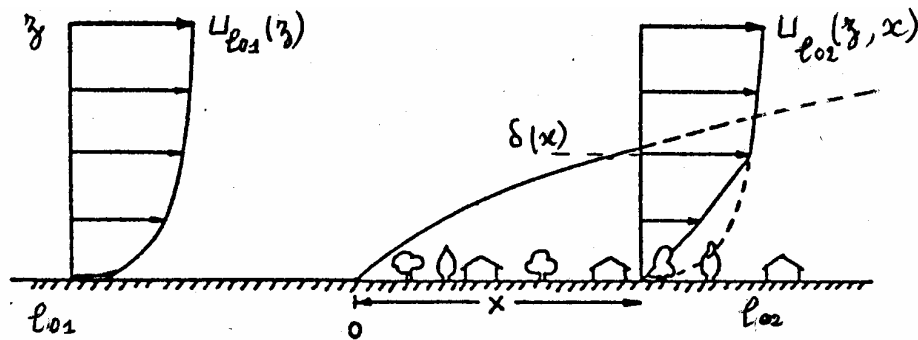


FIG. 2.2 – Influence d'un changement de rugosité ( $l_{01} \Rightarrow l_{02}$ ) sur la couche limite atmosphérique (d'après Davenport)

♥ En ce qui concerne *la turbulence atmosphérique*, sa nature est la même que dans tout écoulement turbulent, et ce qui a été dit dans le chapitre 3 de FEMM s'applique ici. Toutefois, en l'absence de confinement, les échelles des tourbillons sont très larges et vont du millimètre à plusieurs dizaines de mètres.

Notons que dans le langage courant, ce que nous appelons une *rafale* de vent n'est rien d'autre que le passage d'un tourbillon d'air, dont nous percevons facilement les effets cinétiques (§ 2.7.1 ♥).

Quant à *l'intensité de turbulence I*, (définie dans FEMM 3.82d), elle est souvent de quelques pour cent, mais peut atteindre 30% dans des vents de tempêtes.

⚠ *Attention* : dans certaines publications, le *vent moyen* (synonyme de vitesse moyenne, cf. § ♣ ci-dessus) est appelé « intensité du vent ». Cette terminologie incorrecte et injustifiée peut être une source de confusion.

## 2.2. – Écoulement et stabilité d'une atmosphère stratifiée

Au paragraphe précédent, nous n'avons considéré que l'aspect dynamique du vent. Dans les faits, la couche limite dynamique atmosphérique est couplée avec la couche limite thermique, car vu l'importance relative des forces d'Archimède, nous sommes en régime de convection mixte. Mais il s'agit ici de couches limites de convection mixte *sur une surface horizontale indéfinie*, dont les propriétés seront un peu différentes de celles qui ont été observées sur une plaque plane verticale munie d'un bord d'attaque (PTC, ch. 6).

## 2.2.1. – CONVECTION MIXTE LAMINAIRE SUR UNE PAROI HORIZONTALE

Examinons d'abord ce qu'il se passe avec un écoulement laminaire.

♣ Nous partons des équations générales (PTC - 5.5) et (PTC - 5.3), valables aussi bien en convection naturelle qu'en convection mixte :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{V} \quad (2.2)$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = a \Delta T \quad (2.3)$$

Plaçons-nous dans l'approximation bidimensionnelle. Le système de coordonnées étant ici  $\{x, z\}$ , il est d'usage de noter  $U$  et  $W$  les composantes de la vitesse  $\vec{V}$ . Les équations de projection sur  $x$  et  $z$  s'écrivent alors :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (2.4a)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.4b)$$

et l'équation d'énergie devient :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.4c)$$

En appliquant les hypothèses de la couche limite (FEMM, § 4.3.1.♣, § 4.4.1.1) et (PTC, § 1.1.2), les relations précédentes se réduisent à :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.5a)$$

$$0 = - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.5b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.5c)$$

Les champs de vitesse et de température dépendent évidemment des conditions aux limites, mais on voit qu'ils sont faiblement influencés par la fonction « convection mixte », par rapport à la convection forcée pure.

L'effet est un peu plus marqué sur le gradient de pression vertical. En effet, la seconde équation s'écrit encore :

$$0 = - g - \rho [T(z)] \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.6)$$

ce qui n'est rien d'autre que la loi de l'hydrostatique (1.1) pour un fluide à masse volumique variable. L'influence de la température se répercute donc essentiellement sur la pression par l'intermédiaire de  $\rho$ .

◆ En ce qui concerne la stabilité thermique de l'atmosphère en écoulement laminaire, on peut la considérer en reprenant l'approche élémentaire des paragraphes 1.8.1 et 1.8.3.

Admettons que sous l'effet d'une perturbation thermique, une particule fluide de masse volumique  $\rho_p$  passe de l'altitude  $z_0$  à l'altitude  $z$ . D'après (1.31b), (1.32) et (1.38), son poids apparent est encore:

$$\begin{aligned} g(\rho - \rho_p) &= g(z - z_0) \left( \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} \right) \\ &= - \frac{\rho g(z - z_0)}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \left[ \frac{dT}{dz} \right]_{ad} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

et les conclusions sont les mêmes qu'aux § 1.4 ou 1.8.3 : l'atmosphère est stable si l'on a  $\partial T / \partial z > (dT / dz)_{ad}$ , et instable dans le cas contraire. Le raisonnement s'applique également au cas d'une bouffée exogène (§ 1.6).

♥ Certes, la couche limite atmosphérique est rarement laminaire, mais elle peut s'en rapprocher lorsque l'écoulement est très lent. Cependant, même dans ce cas, on peut observer une « *turbulence atmosphérique thermique* », répondant à l'analyse faite aux § 1.6 et 1.8, et qui n'est pas exactement réductible à la turbulence dynamique, dont la structure est plus nettement tourbillonnaire. A l'origine de cette turbulence thermique (gênante pour les astronomes et pour les avions légers), on peut trouver par exemple des fluctuations de concentration en vapeur d'eau. Celles-ci vont entraîner des variations dans les échanges de chaleur par rayonnement (l'émissivité de la vapeur d'eau étant très supérieure à celle de l'air), et donc des fluctuations locales de température. Ceci explique en particulier que la turbulence thermique soit généralement plus faible dans les climats secs.

## 2.2.2. – CONVECTION MIXTE TURBULENTE SUR UNE PAROI HORIZONTALE

### ♣ *Equations de la couche limite turbulente*

A partir de FEMM (5.6) et (3.40), on établit les équations d'une couche limite horizontale turbulente, formellement analogues à celles du système (2.5), dans lesquelles  $\nu_t$  et  $a_t$  sont respectivement la viscosité turbulente et la diffusivité thermique turbulente, toutes deux fonctions de  $z$  :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \quad (2.8a)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (2.8b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \quad (2.8c)$$

### ◆ *Conditions aux limites*

! *Les conditions aux limites dynamiques* sont les conditions classiques :

\*\* au sol :

- $z = 0$  ;  $U = 0$

- la rugosité  $\varepsilon$  (distincte du paramètre de rugosité  $l_0$ , § 2.1.2), dont la détermination est assez délicate. On trouvera un résumé des procédures utilisées dans [Ménégoz, 2004].

\*\* à la lisière de la couche limite :

- $z = z_\infty$  ;  $U = U_\infty$  (vent météo)

!! Les conditions aux limites thermiques sont en général :

\*\* au sol : une condition mixte qui comprend un flux radiatif, un flux convectif et un flux conductif dans le sol. En ne considérant que le flux convectif  $\varphi_p$ , celui-ci s'écrira :

$$\bullet \varphi_p = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = h (T_p - T_\infty) \quad (2.9)$$

$\lambda$  étant la conductivité thermique de l'air,  $T_p$  la température du sol et  $h$  le coefficient d'échange convectif.

\*\* à la lisière de la couche limite :

- $z = z_\infty$  ;  $T = T_\infty$

### 2.2.3. – BILAN D'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE EN CONVECTION MIXTE

Dans le cas turbulent, il faut revenir aux bases des diverses relations de bilans pour approcher la question de la stabilité. Le bilan qui nous servira de support sera celui d'énergie cinétique turbulente (FEMM. 3.50). Cependant, étant ici en convection mixte, il nous faut remonter un peu en arrière pour traiter correctement le terme de flottabilité.

Partons de l'équation de bilan pour les corrélations (FEMM , 3.46) :

$$\begin{aligned} \overline{\vec{V} \cdot \text{grad } c v_j} &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \text{grad } C} - \overline{c \vec{v} \cdot \text{grad } V_j} \\ &+ \overline{v_j q'_{lc}} - \frac{1}{\rho} \overline{c \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \\ &- (D_c + \nu) \overline{\text{grad } c \cdot \text{grad } v_j} \\ &+ D_c \overline{\text{div}(v_j \text{grad } c)} + \nu \overline{\text{div}(c \text{grad } v_j)} \\ &- \overline{\text{div } c v_j \vec{v}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec :  $p'$  fluctuation de pression ;  $q'_{lc}$  fluctuation de la source locale de  $C$ .

En toute rigueur, il serait plus habile d'écrire le terme de source interne :  $\overline{v_j q'_{jlc}}$  (avec sommation sur l'indice  $j$ ). En convection forcée,  $q'_{lc} = -\partial p' / \partial x_j$  (FEMM, Annexe 3.A.4.1 ♥). Mais en convection mixte, on doit y ajouter le terme de pesanteur, *du à la fluctuation  $p'$  de la masse volumique*, d'où en coordonnées  $(x, z)$  :

$$q'_{jlc} = \begin{cases} -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ -\frac{\partial p'}{\partial z} - g \rho' \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans (2.10), il faut donc remplacer  $\overline{v_j q'_{jIc}}$  par :

$$\overline{v_j q'_{jIc}} = -u \overline{\frac{\partial \rho'}{\partial x}} - w \overline{\frac{\partial \rho'}{\partial z}} - g \overline{w \rho'} \quad (2.12)$$

où  $u$  et  $w$  sont les fluctuations de vitesse selon les directions  $x$  et  $z$ .

Cette équation est d'abord appliquée à la quantité de mouvement (en faisant  $c = \rho v_k$ , FEMM, § 3.4.1.1 ♦), puis à l'énergie cinétique de turbulence  $k$  en faisant  $i = j$ . Rappelons en effet (FEMM, § 3.4.1.2) que :

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_j v_j} = \frac{1}{2} \overline{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad (2.13)$$

(avec sommation sur l'indice  $j$ ).

En convection mixte,  $z$  étant la direction verticale ascendante, le bilan d'énergie cinétique turbulente s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} k &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_j} - \frac{g}{\rho} \overline{w \rho'} \\ &\quad - \overline{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \overline{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p'} \\ &\quad + \nu \overline{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} k)} - \frac{1}{2} \overline{\text{div} v_j v_j \vec{v}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $\varepsilon = \nu \overline{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_j}$  (avec sommation sur l'indice  $j$ ) est la dissipation turbulente (FEMM, 3.52). On rappelle que  $\rho'$  est la fluctuation turbulente de masse volumique.

#### 2.2.4. – STABILITÉ DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE

Dans cette équation (2.14), nous nous intéresserons seulement aux deux premiers termes du membre de droite. En coordonnées cartésiennes, avec  $V_j = U$ ,  $v_j = u$  et  $\vec{v} = \{u, w\}$  nous aurons :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = - \overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u w} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{g}{\rho} \overline{w \rho'} + \text{autres termes} \quad (2.15a)$$

Si l'on admet que la turbulence est homogène (FEMM 3.4.5),  $\overline{u^2}$  et  $\overline{u w}$  sont du même ordre de grandeur. Comme les hypothèses de la couche limite impliquent que  $\partial U / \partial x \ll \partial U / \partial z$ , il reste :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = - \overline{u w} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{g}{\rho} \overline{w \rho'} + \text{autres termes} \quad (2.15b)$$

D'après la définition (FEMM 2.15a) de la dilatabilité  $\beta$  (rappelée plus haut dans la formule A 1.2), en linéarisant au voisinage d'une température  $T_0$  (donc en admettant  $\beta = cte$  dans ce voisinage), on a en régime stationnaire:

$$\rho - \rho_0 = - \rho_0 \beta (T - T_0) \quad (2.16a)$$

🎵 Dans cette opération, la température de référence  $T_0$  est soit la température mesurée à  $z_0 = 10m$ , comme pour la vitesse (voir § 2.2.2 ♣), soit la température adiabatique correspondant à une pression  $p_0 = 10^5 Pa$  (§ 1.1.3).

En régime turbulent, les fluctuations de  $\rho$  et de  $T$  étant respectivement  $\rho'$  et  $\theta$ , cette relation est remplacée par :

$$\rho + \rho' - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T + \theta - T_0) \quad (2.16b)$$

d'où, en soustrayant :

$$\rho' = -\rho_0 \beta \theta \cong -\rho \beta \theta \quad (2.16c)$$

Dans le cas des gaz,  $\beta = 1/T_0$ , et (2.15b) devient :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{g}{T_0} \overline{w\theta} + \text{autres termes} \quad (2.17)$$

Au chapitre 3 de FEMM, on a introduit la viscosité turbulente  $\nu_t$  (relations 3.28) et la diffusivité turbulente  $a_t$  (relation 3.39) qui s'écrivent, avec les présentes notations :

$$-\overline{uw} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.18a)$$

$$-\overline{w\theta} = a_t \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.18b)$$

d'où il vient enfin :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} a_t \frac{\partial T}{\partial z} + \text{autres termes} \quad (2.19)$$

Au second membre, le terme en  $\nu_t$  (positif) représente l'énergie mécanique produite par le cisaillement turbulent, tandis que le terme en  $a_t$  est l'énergie de flottabilité turbulente, qui peut être positive ou négative.

🎵 Les « autres termes » étant peu influencés par le gradient de température, on peut considérer que l'écoulement est **stable** si l'énergie mécanique de flottabilité contribue à diminuer la production totale d'énergie, ce qui est le cas avec un gradient local de température  $(\partial T / \partial z) > 0$ . A l'inverse, l'écoulement sera considéré comme **instable** si elle constitue une source d'énergie, c'est-à-dire avec  $(\partial T / \partial z) < 0$ .

Il est alors possible de caractériser le degré d'instabilité par le rapport de ces deux grandeurs ; c'est un nombre sans dimension, défini localement au point  $[x, z]$ , que nous appellerons « nombre de Richardson atmosphérique  $Ri_a$  » :

$$Ri_a = \frac{a_t}{\nu_t} \frac{g}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.20)$$

On reconnaît ici la présence du nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t = \nu_t / a_t$  (FEMM, 3.45), qui est sensiblement constant dans un certain nombre de cas classiques. Ainsi, dans une couche limite atmosphérique, les diffusivités turbulentes de quantité de mouvement et de chaleur sont très voisines, ce qui conduit à admettre :

$$\frac{v_t}{a_t} = Pr_t \cong 1 \quad (2.21)$$

de sorte que le nombre de Richardson atmosphérique se réduit à :

$$Ri_a = \frac{g}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.22)$$

Une nuance supplémentaire sera apportée à cette analyse en considérant dans (2.19) la somme des deux termes sources prédominants, sous la forme :

$$v_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} a_t \frac{\partial T}{\partial z} = v_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 (1 - Ri_a) \quad (2.23)$$

Il apparaît alors que cette production d'énergie mécanique est nulle lorsque  $Ri_a = 1$ , ce qui incite à introduire une distinction dans la stabilité, à savoir :

$$\begin{aligned} Ri_a > 1 & : \text{atmosphère très stable} \\ 0 \leq Ri_a \leq 1 & : \text{atmosphère stable} \\ Ri_a < 0 & : \text{atmosphère instable} \end{aligned} \quad (2.24)$$

#### 2.2.5. – ÉCHELLE DE LONGUEUR ASSOCIÉE AU CRITÈRE DE STABILITÉ

L'altitude à laquelle  $Ri_a = 1$  constitue un paramètre caractéristique que nous allons maintenant déterminer. On a donc dans ce cas  $\partial T / \partial z > 0$ , et d'après (2.22) :

$$\frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z} = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \quad (2.25)$$

△ Admettons que cette égalité soit satisfaite dans la zone logarithmique de la couche limite. Alors, le profil de vitesse s'écrit selon (FEMM, 5.26) :

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \text{Ln } \xi + 5 \quad (2.26)$$

Rappelons que :

- $K$  est la constante de Karman (généralement prise égale à 0,4)
- $U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$  est la vitesse de frottement
- $\xi = z U_\tau / \nu$  est l'ordonnée adimensionnée (se prononce « ksi »)

On peut donc exprimer le gradient vertical de vitesse :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \left( \frac{U_\tau}{K} \frac{1}{\xi} \right) \frac{U_\tau}{\nu}$$

soit :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_\tau}{K} \frac{1}{z} \quad (2.27)$$

De même, une expression du profil de température dans la zone logarithmique est donnée par (FEMM 5.27) :

$$T^+ = \frac{1}{K} Pr_t \ln \xi + ctes \quad (2.28a)$$

avec :

$$T^+ = \frac{\rho C_p U_\tau (T_p - T)}{\varphi_p} \quad (2.28b)$$

On conduit un calcul analogue au précédent pour obtenir le gradient vertical de température :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^+}{\partial z} &= \frac{dT^+}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{\xi} \frac{U_\tau}{v} = \frac{Pr_t}{K} \frac{v}{z U_\tau} \frac{U_\tau}{v} \\ \frac{\partial T^+}{\partial z} &= \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (2.29a)$$

et aussi, d'après (2.28b) :

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = - \frac{\rho C_p U_\tau}{\varphi_p} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.29b)$$

La réunion de (2.29a et b) donne le gradient cherché :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\tau} \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{z} \quad (2.30)$$

Les expressions (2.27) et (2.30) permettent de résoudre l'équation (2.25) : l'ordonnée  $z = L$  satisfaisant cette équation est telle que :

$$- \frac{g}{T_0} \frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\tau} \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{L} = \frac{U_\tau^2}{K^2} \frac{1}{L^2}$$

En admettant  $Pr_t = 1$  selon (2.21) il vient enfin :

$$L = - \frac{\rho C_p U_\tau^3 T_0}{K g \varphi_p} \quad (2.31)$$

Cette ordonnée  $L$ , appelée « *longueur de Monin-Obukhov* », se présente comme une échelle de longueur caractéristique de la stabilité atmosphérique.

On voit immédiatement que sa condition d'existence ( $L > 0$ ) est  $\varphi_p < 0$ , c'est-à-dire d'après (2.9) :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} > 0 \quad (2.32)$$

On observe également qu'elle est inversement proportionnelle à la valeur absolue du gradient de température au sol, et qu'elle tend vers l'infini quand  $\varphi_p \rightarrow 0$ .

Bien entendu, la condition  $Ri_a = 1$  (2.25) correspond à  $z/L = 1$ . Les conditions de stabilité et de forte stabilité s'expriment donc ainsi :

$0 < z/L \leq 1$  : atmosphère stable

$z/L > 1$  : atmosphère très stable

Donc, plus  $L$  est faible, plus vite on rencontre une situation de forte stabilité quand on s'élève.



🎵 Le calcul précédent a été effectué sans tenir compte de la rugosité du site. Mais on a montré (FEMM, 5.90) que la prise en compte de la rugosité se traduit par l'addition d'une constante dans les lois de vitesse et de température (2.26) et (2.28a), constante qui disparaît dans la suite du calcul, par l'effet des dérivations. La longueur de Monin-Obukhov ne dépend donc pas explicitement de la rugosité. Par contre, ses effets se font sentir dans la contrainte pariétale  $\tau_p$ , donc dans la vitesse de frottement  $U_\tau$ .

## 2.2.6. – CARACTÉRISATION DE LA STABILITÉ

♣ *L'hypothèse adiabatique* (§1.1) n'est généralement pas retenue pour la détermination du seuil d'instabilité dans un écoulement turbulent. En effet, elle implique une transformation suffisamment rapide pour se produire sans échange de chaleur. Mais, en présence de turbulence, les transferts étant sensiblement augmentés (la diffusivité turbulente  $a_t$  est beaucoup plus grande que la diffusivité moléculaire  $a$ , sauf dans la couche interne), cette hypothèse devient fragile.

Malgré tout, admettons un instant que les fluctuations turbulentes d'un gaz parfait obéissent à cette hypothèse, pour en évaluer l'impact sur la stabilité. Alors, la combinaison de la loi des gaz parfaits et de la loi de transformation isentropique conduit à la relation (1.6), qui s'écrit encore :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (2.33)$$

Une fluctuation  $\rho'$  de la masse volumique est associée à une fluctuation  $\theta$  de la température, d'où :

$$\frac{\rho + \rho'}{\rho_0} = \frac{(T + \theta)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{1}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} T^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\theta}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Linéarisons cette expression au moyen d'un développement limité au premier ordre ; on obtient en développant :

$$\rho + \rho' = \rho_0 \frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{T_0^{\gamma/(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\theta}{T}\right) = \rho_0 + \rho_0 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\theta}{T}$$

d'où l'on tire :

$$\rho' = \rho_0 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\theta}{T} \quad (2.34a)$$

Cette relation se substituerait à (2.16c), et on voit qu'elle conduirait à remplacer la dilatabilité  $\beta = 1/T$  par une « dilatabilité adiabatique »  $\beta_{ad}$  :

$$\beta_{ad} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{T} = 2,5 \frac{1}{T} \quad (2.34b)$$

donc à remplacer le nombre de Richardson atmosphérique (2.22) par :

$$Ri_{ad} = \frac{g}{(\gamma-1) T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.34c)$$

Pour une même valeur de ce paramètre, ceci conduirait à une diminution de  $\partial T / \partial z$  d'un facteur  $\gamma - 1 = 0,4$ , mais sans modifier le seuil d'instabilité, qui reste  $\partial T / \partial z = 0$ .

◆ D'autre part, différents auteurs écrivent le nombre de Richardson atmosphérique avec la température potentielle  $\Theta$  (1.42) à la place de  $T$ , sous la forme :

$$Ri_a = \frac{g}{T_0} \frac{\partial \Theta / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.35a)$$

Le raisonnement présenté par [Sutton] entraîne difficilement l'adhésion. Une autre option pour arriver à ce résultat consiste à remplacer  $T$  par  $\Theta$  dans les équations de la couche limite turbulente, mais elle soulève quelques difficultés que nous n'aborderons pas ici, à l'exception de l'une d'elles. Car dans certaines publications on rencontre en remplacement de (2.18b) la relation :

$$-\overline{w \Theta'} = a_t \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (2.35b)$$

où  $\Theta'$  est la fluctuation de  $\Theta$ . Mais dans les expressions (1.42b) ou (1.43c) de  $\Theta$ , on voit que la seule grandeur fluctuante est  $T$ , d'où il résulte que  $\overline{w \Theta'} = \overline{w \theta}$ , ce qui semble entraîner une contradiction avec (2.18b).



### 2.3. – Modèle unidimensionnel : écoulement de Couette turbulent

Les développements précédents font appel aux approximations classiques de la couche limite. Cependant, en micrométéorologie, on adopte parfois une simplification supplémentaire, dans laquelle on considère que les propriétés de l'écoulement sont indépendantes de  $x$  (ce que l'on appelle un écoulement établi). Le modèle est donc alors strictement unidimensionnel. Ceci rappelle l'écoulement de Couette laminaire (FEMM, § 6.2.1.1) et constitue le « *modèle de Couette turbulent* », déjà cité dans l'étude de la couche limite dynamique interne (FEMM, § 5.1.3.4).

Physiquement, cette hypothèse se justifie par le fait que l'*atmosphère libre* (§2.1.2♣) joue un rôle d'entraînement tout un imposant (au moins sur une certaine distance) une épaisseur constante à la couche limite atmosphérique.

Une conséquence immédiate, déduite de l'équation de continuité, est que dans ce type d'écoulement on a :

$$W = 0 \quad (2.36)$$

Le système précédent se réduit alors à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \\ 0 &= -g \rho [T(z)] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mais ici, ces équations ne s'appliquent pas seulement à la couche interne ; elles sont valides dans la totalité de la couche limite. De plus, il n'y a pas de paroi en  $z_\infty$ , donc pas de loi de paroi. Il en résulte que dans la couche externe, où  $v_t = a_t = cte$ , les profils des grandeurs moyennes  $U$  et  $T$  sont linéaires jusqu'en  $z_\infty$ .

♪♪ Cependant, dans un tel modèle, bien que la composante verticale de la vitesse soit nulle ( $W = 0$ ), la fluctuation verticale de vitesse n'est pas nulle :  $w \neq 0$ . Les relations (2.18) sont donc conservées, tandis que (2.19) se réduit à :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} = v_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} a_t \frac{\partial T}{\partial z} + \text{autres termes} \quad (2.38)$$

Ceci ne modifie pas les deux premiers termes du membre de droite. Le nombre de Richardson  $Ri_a$  (2.22) ainsi que les conditions de stabilité sont donc inchangés. Il en est de même pour la longueur de Monin-Obukhov (2.31).

## 2.4. – Stabilité de l'atmosphère et dispersion des effluents

Parmi les conséquences pratiques de la stabilité (ou de l'instabilité) de la couche limite atmosphérique, on retiendra particulièrement celle qui a trait à la dispersion des effluents issus de cheminées industrielles ou domestiques. Certes, le nombre des grandes cheminées est en diminution, et leurs rejets sont de plus en plus filtrés. Mais outre le fait qu'elles ont un aspect emblématique, il est intéressant d'observer leurs panaches en présence de vent, lorsque c'est possible, pour en déduire l'état de stabilité de l'atmosphère.

Rappelons que lorsque la couche limite atmosphérique est turbulente, elle est réputée stable si  $Ri_a > 0$ , et instable si  $Ri_a < 0$ . Quand elle est laminaire, ou en atmosphère calme, la condition de stabilité devient :  $(\partial T / \partial z) > (\partial T / \partial z)_{ad}$ . La neutralité est caractérisée par  $Ri_a = 0$ , ou par  $(\partial T / \partial z) = (\partial T / \partial z)_{ad}$  (voir aussi § 2.6).

### 2.4.1. – STRATIFICATION INSTABLE

La figure 2.3 illustre le cas où l'atmosphère est instable. Les fluctuations sont amplifiées, et le panache s'étale verticalement de façon irrégulière. Il peut être rabattu jusqu'au sol si la hauteur de la cheminée est insuffisante, entraînant des nuisances pour les habitants et l'environnement. Cette situation, qui se produit par exemple par ciel clair en présence d'un rayonnement solaire important, est évidemment défavorable.

### 2.4.2. – STRATIFICATION NEUTRE

Dans le cas d'une atmosphère neutre (fig. 2.4), les fluctuations ne sont ni amplifiées ni amorties, et on observe un évasement régulier du panache. Celui-ci peut éventuellement atteindre le sol si la hauteur de la cheminée est insuffisante.

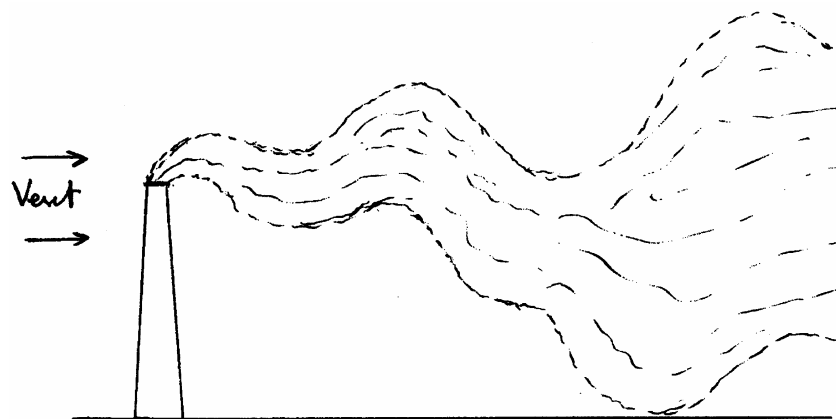


FIG. 2.3 – *Stratification instable*

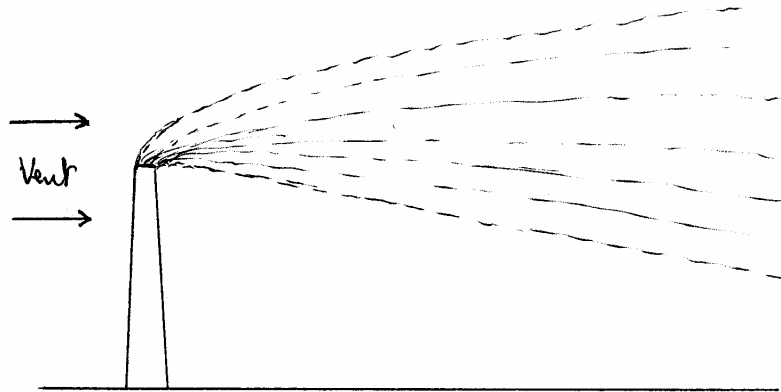


FIG. 2.4 – *Stratification neutre*

### 2.4.3. – STABILITÉ

Avec une atmosphère stable (fig. 2.5), les fluctuations verticales sont amorties, et le panache est très peu évasé. Cela peut se produire en particulier la nuit ou au lever du soleil. La situation est alors très favorable.

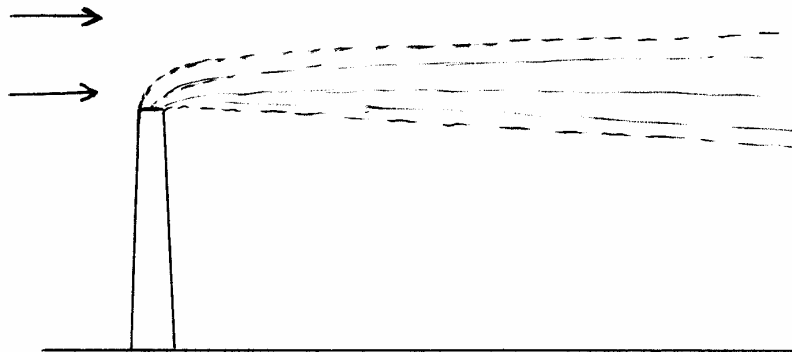


FIG. 2.5 – *Forte stabilité*

### 2.4.4. – PHÉNOMÈNE D'INVERSION

Une « *inversion* » se produit quand une couche d'air instable surmonte une couche stable (ou vice-versa).

#### ♣ *Inversion favorable*

Un exemple du premier cas est schématisé sur la figure 2.6., dans lequel la hauteur d'inversion (représentée par des tirets) se situe en dessous de l'orifice de la cheminée. L'atmosphère est instable ou neutre au-dessus, et stable près du sol.

Alors, le panache se développe verticalement dans la partie supérieure. Mais toute masse de gaz qui pénètre dans la zone stable est renvoyée dans la zone instable. Il n'y a donc pas de diffusion vers le sol.

Bien entendu, cette situation est favorable.

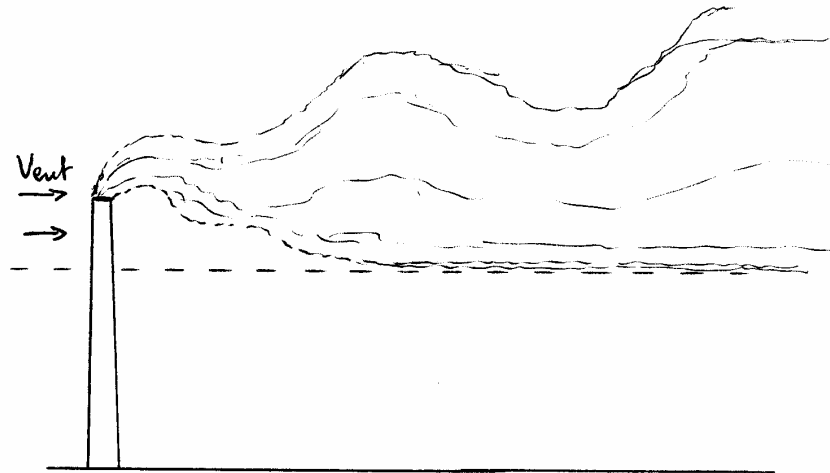


FIG. 2.6 – *Stabilité sous l'orifice de la cheminée ; instabilité au-dessus.*  
*Les tirets indiquent la hauteur d'inversion.*

◆ *Inversion défavorable : fumigation*

On a représenté sur la figure 2.6 un autre cas d'inversion : instabilité vers le sol, stabilité plus haut, la hauteur d'inversion étant au-dessus de l'orifice de la cheminée.

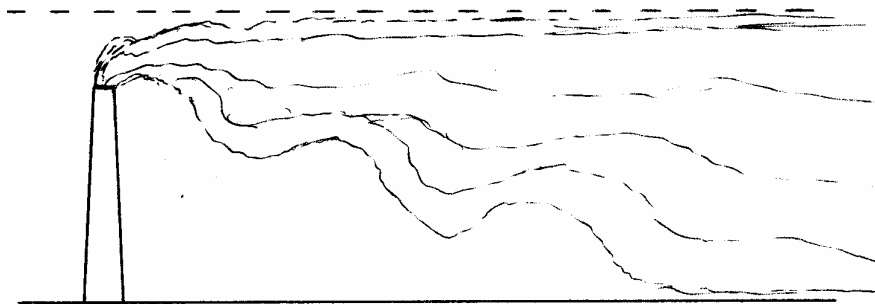


FIG. 2.7 – *Stabilité au-dessus de l'orifice de la cheminée ;*  
*instabilité en dessous.*

Dans cette situation, il n'y a pas de dispersion au-dessus de la ligne d'inversion. Toute la diffusion se fait vers le sol. Cette condition extrêmement défavorable, appelée « *fumigation* », peut être à l'origine de pollutions graves. De par leur relief, certains sites sont particulièrement propices à la fumigation (vallée de la Meuse en Belgique, villes de Mexico, de Los Angeles,...). Elle se produit aussi au-dessus d'un plan d'eau en automne ou en hiver (l'eau étant plus chaude que le sol environnant), ou au-dessus d'une source étendue de chaleur, comme une grande agglomération.

⚠ Dans les deux cas de figure précédents, on se gardera d'identifier la hauteur d'inversion et la longueur de Monin-Obukhov. En atmosphère turbulente, la première correspond à un nombre de Richardson atmosphérique  $Ri_a = 0$ , tandis que la seconde correspond à  $Ri_a = 1$ .

## 2.5. - Structures thermoconvectives

### 2.5.1. – DONNÉES EXPÉRIMENTALES

En l'absence de vent, ou par vent très faible, on peut observer dans la basse atmosphère des cellules thermoconvectives, provoquées par exemple par des alternances de « points chauds » et de « points froids » au sol. Un mouvement ascendant se produit au-dessus d'un point chaud, tandis qu'un mouvement descendant a lieu à la verticale d'un point froid (fig. 2.8). Par exemple, les lacs et les étangs constituent des points froids au printemps ou en été (ils se réchauffent lentement), et des points chauds en automne ou en hiver (ils se refroidissent lentement).

Les courants ascendants sont particulièrement appréciés des aéronefs sans moteur et de certains oiseaux. A leur sommet, si les conditions d'humidité et de température sont convenables, un nuage de type cumulus peut se former (§ 1.7).

D'autres causes sont aussi à l'origine de courants verticaux, par exemple le franchissement d'un obstacle par le vent.

Les cellules thermoconvectives de l'atmosphère sont de même nature que les *cellules de Bénard*, dans la convection dite « de Bénard – Rayleigh » : celle-ci se produit lorsqu'une couche fluide horizontale, initialement immobile, est progressivement chauffée par le bas. Il s'agit d'un autre aspect de la stabilité, qui va maintenant être brièvement analysé.

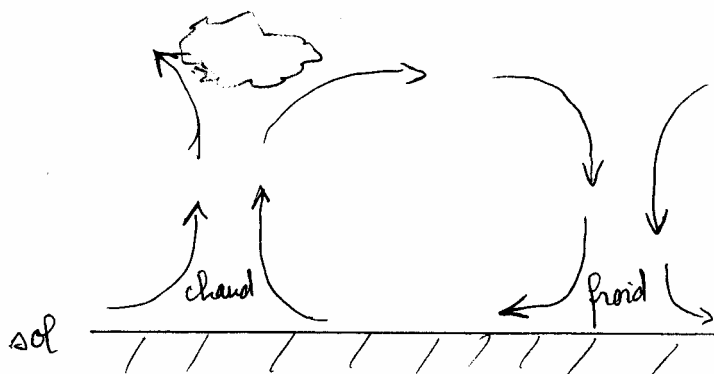


FIG. 2.8. – Structures thermoconvectives

### 2.5.2. – CALCUL APPROCHÉ DU SEUIL D'INSTABILITÉ THERMOCONVECTIVE

♣ Le mécanisme de l'instabilité thermoconvective sera examiné en régime laminaire bidimensionnel. Les équations de départ seront donc (2.4b) et (2.4c), mais écrites en régime variable, les différentes grandeurs étant maintenant dépendantes du temps (FEMM, §1.3.3), soit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.39b)$$

On considère que le fluide se trouve entre deux parois horizontales d'ordonnées  $z = 0$  et  $z = h$ , portées à des températures uniformes  $T_0$  et  $T_h$ . Il est supposé chauffé par le bas, d'où :  $T_0 > T_h$ . On pose :

$$\Delta T = T_0 - T_h > 0 \quad (2.39c)$$

On notera en premier lieu que le système (2.39) possède une solution purement diffusive (caractérisée par l'indice  $d$ ), sans mouvement du fluide, telle que :

$$\begin{aligned} U_d &= W_d = 0 \\ p_d &= cte - \rho_d g z \\ T_d &= T_0 + \frac{(T_h - T_0)z}{h} = T_0 - \frac{\Delta T}{h} z \end{aligned} \quad (2.40)$$

◆ L'expérience montre qu'un mouvement convectif se déclenche à partir d'une valeur critique  $\Delta T_c$  de l'écart de température  $\Delta T$ . On peut alors considérer que la température, la pression et la masse volumique subissent de petites perturbations, respectivement  $\theta$ ,  $p'$ ,  $\rho'$ , amorties en dessous du seuil critique, et amplifiées au dessus. Dans ces conditions, les trois grandeurs précédentes s'écrivent, au voisinage du seuil :

$$\begin{aligned} T &= T_d(z) + \theta(x, z, t) \\ p &= p_d(z) + p'(x, z, t) \\ \rho &= \rho_d(z) + \rho'(x, z, t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

De plus, toujours au voisinage du seuil, on admettra que les termes  $U (\partial W / \partial x)$  et  $W (\partial W / \partial z)$  sont des infiniment petits du second ordre. Alors l'équation (2.39a) se réduit à :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.42a)$$

Introduisons (2.40) et (2.41) dans (2.42a) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho_d + \rho'} \left( \frac{\partial p_d}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

🎵 On admettra également ici que le gradient fluctuant de pression est très petit devant le gradient stationnaire (hypothèse justifiée *a posteriori* par l'expérience), soit :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} \ll \frac{\partial p_d}{\partial z} \quad (2.42b)$$

et il reste :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho_d + \rho'} \frac{\partial p_d}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$



ou encore, avec (2.40), en remplaçant  $\frac{\partial p_d}{\partial z} = -\rho_d g$  :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g \frac{\rho_d + \rho' - \rho_d}{\rho_d + \rho'} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

et en négligeant  $\rho'$  au dénominateur :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g \frac{\rho'}{\rho_d} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.42c)$$

Les fluctuations de masse volumique et de température sont liées par la relation (2.16c) (avec ici  $\rho_0 = \rho_d$ ) :

$$\rho' = -\rho_0 \beta \theta \cong -\rho_d \beta \theta \quad (2.43)$$

de sorte que (2.42c) devient une équation aux petites perturbations :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \beta \theta g + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.44)$$

De la même façon, compte tenu de (2.40) et (2.41), l'équation d'énergie (1.39b) se transforme en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T_d + \theta)}{\partial t} + U \frac{\partial(T_d + \theta)}{\partial x} + W \frac{\partial(T_d + \theta)}{\partial z} \\ = a \left( \frac{\partial^2 T_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_d}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Au premier membre,  $T_d$  est indépendante de  $t$  et de  $x$ , tandis que  $U \partial \theta / \partial x$  et  $W \partial \theta / \partial z$  sont du second ordre, donc négligés. Au second membre,  $T_d$  est une fonction linéaire de  $z$ , son laplacien est donc nul. Si l'on prend en compte (2.40), l'équation d'énergie aux petites perturbations s'établit finalement ainsi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = W \frac{\Delta T}{h} + a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (2.45)$$

♥ L'observation des structures thermoconvectives suggère ensuite de rechercher pour la perturbation verticale  $W$  de la vitesse une fonction de la forme :

$$W(t, x, z) = f_I(t) \left( \cos \pi \frac{x}{h} \right) \left( \sin \pi \frac{z}{h} \right) \quad (2.46a)$$

Le terme en  $x$  traduit la périodicité des cellules selon la direction  $x$ , celles-ci ayant un diamètre de l'ordre de  $h$ .

Quant au terme en  $z$ , il exprime la périodicité selon la verticale du mouvement qui fera suite à la perturbation  $W$ . En effet, si l'on suit une particule fluide autour d'une cellule (fig. 2.8), on voit que sa vitesse verticale va passer par un extrêmu positif au milieu du courant ascendant ( $z = h/2$ ), puis par zéro au sommet ( $z = h$ ), par un extrêmu négatif dans le courant descendant, et à nouveau par zéro au voisinage du sol ( $z = 0$ ).

Enfin, le rôle de représenter l'évolution d'une fluctuation est dévolu à la fonction  $f_I(t)$ , pour laquelle on cherchera d'abord une forme exponentielle :

$$f_I(t) = W_0 e^{\sigma t} \quad (2.46b)$$

de sorte que  $\sigma < 0$  correspond à un amortissement, et  $\sigma > 0$  à une amplification.

Une hypothèse analogue sera faite sur la perturbation de température  $\theta$ , à savoir :

$$\theta(t, x, z) = f_2(t) \left( \cos \pi \frac{x}{h} \right) \left( \sin \pi \frac{z}{h} \right) \quad (2.47a)$$

avec le même paramètre d'amortissement  $\sigma$  que pour la vitesse, soit:

$$f_2(t) = \theta_0 e^{\sigma t} \quad (2.47b)$$

En remplaçant (2.46) et (2.47) dans l'équation (2.44), il vient :

$$W_0 \sigma e^{\sigma t} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} = g \beta \theta_0 e^{\sigma t} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} \\ + \nu W_0 e^{\sigma t} \left( -\frac{\pi^2}{h^2} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} - \frac{\pi^2}{h^2} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} \right)$$

et, en simplifiant :

$$W_0 \sigma = g \beta \theta_0 - 2 \nu W_0 \frac{\pi^2}{h^2} \quad (2.48a)$$

On obtient de la même façon, pour l'équation d'énergie (2.45) :

$$\theta_0 \sigma = W_0 \frac{\Delta T}{h} - 2 a \theta_0 \frac{\pi^2}{h^2} \quad (2.48b)$$

♠ Ces deux équations constituent un système homogène en  $W_0$  et  $\theta_0$ . Elles doivent satisfaire à une condition de compatibilité que l'on obtient en éliminant ces deux paramètres (par exemple en tirant  $\theta_0$  de la seconde équation pour le reporter dans la première, et en simplifiant), et qui a pour expression :

$$\left( 2 \nu \frac{\pi^2}{h^2} + \sigma \right) \left( 2 a \frac{\pi^2}{h^2} + \sigma \right) = g \beta \frac{\Delta T}{h}$$

L'écart de température critique  $\Delta T_c$  qui marque la limite entre l'état diffusif (amortissement,  $\sigma < 0$ ) et l'état convectif (amplification,  $\sigma > 0$ ) correspond à  $\sigma = 0$ , soit en isolant le coefficient numérique :

$$\frac{g \beta \Delta T_c h^3}{\nu a} = 4 \pi^4 \quad (2.49)$$

On appelle « nombre de Rayleigh », et on note  $Ra$  le groupement sans dimension :

$$\boxed{\frac{g \beta \Delta T h^3}{\nu a} = Ra} \quad (2.50)$$

Le seuil de déclenchement de l'instabilité thermoconvective est donc caractérisé par une valeur critique  $Ra_c$  de ce nombre de Rayleigh :

$$Ra_c = 4\pi^4 \cong 390 \quad (2.51)$$

### 2.5.3. – COMMENTAIRES

♣ En fait, la valeur numérique de  $Ra_c$  dépend beaucoup des conditions aux limites et de certaines approximations. Par exemple, en  $z = 0$  et  $z = h$ , on peut choisir des conditions de frontière libre, décrites par  $W = 0$  et  $\theta = 0$ . C'est ce qui a été fait implicitement dans le paragraphe précédent, où ces conditions satisfont les hypothèses (2.46) et (2.47).

Mais on peut aussi considérer que la couche fluide est confinée entre deux parois matérielles, ce qui entraîne :

$$W = \partial W / \partial z = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = h$$

et il faut alors modifier (2.46a) pour respecter cette condition. D'autres conditions aux limites sont également envisageables.

D'autre part, les expressions (2.46) et (2.47) de  $W$  et de  $\theta$  ont été construites en considérant des cellules convectives strictement cylindriques. Dans la réalité, leur forme est un peu différente, ressemblant plutôt à des carrés aux angles arrondis. La différence intervient alors dans les termes trigonométriques, où  $\pi x/h$  et  $\pi z/h$  doivent être remplacés par des fonctions adaptées  $k_1 x$  et  $k_2 z$ .

Signalons que dans le cas particulier de deux parois rigides, les résultats d'expériences réalisées avec des liquides donnent pour le nombre de Rayleigh critique la valeur :

$$Ra_c = 1708 \quad (2.52)$$

♪♪ Quoi qu'il en soit, l'essentiel n'est pas ici la valeur précise du nombre de Rayleigh critique, mais bien plutôt son existence en tant que *critère de stabilité*.

◆ Le nombre de Rayleigh a déjà été introduit dans un autre cadre (FEMM, § 2.5.3.3), celui de la similitude, en notant que :

$$Ra = Gr Pr \quad (2.53)$$

♪♪ Nous avons alors insisté sur le fait que  $Ra$  n'est pas un critère de similitude. Il est pourtant souvent utilisé pour caractériser la transition laminaire-turbulent, alors que ce rôle devrait être réservé à  $Gr$  (PTC, § 5.4.2.3), ou éventuellement au nombre de Boussinesq (Kays et Crawford, 1993, p.408).

La véritable nature du nombre de Rayleigh se révèle donc dans l'analyse précédente, comme *critère de stabilité thermoconvective*. Son caractère adimensionnel n'en fait pas pour autant un critère de similitude.

### 2.5.4. – APPLICATION A L'ATMOSPHERE

♣ Dans le cas de l'atmosphère, les conditions aux limites correspondent plutôt à la présence d'une frontière rigide (le sol) et d'une frontière libre (atmosphère libre au dessus de la zone convective, § 2.1.2.♣). Le calcul donne alors comme valeur critique :

$$Ra_c \cong 1101 \quad (2.54)$$

mais vu la multiplicité des paramètres en jeu, cette valeur n'est qu'indicative, d'autant plus que l'étude a été effectuée en géométrie bidimensionnelle. Dans la réalité, la structure de l'écoulement est tridimensionnelle, ce qui affecte aussi la valeur numérique de  $Ra_c$ .

◆ Pour l'air, la dilatabilité est déduite de la loi des gaz parfaits :  $\beta = 1/T$  (Annexe 1.2).

Voyons à partir de quel écart  $\Delta T_c$  un mouvement de convection naturelle peut survenir dans une couche de  $100\text{ m}$  au-dessus du sol, à la température ambiante. On a donc :

$$h = 100\text{ m} ; \quad T = 290\text{ K} ; \quad \beta = 1/T = 3,45 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$$

$$\nu = 1,57 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s} ; \quad a = 2,22 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$$

En se basant sur la valeur critique (2.54) du nombre de Rayleigh, on trouve une valeur de  $\Delta T_c$  extrêmement faible (de l'ordre de  $10^{-11}\text{ K}$ ). Autrement dit, des structures thermoconvectives peuvent se former dès que le gradient de température  $dT/dz$  devient négatif (sol plus chaud que l'air). Ceci provient de l'échelle de longueur  $h$  considérée (qui intervient avec l'exposant 3 dans  $Ra$ ). On obtiendrait un seuil très différent avec une couche d'air de quelques centimètres seulement.

♥ *L'hypothèse isentropique* (§ 1.1) n'est pas compatible avec le mécanisme qui donne naissance aux cellules de Bénard-Rayleigh. Elle suppose en effet une évolution suffisamment rapide pour être adiabatique, c'est-à-dire sans échange de chaleur. Dans la théorie précédente, au contraire, les évolutions sont lentes et la diffusion thermique joue pleinement son rôle dans l'équation d'énergie, ce qui explique la présence de la diffusivité  $a$  dans le nombre de Rayleigh.

## 2.6. – Panorama des critères de stabilité

Plusieurs critères de stabilité ont été présentés dans les paragraphes précédents. Il peut être utile de les récapituler et de les comparer.

♣ Un premier critère peut être qualifié de « *critère de stabilité archimédien* ». Il est basé sur le comportement d'une particule fluide en équilibre avec son environnement, qui se trouve déplacée accidentellement : selon l'évolution de son poids apparent, elle revient (stabilité) ou elle ne revient pas (instabilité) à sa position initiale. Dans un liquide, le seuil de stabilité associé au critère archimédien est :  $\partial T / \partial z = 0$  (§ 1.8). Dans l'atmosphère, le seuil de stabilité est :  $(\partial T / \partial z) = (\partial T / \partial z)_{ad}$  (§ 1.4 et 1.8).

Ce critère représente une propriété locale.

◆ Un second critère, de nature différente, concerne la stabilité de la couche limite atmosphérique turbulente. Il est basé sur la comparaison de l'énergie turbulente de cisaillement et de l'énergie turbulente de flottabilité, et s'exprime par le nombre de Richardson atmosphérique  $Ri_a$  (§ 2.2.4). Le seuil de stabilité est alors :  $Ri_a = 0$ , c'est-à-dire  $\partial T / \partial z = 0$ .

Il s'agit encore d'une propriété locale.

♥ Le troisième critère de stabilité caractérise l'apparition, sous l'effet d'un gradient de température vertical, de mouvements convectifs d'ensemble dans une couche fluide initialement immobile. Il s'exprime par le nombre de Rayleigh  $Ra$ , aussi bien pour les liquides que pour les gaz (§ 2.5.2). Le seuil d'instabilité correspond à une valeur critique  $Ra_c$  de ce paramètre, qui dépend des conditions expérimentales. Dans l'atmosphère il correspond à un gradient presque nul :  $\partial T / \partial z \cong 0$ .

Ce paramètre est un critère de stabilité globale, qui concerne l'ensemble de la couche fluide.

## 2.7. – Quand le vent rencontre des obstacles

Quelques considérations pratiques sur les effets du vent compléteront les développements plus théoriques qui précèdent.

### 2.7.1. – EFFORTS EXERCÉS SUR UN OBSTACLE

#### ♣ *Traînée*

La traînée d'un obstacle a été définie dans FEMM (§ 7.1.1). C'est la force totale exercée sur l'obstacle suivant la direction de l'écoulement. Elle est la résultante des forces de pression et des forces de frottement.

#### ◆ *Forces de pression*

La répartition des forces de pression présente souvent un intérêt particulier, spécialement dans le domaine de la construction. Plus précisément, le paramètre important est la « *pression effective*  $\Delta \bar{p}$  », différence entre la pression statique moyenne  $\bar{p}$  et la pression atmosphérique  $p_a$  :

$$\Delta \bar{p} = \bar{p} - p_a \quad (2.55a)$$

La surface de l'obstacle est localement en *surpression* avec  $\Delta \bar{p} > 0$ , et en *dépression* avec  $\Delta \bar{p} < 0$ .

Le critère de similitude relatif aux forces de pression est le « *coefficient de pression*  $C_p$  » (ou nombre d'Euler, FEMM 2.20a) :  $C_p / 2 = p^0 / \rho (V^0)^2$ . Dans le cas présent, la pression de référence  $p^0$  est la pression effective en un point donné de la surface de l'obstacle, la vitesse de référence  $V^0$  étant le vent moyen. On a donc :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_p = \frac{\Delta \bar{p}}{\rho U^2}} \quad (2.55b)$$

Ce paramètre doit être rapproché du coefficient de frottement  $C_f$  et du coefficient de traînée  $C_x$  (FEMM, ch. 5 à 7), qui sont construits d'une manière analogue. Mais il peut être positif ou négatif. La distribution de  $C_p$  sur l'enveloppe d'un bâtiment dépend évidemment de sa forme et de la direction du vent. Cependant, dans une grande majorité de cas, on a :

$$-0,7 < C_p < +0,7 \quad (2.55c)$$

On peut admettre aussi que, sauf pour des vents faibles, le coefficient de pression est indépendant du nombre de Reynolds, donc constant. Alors, avec une vitesse de vent donnée, la pression effective sera obtenue en renversant (2.55b) :

$$\Delta \bar{p} = \frac{1}{2} C_p \rho U^2 \quad (2.55d)$$

Ainsi, en un point où  $C_p = +0,5$ , avec un vent de  $36 \text{ km/h}$ , la surpression aura pour valeur, à la température ambiante ( $\rho \cong 1,2 \text{ kg/m}^3$ ) :

$$\Delta \bar{p} \cong \frac{1}{2} \times 0,5 \times 1,2 \times \left( \frac{36000}{3600} \right)^2 = 30 \text{ Pa} = 3 \text{ mmCE}$$

et si le vent passe à  $72 \text{ km/h}$  :

$$\Delta \bar{p} = 120 \text{ Pa} = 12 \text{ mmCE}$$

(pour l'expression de la pression en mètres de colonne d'eau ( $mCE$ ) ou millimètres de colonne d'eau ( $mmCE$ ), on se reportera à FEMM, définition 6.114a, ainsi qu'aux paragraphes 7.4.2 et 7.4.4).

🎵 La terminologie usuelle désigne par « *au vent* » le côté de l'obstacle qui est directement soumis à l'action du vent. Le côté opposé est dit « *sous le vent* ».

La figure 2.9 représente schématiquement la répartition de pression effective sur les murs d'une maison, dans le cas où la direction du vent s'écarte légèrement de la normale à la façade. On observe nettement deux zones localisées sur lesquelles la pression est maximale, l'une en surpression, l'autre en dépression. Mais surtout, il s'avère que seul, le côté au vent est en surpression. Les trois autres murs sont en dépression.

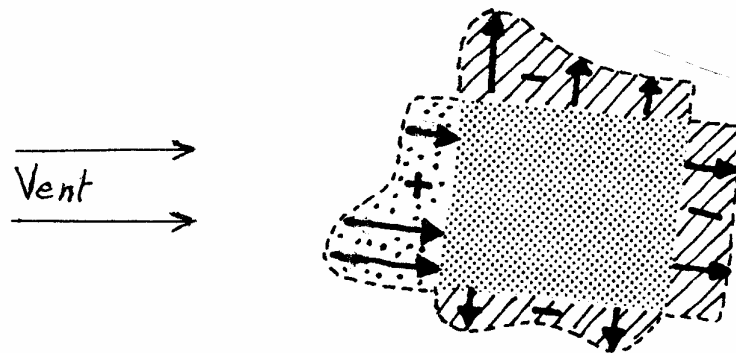


FIG. 2.9 – Répartition de pression sur les murs d'une maison.

La figure 2.10 complète la précédente en procurant un ordre de grandeur des coefficients de pression sur une maison rectangulaire à toit en double pente ( $22^\circ 30'$ ), soumise à un vent d'incidence normale. Les données numériques proviennent d'essais en soufflerie réalisés au CSTB de Nantes (J. Gandemer & coll.). Il est à noter qu'elles présentent une très légère dissymétrie, mais celle-ci rentre dans la marge d'incertitude expérimentale.

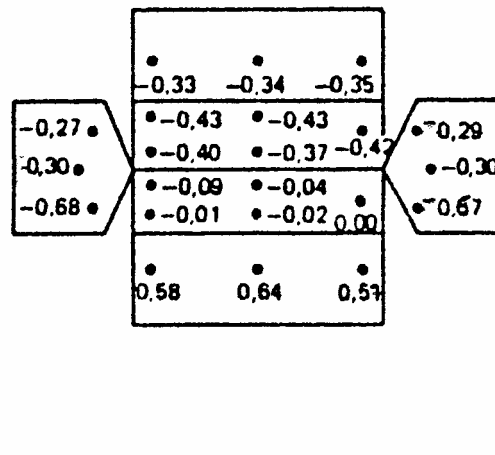


FIG. 2.10 – Coefficients de pression sur les parois extérieures d'une maison. Surface développée : à droite et à gauche, pignons ; en bas et en haut, façade au vent et façade sous le vent ; au centre, les deux pans du toit.

On retiendra de ces deux figures un élément essentiel : c'est que la plus grande partie de la surface d'un bâtiment se trouve en dépression. Même la face au vent d'une toiture est dans cette situation tant que sa pente est inférieure à  $30^\circ$  environ. En particulier, une toiture terrasse est toujours en dépression.

💡 Une conséquence est que, lorsque les tuiles d'un toit s'envolent sous l'effet d'un vent violent, dans la majorité des cas, ce sont les tuiles du côté sous le vent qui sont aspirées par la dépression (Annexe 2.1) (une interprétation hâtive serait d'attribuer le phénomène à l'air qui s'infiltrerait sous les tuiles du côté au vent pour les soulever, mais il n'en est rien).

D'ailleurs, dans certaines régions du monde, lorsque survient un cyclone tropical, les habitants maintiennent une porte ou une fenêtre ouverte du côté sous le vent. La dépression s'applique alors à l'intérieur du bâtiment, ce qui diminue d'autant la dépression exercée sur le toit. Par exemple, avec les données de la figure 2.10, le coefficient de pression maximal appliqué à la pente sous le vent passe de  $-0,43$  à  $\{-0,43 - (-0,34)\} = -0,09$ . Cependant, l'effort exercé sur la façade au vent est amplifié, puisque la force due à la surpression extérieure va alors s'ajouter à la force due à la dépression intérieure.

### ♥ Rafales de vent

Les désordres provoqués par le vent sur les constructions sont plus souvent dus aux effets de la turbulence qu'à ceux de la vitesse moyenne, et en particulier aux effets des grosses structures turbulentes atmosphériques, communément appelées « rafales de vent ».

Il est utile de revenir sur la notion d'intensité globale de turbulence (FEMM, § 3.4.5), définie par :

$$I = \frac{\sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}}}{|\vec{V}|} \quad (2.56a)$$

Avec des vents moyens, la turbulence est relativement homogène, de sorte que :

$$\overline{u^2} \cong \overline{v^2} \cong \overline{w^2} \quad (2.56b)$$

Par contre, les rafales de vent sont plus directionnelles (même si elles s'accompagnent d'un moment cinétique important), et on admettra qu'elles s'appliquent essentiellement dans la direction  $x$  du vent. C'est donc plutôt le « *taux de turbulence* » dans la direction  $x$  (FEMM, 3.82c) qui devra être pris en compte, soit ici :

$$I_x = \frac{\sqrt{\overline{u^2}}}{U} \quad (2.57)$$

Partant de (2.55d), si l'on admet que  $C_p$  est constant, la pression instantanée  $\Delta p(t)$  due à une rafale sera donc reliée à la vitesse instantanée  $U(t)$  par :

$$\Delta p(t) = \frac{1}{2} C_p \rho [U(t)]^2 \quad (2.58)$$

Le problème pratique consiste à présent à évaluer la vitesse  $U(t)$  au passage d'une rafale. La variance  $\overline{u^2}$  n'est qu'une information partielle, puisque c'est une moyenne quadratique des fluctuations. Or, ce sont les pointes de vitesse qui doivent être prises en compte pour le dimensionnement des structures et pour de nombreuses questions de sécurité (fig. 2.11).

L'évaluation des vitesses extrêmes (notées  $\hat{U}$ ) est forcément entachée d'incertitude, car il n'existe pas de relation générale qui les relie au vent moyen et au taux de turbulence. On se repose habituellement sur une expression empirique :

$$\hat{U} = U + n\sqrt{\overline{u^2}} \quad (2.59)$$

où  $n$  est un « *facteur de pointe* » qui dépend des caractéristiques du vent, et donc en grande partie de la région géographique concernée.

La pression effective correspondante est en conséquence :

$$\Delta \hat{p}(t) = \frac{1}{2} C_p \rho \hat{U}^2 \quad (2.60)$$

Pratiquement, dans (2.59), on peut admettre que :

$$1,5 < n < 3 \quad (2.61)$$

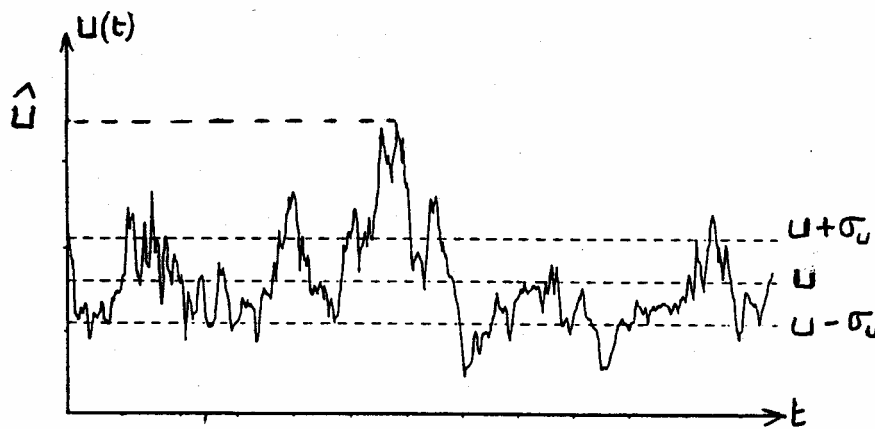


FIG. 2.11 – Vent moyen  $U$  ; écart-type de la turbulence  $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2}}$  ; vitesse de pointe  $\hat{U}$ .



## 2.7.2. – QUELQUES OBSTACLES PARTICULIERS

Les obstacles naturels ou artificiels au vent sont d'une grande diversité, et ils font l'objet d'ouvrages spécialisés. Nous en signalons seulement quelques-uns à titre d'exemples.

### ♣ *Élévation de terrain*

Le vent qui rencontre une élévation de terrain est soumis à une forme particulière d'effet venturi (FEMM, § 7.3.1.6). Tout se passe comme si la section de passage offerte à l'écoulement de l'air était rétrécie, d'où une augmentation de vitesse au sommet, accompagnée d'une baisse de pression (fig. 2.12). La partie haute du relief est donc en dépression. Cette propriété a parfois été utilisée, dans des pays très chauds, pour la ventilation naturelle d'édifices ou de maisons, en plaçant un orifice au point haut de la construction.

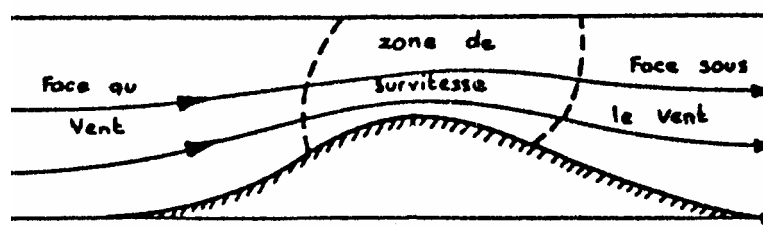


FIG. 2.12 – *Écoulement de l'air sur une élévation de terrain.*

### ◆ *Brise-vent artificiels*

Pour protéger du vent une zone de dimensions limitées, on pense parfois qu'un mur ou une paroi rigide est une solution efficace. En réalité, un écran plein ne constitue pas un bon brise-vent. Certes, il entraîne un ralentissement de la vitesse derrière l'écran, sur une distance de 2 à 3 fois sa hauteur ; mais en contrepartie, il provoque une importante sur vitesse à sa partie supérieure, et surtout il génère du côté sous le vent une zone tourbillonnaire, avec en particulier un rouleau d'axe horizontal, qui atténue l'effet de protection.

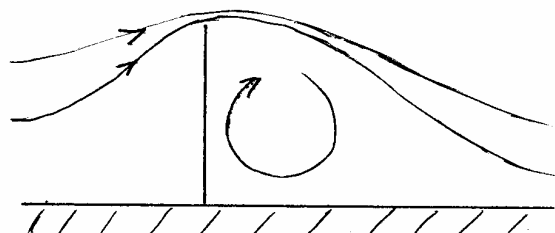


FIG. 2.13 – *Vent dévié par un écran plein*

Les *écrans ajourés*, présentant des vides régulièrement répartis, ont une efficacité très supérieure. La zone tourbillonnaire est destructurée par l'air qui traverse l'écran, dont la vitesse est sensiblement diminuée (fig. 2.14). En outre, la distance protégée est supérieure (5 à 6 fois la hauteur de l'écran). Un pourcentage de vides de 20% à 25% semble l'optimum.

⚠ Cependant, il faut prendre garde au fait que l'effort aérodynamique sur un écran ajouré est presque le même que sur un écran plein (les ouvertures se comportent comme des pertes de charge singulières, cf. FEMM § 6.7.1, 6.7.3 et 7.3.1.7). Les supports, les ancrages et l'écran doivent donc présenter la même résistance mécanique, faute de quoi on les retrouve pliés, cassés ou déchirés au premier gros coup de vent. Les toiles ajourées qui protègent beaucoup d'échafaudages sont soumises aux mêmes règles, et elles sont souvent détériorées assez rapidement.

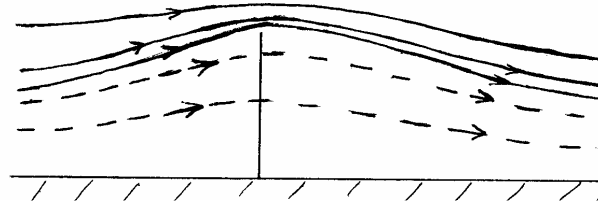


FIG. 2.14 – Protection au vent par un écran ajouré

♥ *Brise-vent végétaux*

Une bande boisée assez perméable, et large, constitue le brise-vent le plus efficace. Elle combine les effets de l'élévation de terrain et de l'écran ajouré (fig. 2.15).



FIG. 2.15 – Protection par une zone boisée.

*Chaque arbre représenté appartient à une rangée perpendiculaire au plan de la figure*

Une partie de l'air traverse la bande boisée, et elle se trouve ralentie à l'arrière, sans donner naissance à une zone tourbillonnaire. D'autre part, la dépression au sommet des arbres produit un écoulement ascendant qui diminue progressivement le débit traversant. La zone protégée peut atteindre 30 fois la hauteur de l'écran.

Les haies naturelles et les brise-vent plantés cherchent à approcher l'efficacité des bandes boisées (fig. 2.16). Une combinaison de feuillus et de cyprès, ou de roseaux, reste efficace sur l'ensemble de l'année.

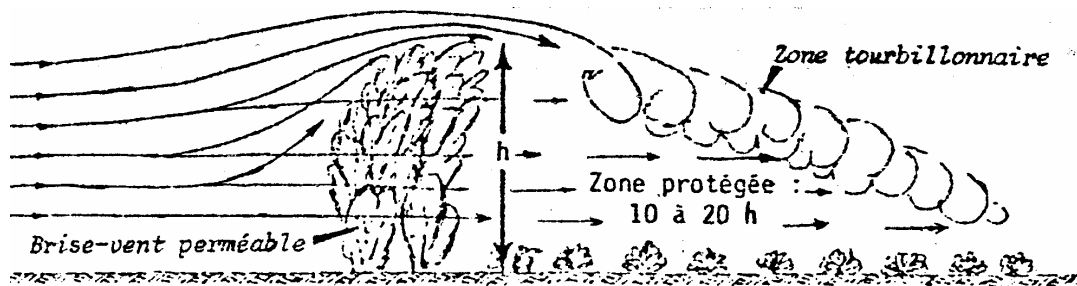


FIG. 2.16 – Protection par un brise-vent végétal

## ANNEXE 2.1. – EXERCICE : Des tuiles dans le vent

Un toit à deux pentes, couvert de tuiles mécaniques, est soumis à un vent moyen  $U$  d'incidence normale.

Les pentes sont de  $20^\circ$  ; le coefficient de pression maximal du côté sous le vent est :  $C_p = -0,42$ . Les tuiles mécaniques normalisées ont une masse  $M = 4 \text{ kg}$ , et une surface  $S = 0,105 \text{ m}^2$ . Le taux de turbulence dans la direction du vent est  $I_x = 22\%$ , et le facteur de pointe  $n = 2,5$ . On prendra comme masse volumique de l'air  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ .

*Question :*

A partir de quel vent moyen les tuiles risquent-elles de commencer à s'envoler ?  
Quelle est la vitesse de pointe correspondante ?

*Solution :*

1) Pour le soulèvement d'une tuile, la vitesse à prendre en compte est la vitesse de pointe (2.59) :

$$\hat{U} = U + n \sqrt{u^2}$$

On donne :  $I_x = \frac{\sqrt{u^2}}{U} = 0,22$ , d'où avec  $n = 2,5$  :

$$\hat{U} = U + 2,5 \times 0,22 U$$

$$\hat{U} = 1,55 U$$

2) La force normale  $F$  exercée sur une tuile par une rafale est donnée par (2.60) :

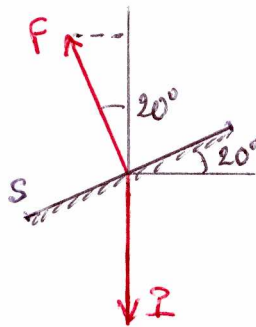
$$F = \Delta\hat{p} S = \frac{1}{2} C_p S \rho \hat{U}^2$$

$$F = \frac{1}{2} \times 0,42 \times 0,105 \times 1,25 \times (1,55 U)^2$$

$$F = 0,066 U^2$$

3) Le poids d'une tuile est :  $P = M g \cong 40 N$ . Compte tenu de la pente du toit (voir figure), elle est soulevée si :

$$F \cos 20^\circ > P$$



soit, sachant que  $\cos 20^\circ = 0,94$  :

$$0,94 \times 0,066 U^2 > 40$$

$$U > 25,3 \text{ m/s} \cong 91 \text{ km/h}$$

La vitesse de pointe correspondante est :

$$\hat{U} = 1,55 U \cong 140 \text{ km/h}$$

*Quand la jupe à Mireille  
Haut se troussa, haut se retroussa,  
Découvrant des merveilles :  
Quel joli vent s'est permis ça ?  
C'est le zéphyr,  
N'aurait pu suffir',  
C'est pas lui non plus,  
L'aquilon joufflu,  
C'est par pour autant  
L'autan.  
Non, mais c'est le plus fol  
Et le plus magistral  
De la bande à Eole,  
En un mot le mistral.  
Il me montra sa jambe,  
Aussi, reconnaissant,  
Je lui laisse emporter  
Mes tuiles en passant.*

Georges BRASSENS – *Le chapeau de Mireille*

## Bibliographie

- AICVF – *Climatologie*. Collection des guides de l'AICVF. Pyc Edition (1992)
- DAVENPORT A.G. – The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 87, p. 194-211 (1961)
- GANDEMER J. – Inconfort dû au vent aux abords des bâtiments : concepts aérodynamiques. *Cahiers du CSTB*, 1384, N°170 (1976)
- GROSSETETE C. – *Mécanique des fluides*. Ellipses (1997)
- KAIMAL J.C., FINNIGAN J.J. – *Atmospheric boundary layer flows*. Oxford Univ. Press (1994)
- KAVIANY M. - *Principles of convective heat transfer*. 2ème édition. Springer-Verlag (2001)
- KAYS W.M., CRAWFORD M.E. — *Convective heat and mass transfer*. 3ème édition. Mc Graw Hill (1993)
- MENEGOZ M. – *Etude de la couche limite atmosphérique sur le glacier de l'Antizana et estimation des flux turbulents*. Université J. Fourier, Grenoble (2004)
- MOREAU R. – *L'air et l'eau*. EDP-Sciences (2013)
- PADET J. (Coord.) – *Environnement microclimatique et habitat*. Actes du congrès de la Sté Française des Thermiciens, SFT 79. Reims (1979)
- PIELOU E.C. – *Fresh water*. The University of Chicago Press (1998)
- RIERA J.D., DAVENPORT A.G. – Wind effects on buildings and structures. *Jubileum Conf. on Wind effects and structures*, Porto Alegre, Brésil (1998)
- RUBIN H., ATKINSON J. – *Environmental fluid mechanics*. CRC Press (2001)
- SUTTON J. – *Micrometeorology*. Mc-Graw Hill (1953)
- TOKANO T. & al.- Methane drizzle on Titan. *Nature*, 442, p.432-435 (2006)

# Index alphabétique des matières

## A

Anticyclone, 1.4.  
Archimède, 1.2;  
Atmosphère neutre, 1.4; 1.8.3; 2.4.2.

## B

Brise-vent, 2.7.2.

## C

Coefficient de dilatation volumique, A 1.1  
Coefficient de pression, 2.7 ; A 2.1.  
Convection mixte laminaire, 2.2.1.  
Convection de Bénard-Rayleigh, 2.5  
Couche de mélange, 1.8.3;

## D

Degré hygrométrique, 1.7.  
Délestage d'un ballon, 1.9.4 ; 1.10.  
Dilatabilité, 1.8.2; A 1.1; A 1.2 ; 2.2.4 ; 2.5.4.

## E

Ecoulement de Couette turbulent, 2.3.♥  
Energie cinétique turbulente, 2.2.3

## G

Gradient adiabatique, 1.1.3; 1.4; 1.9 ; A 1.3 ; 2.2 ;  
2.4.

## I

Intensité de turbulence, 2.1 ; 2.7.1♥  
Inversion, 2.4.4

## L

Longueur de Monin-Obukhov, 2.2.5 ; 2.4.4

## N

Nombre de Prandtl turbulent, 2.2.4  
de Rayleigh, 2.5.2♠, 2.5.3, 2.5.4.  
de Richardson atmosphérique, 2.2.4 ; 2.3

## P

Poids apparent, 1.2 ; 1.8.1 ; 2.2.1♦ ; 1.9.2 ; 1.9.3 ;  
1.9.4.  
Pression sur un bâtiment, 2.7.1 ; A 2.1.

## R

Rafales de vent, 2.7.1♥ ; A 2.1  
Rugosité, 2.1.2 ; 2.2.5.

## S

Stabilité, 1.4; 1.8; 2.2.4; 2.4 ; 2.5.2  
d'un ballon, 1.10 ; A 1.3.  
Stratification volumétrique, A 1.2.

## T

Taux de turbulence, 2.7.1.♥ ; A 2.1.  
Température potentielle, 1.8.4 ; 2.3  
Thermocline, 1.9.3.  
Turbulence, 2.1.2; 2.2  
thermique, 2.2.1.♥ .

## V

Vent extrême, 2.7.1♥ ; A 2.1.  
Vent moyen, 2.1; A 2.1