

## Chapitre 8

# LES RÉGIMES VARIABLES DANS LES ÉCHANGEURS

*Les poètes trouvent d'abord  
et ne cherchent qu'après.*

Jean COCTEAU

Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent sur le dimensionnement des échangeurs thermiques s'applique à des régimes de fonctionnement permanents. Cependant, nombre de phénomènes ou de procédés impliquant des échangeurs sont soumis à des conditions aux limites variables dans le temps. La diversité des situations est telle que presque tous les types d'appareils sont concernés, aussi bien les échangeurs *stricto sensu* (monophasiques ou à changement de phase) que les capteurs solaires, les radiateurs de chauffage, et les réseaux au sens large du terme.

La prise en compte des régimes thermiques variables (appelés aussi « instationnaires ») fait surgir deux nécessités, qui sont d'ailleurs complémentaires : l'évaluation correcte des performances thermiques, et la prévision des paramètres de sortie. Leur maîtrise conditionne l'efficacité énergétique et la qualité des procédés (en particulier par le contrôle et la régulation), et aussi parfois la fiabilité des systèmes (notamment en ce qui concerne les contraintes thermiques).

Faute d'informations suffisantes, on a parfois tendance à extrapoler en régime instationnaire des résultats ou des modèles validés sur des échangeurs en régime permanent. Il arrive que cela marche à peu près, dans le cas de régimes lentement variables. C'est que, malgré leurs dimensions, les échangeurs présentent souvent une réaction assez rapide aux sollicitations extérieures : en effet, par rapport à des systèmes purement conductifs, la circulation des fluides a pour effet d'abaisser les temps caractéristiques, c'est-à-dire d'accélérer la réponse à une variation des conditions aux limites. Mais dans la plupart des cas cette démarche se révèle inadaptée, et la nécessité d'une modélisation instationnaire s'impose.

En restant fidèle à l'esprit de cet ouvrage, qui traite seulement des méthodes globales de calcul, on présente ici un modèle simple à deux paramètres, permettant de caractériser d'une façon approchée la réponse d'un échangeur à une variation de température d'entrée. Élaboré à l'origine pour des échangeurs bitubes, il se transpose assez bien aux autres modèles d'échangeurs, y compris les capteurs solaires, et permet de réaliser des prévisions et des simulations assez satisfaisantes.

## 8.1. – L'INADAPTATION DU CONCEPT DE COEFFICIENT D'ÉCHANGE AU CAS DES RÉGIMES VARIABLES

En régime permanent, pour calculer le flux de chaleur à une interface solide-fluide, on a généralement recours au coefficient d'échange  $h$  introduit au § 4.1.4.

Ce paramètre  $h$  se présente comme une conductance thermique, c'est-à-dire l'inverse d'une résistance. C'est bien là son grand avantage, puisque la résistance thermique totale entre deux fluides séparés par une paroi se calculera en additionnant les diverses résistances thermiques, dont les termes  $1/h$  de part et d'autre de la paroi (Ch. 6).

Mais il est bien clair que le concept de résistance thermique n'a de sens qu'en régime permanent, et le fait que nous soyons en présence de fluides en écoulement n'y change rien. Lorsque le régime thermique est instationnaire, on ne peut pas décrire l'évolution d'un champ de température au moyen de résistances pures, sauf si le temps caractéristique du système est petit par rapport à celui de l'observateur. En effet, entre un signal variable à la paroi et sa réponse dans le fluide (et vice-versa), il existe à la fois un décalage dans le temps et une déformation.

Des extensions de la notion de coefficient d'échange aux régimes variables ont bien été réalisées, mais elles sont intéressantes essentiellement dans des configurations relativement simples, et deviennent difficilement utilisables dans des systèmes comme les échangeurs, car les variations de  $h$  en fonction des températures sont trop complexes.

Certes, l'hypothèse  $h = cte$  est assez acceptable avec les échangeurs gaz-gaz (et même  $k = cte$  car l'influence de la paroi y est négligeable la plupart du temps), mais cela ne représente qu'une fraction des situations rencontrées dans la pratique.

Le problème qui se pose donc est de caractériser la réponse d'un échangeur à une sollicitation variable sans avoir recours aux coefficients d'échange pendant la phase transitoire.

## 8.2. – COMPORTEMENT D'UN ÉCHANGEUR TUBULAIRE EN RÉGIME VARIABLE

Par commodité, nous raisonnerons en pensant à un échangeur bitube, mais la démarche n'est en rien modifiée, du moins pour le moment, si l'on considère un échangeur à faisceau de tubes, à une ou plusieurs passes. Les autres géométries seront évoquées plus loin.

On envisage donc un appareil comprenant :

- une paroi (tube) intérieure : indice «  $i$  »
- une paroi (tube) annulaire : indice «  $a$  »
- un fluide chaud : indice «  $c$  »
- un fluide froid : indice «  $f$  »

Commençons par exprimer le bilan thermique intégral de l'échangeur en fonction du temps, pour un régime variable quelconque. Si l'on néglige la fonction de dissipation  $\Phi$ , le bilan local d'enthalpie s'écrit pour un fluide isochore (FEMM, § 1.3.5.2) :

$$\rho C_p \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \right\} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) \quad (8.1)$$

Nous obtiendrons le bilan global en intégrant cette équation successivement sur les quatre domaines qui constituent notre système.

### 8.2.1. – Bilan sur le fluide chaud

Soit  $D_c$  le volume occupé par le fluide chaud. En désignant par  $d\tau$  un élément de volume, l'intégration de (8.1) sur  $D_c$  donne :

$$\int_{D_c} \rho_c C_{pc} \frac{\partial T_c}{\partial t} d\tau + \int_{D_c} \rho_c C_{pc} \vec{V}_c \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T_c d\tau = \int_{D_c} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T_c) d\tau \quad (8.2)$$

ce que nous noterons en abrégé :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Calculons tour à tour ces trois intégrales.

#### ♣ Expression de $Q_1$

Introduisons la « *température volumique moyenne* » du fluide chaud dans l'échangeur, qui a pour expression :

$$\Theta_c = \frac{1}{D_c} \int_{D_c} T_c d\tau \quad (8.3)$$

de telle sorte que  $Q_1$  s'écrit, en considérant que  $\rho_c$  et  $C_{pc}$  sont constantes :

$$Q_1 = \rho_c C_{pc} D_c \frac{\partial \Theta_c}{\partial t} \quad (8.4)$$

Le produit des trois premiers termes représente la « *capacité calorifique totale* »  $C_c$  du fluide chaud :

$$C_c = \rho_c C_{pc} D_c \quad (8.5)$$

et  $Q_1$  prend la forme plus condensée :

$$Q_1 = C_c \frac{\partial \Theta_c}{\partial t} \quad (8.6)$$

#### ◆ Expression de $Q_2$

Sachant que le fluide est isochore, on a  $\text{div} \vec{V} = 0$  (FEMM, § 1.3.2.1), d'où :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \text{div} T \vec{V} - T \text{div} \vec{V} = \text{div} T \vec{V} \quad (8.7)$$

et, en vertu du théorème flux-divergence :

$$Q_2 = \rho_c C_{pc} \int_{D_c} \text{div} T_c \vec{V} d\tau = \rho_c C_{pc} \int_{S_c} T_c \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (8.8)$$

La surface  $S_c$  concernée est la surface frontière de  $D_c$ . Elle comprend :

- les parois qui enveloppent le fluide chaud, et sur lesquelles  $\vec{V} = 0$  (condition d'adhérence)
- les sections d'entrée et de sortie  $S_{ce}$  et  $S_{cs}$  pour lesquelles on a, compte tenu de l'orientation de la normale  $\vec{n}$  vers l'extérieur de  $D_c$  (§ 4.1.2) :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = -U \text{ sur } S_{ce} \text{ et } = U \text{ sur } S_{cs}$$

d'où :

$$Q_2 = \rho_c C_{pc} \left( - \int_{S_{ce}} T U dS + \int_{S_{cs}} T U dS \right) \quad (8.9)$$

Nous retrouvons ici la *température de mélange* (4.3) définie au chapitre 4 (à ne pas confondre avec  $\Theta$  définie ci-dessus par 8.3), de sorte que  $Q_2$  s'écrit encore :

$$Q_2 = \rho_c C_{pc} S_{cs} V_{cs} T_{cs} - \rho_c C_{pc} S_{ce} V_{ce} T_{ce}$$

et finalement, compte tenu de la conservation du débit :

$$Q_2 = q_{mc} C_{pc} (T_{cs} - T_{ce}) = q_{tc} (T_{cs} - T_{ce}) \quad (8.10)$$

### ♥ Expression de $Q_3$

En appliquant une nouvelle fois le théorème flux-divergence, il vient :

$$Q_3 = \int_{D_c} \text{div}(\lambda_c \overrightarrow{\text{grad}} T_c) d\tau = \int_{S_c} \lambda_c \overrightarrow{\text{grad}} T_c \cdot \vec{n} dS = -\Phi_c \quad (8.11)$$

et cette intégrale représente le flux de chaleur total qui traverse les parois enveloppant le fluide chaud (le flux conductif dans les sections d'entrée et de sortie est négligeable). Le signe  $-$  devant  $\Phi_c$  est lié à l'orientation de  $\vec{n}$  (paragraphe précédent).

♠ Au total, en reprenant (8.6), (8.10) et (8.11), l'équation de bilan (8.2) devient :

$$C_c \frac{\partial \Theta_c}{\partial t} + q_{tc} (T_{cs} - T_{ce}) = -\Phi_c \quad (8.12)$$

### 8.2.2. – Bilan d'ensemble

Le raisonnement précédent se transpose immédiatement au fluide froid, ainsi qu'aux parois intérieure et annulaire (en faisant  $\vec{V} = 0$ ). Si l'on désigne par  $\Phi_f$  le flux conductif qui franchit la paroi enveloppe du fluide froid, ainsi que par  $\Phi_i$  et  $\Phi_a$  les flux qui traversent les parois «  $i$  » et «  $a$  », on arrive au système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} C_c \frac{\partial \Theta_c}{\partial t} + q_{tc} (T_{cs} - T_{ce}) &= -\Phi_c \\ C_f \frac{\partial \Theta_f}{\partial t} + q_{tf} (T_{fs} - T_{fe}) &= -\Phi_f \\ C_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} &= -\Phi_i \\ C_a \frac{\partial \Theta_a}{\partial t} &= -\Phi_a \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

dans lequel  $C_f$ ,  $C_i$ ,  $C_a$  sont les capacités calorifiques totales du fluide froid et des parois «  $i$  » et «  $a$  », analogues à  $C_c$  (définition 8.5).

En admettant que la paroi extérieure de l'échangeur est parfaitement isolée, pour l'ensemble du système la somme algébrique des flux conductifs est nulle ; nous pouvons donc faire disparaître  $\Phi_c$ ,  $\Phi_f$ ,  $\Phi_i$ ,  $\Phi_a$ , qui sont inconnus, par l'addition membre à membre des quatre équations précédentes :

$$C_c \frac{\partial \Theta_c}{\partial t} + C_f \frac{\partial \Theta_f}{\partial t} + C_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} + C_a \frac{\partial \Theta_a}{\partial t} + q_{tc} (T_{cs} - T_{ce}) + q_{tf} (T_{fs} - T_{fe}) = 0 \quad (8.14)$$

Il est commode de définir une « température moyenne volumique »  $\Theta(t)$  de tout l'appareil en posant :

$$\Theta(t) = \frac{C_c \Theta_c + C_f \Theta_f + C_i \Theta_i + C_a \Theta_a}{C} \quad (8.15a)$$

où  $C$  est la *capacité calorifique totale* de l'échangeur :

$$C = C_c + C_f + C_i + C_a \quad (8.15b)$$

de sorte que l'équation de bilan global (8.14) devient :

$$C \frac{\partial \Theta}{\partial t} + q_{tc} (T_{cs} - T_{ce}) + q_{tf} (T_{fs} - T_{fe}) = 0 \quad (8.16)$$

les températures d'entrée et de sortie  $T_{cs}$  ... etc. étant évidemment dépendantes du temps.

### 8.3. – LE MODÈLE A DEUX PARAMÈTRES

Ayant à notre disposition la relation de bilan (8.16), nous nous fixons pour objectif d'établir un modèle phénoménologique simple, inspiré à la fois par l'expérience et l'analyse théorique, qui constituera une solution particulière de cette équation.

#### 8.3.1. – Réponse à un échelon de température

♣ Les équations (8.14) ou (8.16) sont valables quelles que soient les conditions de température et de débit à l'entrée de l'échangeur. Mais pour simplifier le problème, nous allons maintenant supposer les débits constants et considérer un régime transitoire (ou de relaxation) entre un régime permanent initial et un régime permanent final, qui est un cas particulier de régime variable. Plus précisément, nous analysons la réponse à un échelon de température sur  $T_{ce}$  ou  $T_{fe}$ . L'indice "0" caractérisera l'état initial, et l'indice "∞" l'état final. On se place donc dans le cadre formel suivant :

- à l'entrée

Régime permanent initial

$$t < 0 : T_{ce0} = cte ; T_{fe0} = cte$$

Régime transitoire

$$\begin{aligned} t \geq 0 : \text{soit } T_{ce} = T_{ce0} + \Delta T_{ce} = T_{ce\infty} ; T_{fe} = T_{fe0} \\ \text{soit } T_{fe} = T_{fe0} + \Delta T_{fe} = T_{fe\infty} ; T_{ce} = T_{ce0} \end{aligned} \quad (8.17a)$$

- en un point quelconque

$$\begin{aligned} t < 0 : T = T_0 = cte \\ t \geq 0 : T = T(t) \rightarrow T_\infty \text{ quand } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (8.17b)$$

- de plus

$$q_{tc} = cte ; q_{tf} = cte \quad \forall t$$

◆ L'analyse théorique montre que, sous certaines hypothèses,  $T(t)$  s'exprime par une somme d'exponentielles, dans lesquelles les constantes de temps sont indépendantes du point considéré, et sont donc caractéristiques de l'ensemble du système. Malheureusement, le calcul analytique de ces constantes de temps est très difficilement réalisable.

A la rigueur, on pourrait se contenter de la constante de temps fondamentale, qui est généralement accessible au moins de façon approchée ; mais comme elle ne donne aucune indication sur le début de la réponse et en particulier sur sa durée, on se trouve privé d'un élément d'information important, et même essentiel si l'on veut simuler la réponse à un signal d'entrée quelconque en décomposant ce signal en une somme d'échelons.

Cependant, l'expérience va venir ici à notre aide. Dans la majorité des cas, la réponse en température  $T(t)$  possède l'allure représentée par des croix sur la figure (8.1), et peut être schématisée ainsi :

$$\begin{cases} 0 \leq t < t_r & : T(t) = cte = T_0 \\ t \geq t_r & : \frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{t - t_r}{\tau}\right) \end{cases} \quad (8.18)$$

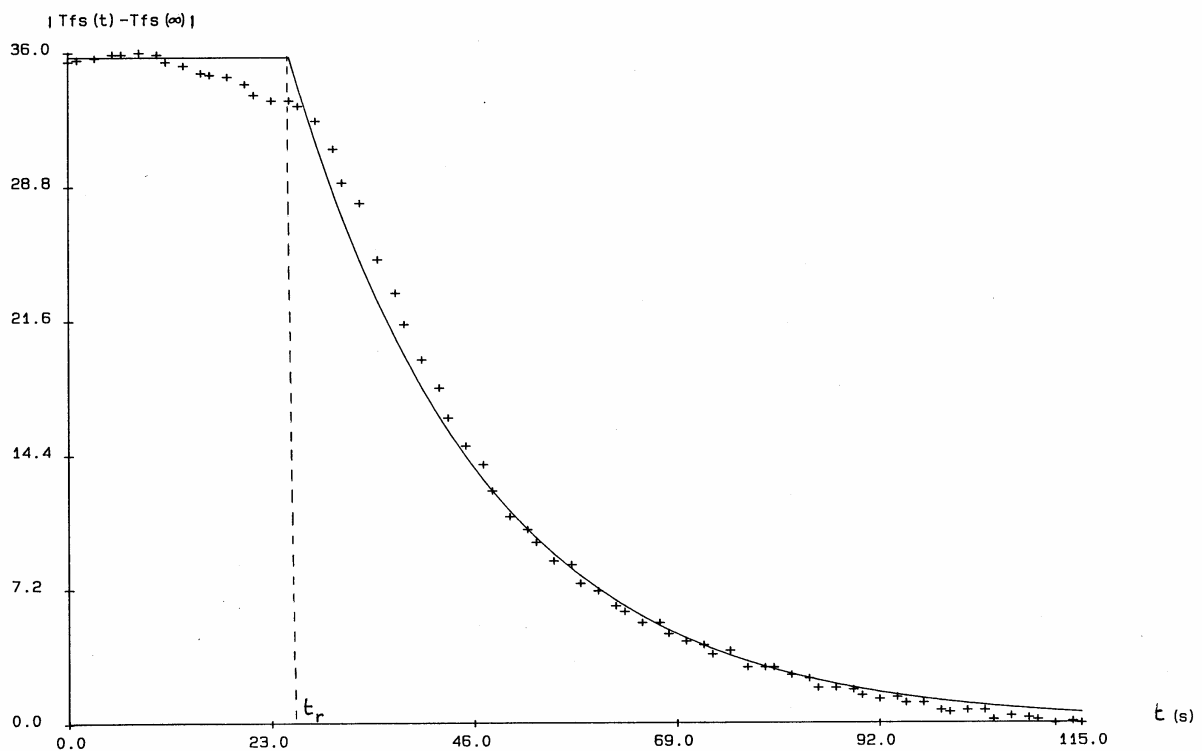


FIG. 8.1. — Échangeur bitube.

+ : exemple de réponse à un échelon de température ; \_\_\_ : réponse approchée selon (8.18)

Les hypothèses précédentes constituent l'assise d'un modèle à deux paramètres : un « temps de retard  $t_r$  » et une « constante de temps  $\tau$  » : on admet que jusqu'à l'instant  $t_r$  il ne se passe rien, la température restant constante, et que ensuite  $T(t)$  évolue selon une exponentielle pure.

♥ Pour rendre ce modèle exploitable il faut faire encore deux hypothèses sur  $t_r$  et  $\tau$  ; nous retiendrons les plus simples :

- 1) La constante de temps est unique pour l'ensemble de l'échangeur. Cette réflexion est suggérée par les arguments exposés au début du § ♦ .

- 2) Le temps de retard est le même pour les températures de sortie et pour la température moyenne  $\Theta(t)$  .

Alors, pour  $t > t_r$  , la réponse à un échelon de température est donnée par :

$$\frac{\Theta(t) - \Theta_\infty}{\Theta_0 - \Theta_\infty} = \exp\left(-\frac{t - t_r}{\tau}\right) \quad (8.19a)$$

$$\frac{T_{cs}(t) - T_{cs\infty}}{T_{cs0} - T_{cs\infty}} = \exp\left(-\frac{t - t_r}{\tau}\right) \quad (8.19b)$$

$$\frac{T_{fs}(t) - T_{fs\infty}}{T_{fs0} - T_{fs\infty}} = \exp\left(-\frac{t - t_r}{\tau}\right) \quad (8.19c)$$

### 8.3.2. – Expression de $\tau$

A partir des relations (8.19), nous sommes maintenant en mesure de déterminer analytiquement la constante de temps. Pour cela, reportons l'exponentielle de (8.19a) dans (8.19b , c), de manière à ce que les températures de sortie se présentent comme des fonctions de  $\Theta(t)$  . Il vient alors :

$$T_{cs}(t) = T_{cs\infty} + H_c [\Theta(t) - \Theta_\infty] \quad (8.20a)$$

$$T_{fs}(t) = T_{fs\infty} + H_f [\Theta(t) - \Theta_\infty] \quad (8.20b)$$

avec :

$$\boxed{H_c = \frac{T_{cs0} - T_{cs\infty}}{\Theta_0 - \Theta_\infty}} \quad \boxed{H_f = \frac{T_{fs0} - T_{fs\infty}}{\Theta_0 - \Theta_\infty}} \quad (8.21)$$

où l'on notera que  $H_c$  et  $H_f$  sont des constantes.

Ceci permet d'écrire l'équation de bilan (8.16) en y faisant figurer une seule variable temporelle, à savoir  $\Theta(t)$  :

$$C \frac{\partial \Theta}{\partial t} = q_{tc} [T_{cs\infty} + H_c (\Theta - \Theta_\infty) - T_{ce}] + q_{tf} [T_{fs\infty} + H_f (\Theta - \Theta_\infty) - T_{fe}] = 0$$

équation que l'on réarrange ainsi, en tenant compte du fait que  $\Theta_\infty = cte$  :

$$\begin{aligned} C \frac{\partial (\Theta - \Theta_\infty)}{\partial t} + (q_{tc} H_c + q_{tf} H_f) (\Theta - \Theta_\infty) \\ = q_{tc} (T_{ce} - T_{cs\infty}) + q_{tf} (T_{fe} - T_{fs\infty}) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  , on atteint le régime permanent final, pour lequel la puissance transférée  $\Phi_\infty$  s'écrit (relation 3.1) :

$$\Phi_\infty = q_{tc} (T_{ce} - T_{cs\infty}) = q_{tf} (T_{fs\infty} - T_{fe}) \quad (8.23)$$

et (8.22) se réduit donc à :

$$C \frac{\partial(\Theta - \Theta_{\infty})}{\partial t} + (q_{tc} H_c + q_{tf} H_f)(\Theta - \Theta_{\infty}) = 0 \quad (8.24)$$

En remplaçant  $\Theta - \Theta_{\infty}$  par sa formulation (8.19), on obtient après simplification la constante de temps  $\tau$  :

$$\tau = \frac{C}{q_{tc} H_c + q_{tf} H_f} \quad (8.25)$$

Cette expression a été établie par Pierson, et étendue par Azilinson au cas d'un échelon de débit. Elle s'adapte en particulier aux situations limites dans lesquelles  $q_{tc} = 0$  ou  $q_{tf} = 0$ , c'est-à-dire aux échangeurs à un seul fluide.

### 8.3.3. – Commentaires sur $\tau$ et $t_r$

Le calcul précédent appelle plusieurs remarques qui portent sur son déroulement, ses hypothèses et son degré de validité.

♣ Il faut noter d'abord que nous avons évité tout recours au coefficient  $h$  pendant le régime transitoire. Dans la formule (8.25),  $H_c$  et  $H_f$  ne dépendent que des régimes permanent initial et final, pour la caractérisation desquels l'intervention du coefficient de convection est parfaitement justifiée.

◆ L'élaboration de la formule de  $\tau$  (8.25) ne fait pas intervenir non plus la géométrie ou la configuration de l'échangeur : celles-ci ne seront à prendre en compte que plus tard, quand il faudra caractériser le régime permanent initial et le régime permanent final.

*Le raisonnement s'applique donc aussi par extension aux échangeurs à plaques et aux échangeurs compacts, à condition de fusionner les capacités calorifiques  $C_i$  et  $C_a$  lorsqu'il n'y a pas de distinction nette entre paroi enveloppe du fluide chaud et paroi enveloppe du fluide froid.*

♥ En ce qui concerne le paramètre  $\tau$  exprimé par (8.25), ***on doit bien insister sur le fait que  $\tau$  n'est pas la constante de temps fondamentale de l'échangeur, mais une constante de temps « théorique » associée au modèle (8.19)*** (encore que la différence entre les deux ne soit pas très importante numériquement). Dans l'ensemble, les résultats expérimentaux vérifient bien (8.25), sauf dans quelques cas qui seront précisés plus loin.

♠ A quoi ajouter que le temps de retard  $t_r$  n'a pas de véritable consistance physique : en l'introduisant, on sous-entend que, pendant la première phase de la réponse, les capacités calorifiques sont infinies, ce qui permet d'avoir  $T = cte$  quand  $t \leq t_r$ . La conséquence pratique est que ce paramètre restera par essence inaccessible au calcul analytique. Son évaluation ne peut reposer que sur l'expérience.



## 8.4. – CALCUL PRATIQUE DE $\tau$ POUR UN ÉCHANGEUR BITUBE

### 8.4.1. – Méthode

Dans l'expression (8.25) de  $\tau$ , les capacités thermiques  $C_j$  et les débits thermiques  $q_{tj}$  sont des données. Les grandeurs à déterminer sont  $H_c$  et  $H_f$ , c'est-à-dire compte tenu des définitions (8.21) :

- les températures de sortie initiales et finales
- les températures volumiques moyennes initiale  $\Theta_0$  et finale  $\Theta_\infty$  de l'échangeur (d'après 8.15a)

Le calcul des températures de sortie en régime permanent ne pose pas de problème si l'on connaît les caractéristiques globales de l'appareil. Les choses sont moins simples pour atteindre les températures moyennes volumiques des quatre domaines constituant l'échangeur, qui répondent à la définition (8.3).

Regardons par exemple le fluide chaud, et considérons pour simplifier le problème un *échangeur bitube rectiligne et de section constante* (ce qui est d'ailleurs le cas le plus fréquent). On peut écrire (8.3) sous la forme :

$$\Theta_c = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{1}{S_c} \int_{S_c} T dS \right) dx \quad (8.26)$$

ce qui fait apparaître la « *température moyenne géométrique* » du fluide chaud sur une section  $S_c$  à l'abscisse  $x$  :

$$\overline{T}_c(x) = \frac{1}{S_c} \int_{S_c} T dS \quad (8.27)$$

Ici, deux cas peuvent être distingués :

- si l'écoulement est turbulent, le profil de température sur  $S_c$  est relativement plat, et il est licite d'admettre que  $\overline{T}_c$  est voisine de la température de mélange  $T_c$ .

- si l'écoulement est laminaire, on doit tenir compte du champ de température dans la section pour évaluer  $\overline{T}_c$  puis  $\Theta_c$ , en régime permanent initial et final.

Il en va de même évidemment pour  $\Theta_f$ . Enfin, pour les parois, le problème ne se pose pas puisque le milieu est immobile, de sorte que  $\overline{T} = \Theta$ .

Nous allons illustrer cette démarche dans le cas le plus simple, où les deux écoulements sont turbulents.

### 8.4.2. – Exemple de calcul : échangeur bi-tube co-courant, écoulement turbulents, fluide chaud dans le tube intérieur, échelon de température à l'entrée du fluide chaud

Pour présenter le calcul de  $\tau$  nous retiendrons la catégorie co-courant, qui permet d'alléger un peu le formalisme, même si ce n'est pas la plus intéressante en pratique.

⚠ De ce point de vue d'ailleurs, il faut bien noter que cette disposition est certes la moins favorable en régime permanent, mais qu'il n'en est pas forcément de même en régime variable, si l'on s'attache plus à certaines caractéristiques de la réponse qu'aux performances

proprement dites : les critères d'optimisation peuvent obéir à des logiques différentes en régime permanent ou en régime variable, et ce point méritait d'être souligné.

Nous devons donc commencer par exprimer successivement les quatre températures moyennes volumiques  $\Theta_f$ ,  $\Theta_c$ ,  $\Theta_a$ ,  $\Theta_i$  en régime permanent.

♣ *Calcul de  $\Theta_c$  et  $\Theta_f$*

En régime permanent, la distribution des températures de mélange dans l'échangeur est donnée par (2.12) et (2.13) ; il vient après regroupement des termes et mise en facteur :

$$T_f(x) = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} - (T_{ce} - T_{fe}) \exp \left[ - \left( \frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S(x) \right] \right\} \quad (8.28a)$$

$$T_c(x) = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} (T_{ce} - T_{fe}) \exp \left[ - \left( \frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S(x) \right] \right\} \quad (8.28b)$$

Nous supposons que les deux écoulements sont turbulents, ce qui nous permet d'admettre  $T_c(x) \equiv \overline{T_c}(x)$ , et  $T_f(x) \equiv \overline{T_f}(x)$  (§ 8.4.1). En intégrant les relations (8.28) sur toute la surface d'échange  $\Sigma$  on obtient donc une valeur approchée des températures moyennes  $\Theta_f$  et  $\Theta_c$  :

$$\Theta_f = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} - (T_{ce} - T_{fe}) \frac{1 - \exp(-\gamma)}{\gamma} \right\} \quad (8.29a)$$

$$\Theta_c = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} (T_{ce} - T_{fe}) \frac{1 - \exp(-\gamma)}{\gamma} \right\} \quad (8.29b)$$

avec :

$$\gamma = \left( \frac{1}{q_{tf}} + \frac{1}{q_{tc}} \right) k \Sigma \quad (8.29c)$$

Il est intéressant et aisé de matérialiser  $E$  et  $NUT$  dans ces formules. On voit en effet en adaptant l'expression (3.16), § 3.4.1, que :

$$\gamma = (1 + R) NUT \quad (8.30a)$$

soit d'après (3.17) :

$$\frac{1 - \exp(-\gamma)}{\gamma} = \frac{E}{NUT} \quad (8.30b)$$

d'où les expressions de  $\Theta_f$  et  $\Theta_c$  en régime permanent :

$$\Theta_f = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} - (T_{ce} - T_{fe}) \frac{E}{NUT} \right\} \quad (8.31a)$$

$$\Theta_c = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} (T_{ce} - T_{fe}) \frac{E}{NUT} \right\} \quad (8.31b)$$

Parallèlement, nous tirons directement de (8.28) les températures de sortie dont nous avons besoin pour calculer  $H_c$  et  $H_f$  (formules 8.21). De (8.30 a et b) on sort :

$$\exp(-\gamma) = 1 - E(I + R) \quad (8.32)$$

et en reportant dans (8.28), avec  $S(x) = \Sigma = \text{surface totale d'échange}$ , il vient :

$$T_{fs} = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} - (T_{ce} - T_{fe}) [1 - E(I + R)] \right\} \quad (8.33a)$$

$$T_{cs} = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} (T_{ce} - T_{fe}) [1 - E(I + R)] \right\} \quad (8.33b)$$

#### ◆ Calcul de $\Theta_a$

Nous avons fait l'hypothèse que l'échangeur est isolé à sa paroi extérieure. En outre, nous considérons des fluides en écoulement turbulent, c'est-à-dire dont la température est relativement uniforme sur une section. *On peut donc admettre en première approximation que la température moyenne  $\Theta_a$  de la paroi annulaire est égale à la température volumique moyenne du fluide avec lequel elle est en contact.*

Choisissons par exemple le cas où le fluide froid circule dans l'espace annulaire. Nous aurons en nous reportant à (8.31a) :

$$\Theta_a = \Theta_f = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} - (T_{ce} - T_{fe}) \frac{E}{NUT} \right\} \quad (8.34)$$

#### ♥ Calcul de $\Theta_i$

Il reste à exprimer la température moyenne  $\Theta_i$  de la paroi intérieure. Là encore, puisque les écoulements sont turbulents, on admet dans les fluides que  $\bar{T} \cong T \text{ de mélange}$ . Ensuite, pour la paroi, il n'y a qu'une seule température moyenne sur une section : elle sera notée  $T_i(x)$ .

Conformément aux notations déjà utilisées, nous désignons par  $h_c$  et  $h_f$  les coefficients d'échange côté chaud et côté froid à la paroi intérieure. Enfin, nous négligeons la résistance thermique de la paroi, et nous admettons que les surfaces d'échange intérieure et extérieure sont sensiblement égales.

Alors, localement, la continuité du flux de chaleur transversal permet d'écrire, à une abscisse  $x$  :

$$h_c (\bar{T}_c(x) - T_i(x)) = h_f (T_i(x) - \bar{T}_f(x)) \quad (8.35a)$$

soit :

$$T_i(x) = \frac{h_c \bar{T}_c(x) + h_f \bar{T}_f(x)}{h_c + h_f} \quad (8.35b)$$

Une dernière approximation sera concédée en supposant que les coefficients d'échange dépendent peu de  $x$ . L'intégration de  $T_i(x)$  sur toute la longueur de l'échangeur donne finalement :

$$\Theta_i = \frac{h_c \Theta_c + h_f \Theta_f}{h_c + h_f} \quad (8.36a)$$

soit, compte tenu des formules (8.31) déjà établies pour  $\Theta_c$  et  $\Theta_f$  :

$$\Theta_i = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} + \frac{E}{NUT} \frac{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} (T_{ce} - T_{fe}) \right\} \quad (8.36b)$$

Si l'on veut raffiner un peu en tenant compte de la différence de surface entre le côté intérieur et le côté extérieur du tube (§ 6.2), la formule (8.36a) sera remplacée par :

$$\Theta_i = \frac{\Sigma_c h_c \Theta_c + \Sigma_f h_f \Theta_f}{\Sigma_c h_c + \Sigma_f h_f} \quad (8.36c)$$

♠ Nous disposons maintenant des quatre températures moyennes nécessaires pour exprimer la température moyenne globale  $\Theta$  de l'échangeur. En remplaçant dans (8.15), il vient :

$$\Theta = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc}} T_{fe} + \frac{E}{NUT} \frac{T_{ce} - T_{fe}}{C} \left( \frac{q_{tf}}{q_{tc}} C_c - C_f - C_a + \frac{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right) \right\} \quad (8.37)$$

Grâce à cette formule, on va donc pouvoir exprimer  $\Theta_0$  et  $\Theta_\infty$ , et calculer à partir de là les paramètres  $H_c$  et  $H_f$  (8.21) pour arriver à la constante de temps  $\tau$  (8.25).

En toute rigueur il faudrait considérer deux possibilités : ou bien les caractéristiques thermophysiques des fluides sont admises comme constantes pendant le régime transitoire (faible échelon de température, ou fluides peu thermodépendants), ou bien on doit tenir compte de leurs variations.

•• *Thermodépendance des fluides négligée*

Alors, les coefficients d'échange, ainsi que ( $E / NUT$ ), sont identiques au début et à la fin du régime transitoire. Les conditions initiales et finales étant caractérisées par  $T_{ce0}$ ,  $T_{ce\infty}$  (échelon sur le fluide chaud),  $T_{fe0} = T_{fe\infty}$  (température d'entrée froide constante), on constate que des simplifications s'opèrent au cours du calcul, et on obtient :

$$\tau = \frac{C + \frac{E}{NUT} \left\{ \frac{q_{tf}}{q_{tc}} C_c - C_f - C_a + \frac{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right\}}{q_{tc} + q_{tf}} \quad (8.38)$$

●● Avec prise en compte de la thermodépendance

Dans ce cas, il faut tenir compte du fait que  $h_{f0} \neq h_{f\infty}$  et  $h_{c0} \neq h_{c\infty}$ , d'où  $k_0 \neq k_\infty$ , et par conséquent  $(E/NUT)_0 \neq (E/NUT)_\infty$ , d'après (8.29c) et (8.30). L'expression de  $\tau$  est alors plus lourde, mais se manipule sans difficulté avec MATHEMATICA ou MATLAB.

## 8.5. – VALEURS DE $\tau$ POUR DIVERSES DISPOSITIONS

La trame du calcul présenté au paragraphe précédent laisse entrevoir la diversité des dispositions à envisager, chacune d'elles correspondant à une formule de  $\tau$  différente : écoulements laminaires ou turbulents, fluide chaud à l'intérieur ou à l'extérieur, échelon sur le fluide chaud ou sur le fluide froid, distribution co-courant ou à contre-courant. Nous donnons seulement ici un échantillon de résultats, en indiquant brièvement quels sont les points de raisonnement modifiés par rapport au § 8.4.2.

### 8.5.1. – Échangeur co-courant, écoulements laminaires, fluide chaud à l'intérieur, échelon sur le fluide chaud

Par rapport au cas des écoulements turbulents, la différence est que l'approximation « température de mélange  $\simeq$  température moyenne » n'est plus justifiée. Il en résulte en particulier que la température moyenne  $\Theta_a$  de la paroi extérieure n'est plus égale à  $\Theta_f$ , et doit être calculée comme la température  $\Theta_i$  de la paroi intérieure. On trouve :

$$\tau = \frac{l}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ C + \frac{E}{NUT} \left[ \frac{q_{tf}}{q_{tc}} C_c - C_f - \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \frac{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} \right) C_a + \frac{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right] \right\} \quad (8.39)$$

A noter que par rapport à (8.38), seul le coefficient de  $C_a$  est modifié.

### 8.5.2. – Échangeur à contre-courant, fluide chaud à l'intérieur, échelon sur le fluide chaud

Les distributions de températures (8.28) (valables en disposition co-courant) doivent être remplacées par les formules relatives au contre-courant, tirées de (2.17) et (2.18). On obtient tous calculs faits :

\* Si  $q_{t \min} = q_{tc}$

$$\tau = \frac{l}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ C (E - 1) + \frac{E}{NUT} \left( \frac{1}{R} C_c + C_f + \Xi_a C_a + \frac{\frac{1}{R} + \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right) \right\} \quad (8.40a)$$

où le coefficient  $\Xi_a$  (*ksi* majuscule) affecté à  $C_a$  vaut :

- écoulements turbulents :  $\Xi_a = 1$

$$\text{- écoulements laminaires : } \Xi_a = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{R} + \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} \quad (8.40b)$$

\* Si  $q_{t \min} = q_{tf}$

$$\tau = \frac{1}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ C (RE - 1) + \frac{E}{NUT} \left( RC_c + C_f + \Xi_a C_a + \frac{R + \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right) \right\} \quad (8.41a)$$

avec :

- écoulements turbulents :  $\Xi_a = 1$

$$\text{- écoulements laminaires : } \Xi_a = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \frac{R + \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} \quad (8.41b)$$

\* Si  $q_{tc} \cong q_{tf} = q_t$

L'utilisation de (8.40) et (8.41) peut être dangereuse du fait que dénominateur et numérateur tendent vers zéro.

Avec des écoulements turbulents, un calcul direct donne :

$$\tau = \frac{C_c \left( 1 + \frac{E}{NUT} \right) + C_f E + C_a E + C_i \left\{ E \frac{h_f}{h_f + h_c} + \left( 1 + \frac{E}{NUT} \right) \frac{h_c}{h_f + h_c} \right\}}{2 q_t \left( E + \frac{E}{NUT} \right)} \quad (8.42)$$

### 8.5.3. - Échangeur à contre-courant, fluide chaud à l'intérieur, échelon sur le fluide froid

Les conditions d'entrée sont dans le cas présent, pour  $t \geq 0$  :

$$T_{ce\infty} = T_{ce0} \quad (\text{température d'entrée chaude constante})$$

$$T_{fe\infty} = T_{fe0} + \Delta T_{fe} \quad (\text{échelon sur le fluide froid})$$

\* Si  $q_{t \min} = q_{tc}$

$$\tau = \frac{1}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ C (1 - RE) - \frac{RE}{NUT} \left( \frac{1}{R} C_c + C_f + C_a (1 + \Xi_a) + \frac{\frac{1}{R} + \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right) \right\} \quad (8.43)$$

où  $\Xi_a$  (rappel : prononcer *ksi*) est le même qu'en (8.40b).

\* Si  $q_{t \min} = q_{tf}$

$$\tau = \frac{1}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ C (1 - E) - \frac{E}{R NUT} \left( R C_c + C_f + C_a (1 + \Xi_a) + \frac{R + \frac{h_f}{h_c}}{1 + \frac{h_f}{h_c}} C_i \right) \right\} \quad (8.44)$$

où  $\Xi_a$  est donné cette fois par (8.41b).

\* Si  $q_{tc} \cong q_{tf} = q_t$ , et avec des écoulements turbulents :

$$\tau = \frac{C_c E + (C_f + C_a) \left( 1 + \frac{E}{NUT} \right) + C_i \left\{ E \frac{h_c}{h_c + h_f} + \left( 1 + \frac{E}{NUT} \right) \frac{h_f}{h_c + h_f} \right\}}{2 q_t \left( E + \frac{E}{NUT} \right)} \quad (8.45)$$

#### 8.5.4. – Cas du fluide chaud à l'extérieur

Quand le fluide chaud circule dans l'espace annulaire, la différence dans le calcul de  $\tau$  porte sur la température moyenne  $\Theta_a$  de la paroi extérieure (l'expression 8.36a de  $\Theta_i$  n'est pas changée quand on permute les indices  $c$  et  $f$ ) ; en effet, cette paroi est maintenant en contact avec le fluide chaud, et il faut donc adapter l'évaluation de  $\Theta_a$  à cette nouvelle situation. Si l'on considère toujours que la surface extérieure de l'échangeur est parfaitement isolée, les calculs sont tout à fait analogues aux précédents. Mais la valeur de  $\tau$  se trouve modifiée par le changement de position du fluide chaud, du fait que la capacité thermique  $C_a$  de la paroi intervient de façon différente.

#### 8.5.5. – Influence de l'isolation extérieure de l'échangeur

Tous les exemples précédents ont été analysés en considérant une isolation extérieure parfaite de l'échangeur. Si tel n'est pas le cas, il faut calculer la température moyenne  $\Theta_a$  de la paroi annulaire comme  $\Theta_i$  (§ 8.4.2. ♥), c'est-à-dire ici en tenant compte de la température ambiante et du coefficient d'échange côté extérieur. Les répercussions sur  $\tau$  sont plutôt modestes si le fluide chaud est à l'intérieur, mais peuvent être sensibles s'il circule dans l'espace annulaire. Dans ce dernier cas, on évitera d'utiliser les formules de  $\tau$  calculées avec une paroi isolée, car les divergences théorie-expérience sont parfois importantes.

## 8.6. – INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES

### 8.6.1. – Constante de temps des échangeurs à faisceau de tubes

Ainsi que nous venons de le voir, la détermination de  $\tau$  est relativement aisée avec les échangeurs bitubes, même si certains développements intermédiaires sont un peu lourds, en particulier en écoulement laminaire. Cependant, la théorie aurait une valeur essentiellement heuristique si elle restait limitée à ce type d'appareils.

La demande des utilisateurs porte en particulier sur les échangeurs à faisceau de tubes. Pour ceux-là comme pour les autres modèles, l'analyse développée reste valable jusqu'à la formule (8.25) incluse (expression générale de  $\tau$ ). C'est dans les champs de températures  $T_c(x)$ ,  $T_f(x)$  que les données géométriques interviennent.

Avec les échangeurs tubulaires on ne dispose pas d'expressions simples de ces deux paramètres, ce qui rend le calcul des températures moyennes  $\theta_c$ ,  $\theta_f$  beaucoup plus hasardeux. Heureusement, une évaluation approchée de la constante de temps peut être effectuée grâce à un critère d'équivalence entre échangeur bitube et échangeur tubulaire. Ce concept d'*échangeur bitube équivalent*, proposé par Azilinson et affiné par Henrion, conduit à rechercher quel est l'échangeur bitube (pour lequel on sait calculer  $\tau$ ) qui aura en régime variable la même réponse qu'un échangeur tubulaire donné.

Le meilleur *critère d'équivalence* paraît être le suivant. Comparé à l'échangeur tubulaire, l'échangeur bitube doit avoir :

- *mêmes capacités calorifiques totales  $C_c, C_f, C_a, C_i$  des quatre constituants*
- *même conductance globale  $K$  en régime permanent*

Géométriquement, un bitube est défini par cinq paramètres : diamètres intérieur et extérieur du tube central et du tube annulaire, et longueur. Les cinq conditions du critère d'équivalence permettent donc de les déterminer.

Le critère d'équivalence s'applique aussi assez correctement aux échangeurs à plaques.

### 8.6.2. – Constante de temps des capteurs solaires

Les capteurs solaires constituent une catégorie particulière d'échangeur à fluide unique. Le modèle de réponse  $\{\tau, t_r\}$  s'adapte bien aux capteurs solaires plans à eau. Les éléments nécessaires à leur calcul ont été donnés par Pierson [Solar Energy, 1990].

### 8.6.3. – Détermination du temps de retard $t_r$

Comme nous l'avons souligné en son temps (§ 8.3.3),  $t_r$  ne peut pas être le résultat d'un calcul au même titre que  $\tau$ . Il n'est accessible que par l'expérience. Cependant, sa détermination est réalisable assez correctement avec des moyens relativement simples en utilisant la « *méthode du double échelon* » [Lachi et al., 1997].

Elle consiste à réaliser à l'instant  $t = 0$  un échelon de température d'entrée, puis après un temps d'attente  $t_a$ , un second échelon de sens contraire. Conformément au modèle à deux paramètres, la réponse exponentielle à ce deuxième signal se manifeste au bout du temps



$t_a + t_r$  (fig. 8.2). Comme les réponses aux deux échelons successifs sont en opposition, on observe à l'instant  $t_a + t_r$  un point anguleux très net qui donne immédiatement  $t_r$ .

Cette méthode a le grand avantage de fournir des résultats corrects même lorsque le dispositif expérimental est assez rustique. Par exemple, si le deuxième échelon n'a pas la même amplitude que le premier, cela n'a aucune influence sur le résultat. En outre, du fait de la netteté du point anguleux, la mesure de  $t_r$  n'est pas trop altérée si les échelons sont imparfaits, ou si les relevés de température de sortie ne sont pas de la meilleure qualité. On doit seulement veiller, par tâtonnement, à ce que  $t_a$  ne soit ni trop petit ni trop grand par rapport à  $t_r$ .

Par contre, la mesure de  $\tau$  demande une procédure plus raffinée, dont le lecteur trouvera le détail dans les références bibliographiques [Azilinson, Guellal, Hadidi].

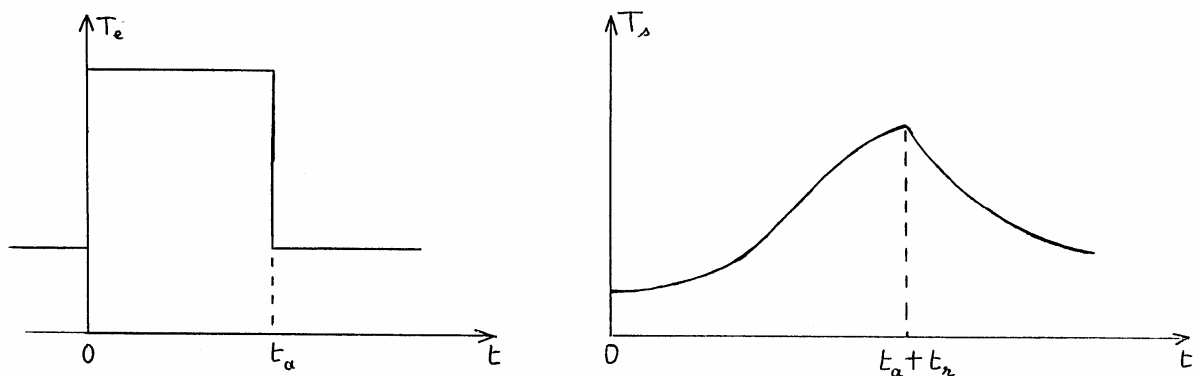


FIG. 8.2. – Méthode du double échelon pour la mesure du temps de retard  $t_r$ .

## 8.7. – RÉPONSE À UN ÉCHELON DE DÉBIT

Les variations de température d'entrée ne sont pas les seules responsables des régimes variables dans les échangeurs : les variations de débit y ont aussi leur part. En effet, à températures d'entrées constantes, toute variation de débit du fluide chaud ou du fluide froid se répercute sur les deux températures de sortie, par le changement de valeur du débit thermique unitaire correspondant, et aussi par la variation du coefficient d'échange qui accompagne une variation de vitesse dans un écoulement. Ce paragraphe présente brièvement l'adaptation du modèle à deux paramètres aux régimes transitoires consécutifs à un échelon de débit sur l'un des fluides.

Prenons par exemple le cas d'un échelon de débit sur le fluide chaud. Les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{aligned} t < 0 & : q_{tc0} ; q_{tf} ; T_{ce} ; T_{fe} \\ t \geq 0 & : q_{tc\infty} ; q_{tf} ; T_{ce} ; T_{fe} \end{aligned} \quad (8.46)$$

Dans les bases théoriques du § 8.3, le seul changement concerne le bilan thermique en régime permanent final (8.23), qui devient :

$$\Phi_{\infty} = q_{tc\infty} (T_{ce} - T_{cs\infty}) = q_{tf} (T_{fs\infty} - T_{fe}) \quad (8.47)$$

Cette modification se répercute sur la constante de temps, dont l'expression est alors (en décomposant  $H_c$  et  $H_f$  (8.21) pour plus de clarté) :

$$\tau = \frac{C (\Theta_0 - \Theta_\infty)}{q_{tc\infty} (T_{cs0} - T_{cs\infty}) + q_{tf} (T_{fs0} - T_{fs\infty})} \quad (8.48)$$

Dans cette formule, la température moyenne  $\Theta_\infty$  doit aussi subir une adaptation, à partir de sa valeur générale (8.37), ce qui donne :

$$\Theta_\infty = \frac{q_{tc\infty}}{q_{tc\infty} + q_{tf}} \left\{ T_{ce} + \frac{q_{tf}}{q_{tc\infty}} T_{fe} + \left( \frac{E}{NUT} \right)_\infty \frac{T_{ce} - T_{fe}}{C} \left( \frac{q_{tf}}{q_{tc\infty}} C_c - C_f - C_a + \frac{q_{tf}}{q_{tc\infty}} \frac{h_f}{1 + \frac{h_f}{h_{c\infty}}} C_i \right) \right\} \quad (8.49)$$

Le déroulement du raisonnement qui conduit à l'expression opérationnelle de  $\tau$  est analogue à celui qui a servi pour les échelons de température. On trouvera le détail des calculs pour diverses dispositions par exemple dans Lachi et al. [JHMT, 1997].

## 8.8. – EFFICACITÉ MOYENNE EN RÉGIME VARIABLE

### 8.8.1. - Définition

Nous avons vu que les notions d'efficacité introduites au chapitre 3 (formules 3.5 à 3.8) sont extrêmement utiles comme outil d'évaluation des échangeurs. Cependant, lorsque les températures d'entrées ou les débits varient avec le temps, ces définitions perdent leur sens physique : on ne dispose plus alors d'un paramètre significatif permettant de caractériser globalement la qualité de l'appareil.

Mais, quand un système linéaire est soumis à un signal d'entrée  $x(t)$  de forme quelconque entre deux instants  $t_0$  et  $t_f$ , sa réponse  $y(t)$  est reliée à  $x(t)$  par la relation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_f} y(t) dt = H_0 \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt \quad (8.50a)$$

où  $H_0$  est la *transmittance statique* du système :

$$H_0 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^{t_f} y(t) dt}{\int_{t_0}^{t_f} x(t) dt} \quad (8.50b)$$

$$H_0 = \frac{y}{x} \text{ en régime permanent} \quad (8.50c)$$

Cette propriété, appliquée aux échangeurs, ouvre la voie à une généralisation du concept d'efficacité pour les régimes dépendant du temps. En effet, si on admet une quasi

linéarité de la réponse, elle permet d'introduire une « *efficacité moyenne en régime variable* », notée  $\bar{E}$  et définie par :

$$\bar{E} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t) dt}{\int_{t_0}^{t_f} \Phi_{max}(t) dt} \quad (8.51)$$

Dans le cas le plus général où les quatre grandeurs d'entrée sont des fonctions du temps (soit :  $T_{fe}(t)$  ;  $T_{ce}(t)$  ;  $q_{tc}(t)$  ;  $q_{tf}(t)$ ), le flux réel et le flux maximum instantanés ont pour valeur, en se référant à (3.1) et (3.4) :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= q_{tf}(t) [T_{fs}(t) - T_{fe}(t)] \quad \text{côté fluide froid} \\ \Phi(t) &= q_{tc}(t) [T_{ce}(t) - T_{cs}(t)] \quad \text{côté fluide chaud} \\ \Phi_{max}(t) &= q_{tmin}(t) [T_{ce}(t) - T_{fe}(t)] \end{aligned} \quad (8.52)$$

La détermination expérimentale de  $\bar{E}$  se fera évidemment sur une valeur finie de  $t_f$ , et revient donc à faire le quotient de deux moyennes mobiles. De ce fait, en toute rigueur, l'efficacité moyenne dépendra de l'intervalle d'intégration, mais les données expérimentales disponibles montrent une convergence rapide de (8.51) par rapport à la pseudo-période des signaux d'entrée [Mai, Chitou, 1999].

### 8.8.2. - Exemples

Dans les situations réelles, la plupart du temps, une seule grandeur d'entrée est variable. Examinons maintenant quelques exemples dans lesquels, pour alléger l'écriture, on prendra  $t_0 = 0$  et  $t_f = \infty$ . Les grandeurs moyennes temporelles sont surlignées.

♣ **Température d'entrée chaude variable.** Les débits et  $T_{fe}$  sont constants.

$$\bar{E} = \frac{q_{tc} \int_0^{\infty} [T_{ce}(t) - T_{cs}(t)] dt}{q_{tmin} \int_0^{\infty} [T_{ce}(t) - T_{fe}] dt} = \frac{q_{tf} \int_0^{\infty} [T_{fs}(t) - T_{fe}] dt}{q_{tmin} \int_0^{\infty} [T_{ce}(t) - T_{fe}] dt} \quad (8.53a)$$

Ceci conduit à introduire des *efficacités relatives moyennes*  $\bar{E}_c$  et  $\bar{E}_f$  côté chaud et côté froid, qui interviendront comme suit :

• Si  $q_{tmin} = q_{tc}$ , alors en référence à (3.10) on écrira :

$$\bar{E} = \bar{E}_c = \frac{\int_0^{\infty} [T_{ce}(t) - T_{cs}(t)] dt}{\int_0^{\infty} [T_{ce}(t) - T_{fe}] dt} = \frac{\overline{T_{ce}} - \overline{T_{cs}}}{\overline{T_{ce}} - T_{fe}} \quad (8.53b)$$

- Si  $q_{tmin} = q_{tf}$  :

$$\bar{E} = \bar{E}_f = \frac{\int_0^{\infty} [T_{fs}(t) - T_{fe}] dt}{\int_0^{\infty} [T_{ce}(t) - T_{fe}] dt} = \frac{\bar{T}_{fs} - T_{fe}}{\bar{T}_{ce} - T_{fe}} \quad (8.53c)$$

- ◆ **Débit chaud variable ; fluide froid à  $q_{tmin}$ .**

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} q_{tc}(t) [T_{ce} - T_{cs}(t)] dt}{q_{tf} (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{q_{tf} \int_0^{\infty} [T_{fs}(t) - T_{fe}] dt}{q_{tf} (T_{ce} - T_{fe})} \quad (8.54a)$$

$$\bar{E} = \bar{E}_f = \frac{\int_0^{\infty} [T_{fs}(t) - T_{fe}] dt}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{\bar{T}_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} \quad (8.54b)$$

Dans ce cas, l'efficacité relative moyenne côté fluide chaud n'est pas définie, car on ne peut pas exprimer séparément  $\bar{q}_{tc}$  et  $\bar{T}_{cs}$  dans la première fraction.

- ♥ **Débit chaud variable ; fluide chaud à  $q_{tmin}$ .**

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} q_{tc}(t) [T_{ce} - T_{cs}(t)] dt}{(T_{ce} - T_{fe}) \int_0^{\infty} q_{tc}(t) dt} = \frac{q_{tf} \int_0^{\infty} [T_{fs}(t) - T_{fe}] dt}{(T_{ce} - T_{fe}) \int_0^{\infty} q_{tc}(t) dt} \quad (8.55a)$$

La deuxième fraction s'écrit encore, en introduisant la moyenne  $\bar{R}$  du facteur de déséquilibre :

$$\bar{E} = \frac{q_{tf}}{q_{tc}} \frac{\bar{T}_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{\bar{R}} \bar{E}_f \quad (8.55b)$$

A nouveau, la première fraction ne permet pas d'isoler le débit chaud moyen, et donc de définir une efficacité relative moyenne côté fluide chaud.

- ♠ Les autres combinaisons se déduisent immédiatement des précédentes. On voit donc qu'il est toujours possible de caractériser une efficacité relative moyenne du côté du fluide dont le débit reste constant (et par conséquent des deux côtés quand il y a seulement une variation de température d'entrée).

### 8.8.3. – Régime permanent de référence

Un angle de vue légèrement différent du précédent permet aussi de considérer les valeurs moyennes des grandeurs d'entrée-sortie ( $\bar{T}_{ce}$ ,  $\bar{T}_{fe}$ ,  $\bar{q}_{tc}$  etc.) comme les paramètres caractéristiques d'un « régime permanent de référence » pouvant servir d'élément de comparaison pour différentes conditions de régime variable.

En linéarisant la perte de charge dans le domaine de fonctionnement considéré, ce régime de référence peut d'ailleurs être associé à une « *perte de charge moyenne en régime variable* », définie de manière analogue à l'efficacité moyenne.

⚠ On voit que les notions d'efficacité moyenne en régime variable et de régime permanent de référence ouvrent la voie au contrôle des performances d'un échangeur dans des conditions de fonctionnement quelconques, *et donc en particulier à un contrôle en continu de l'encrassement*. Dans la pratique, un suivi au cours du temps des températures d'entrée-sortie et des débits pourrait permettre d'effectuer ce contrôle.

Ajoutons pour conclure que, en régime variable, un *réseau d'échangeurs* peut présenter des pathologies analogues à celles des échangeurs à plusieurs passes (§ 3.7.2), avec des croisements de température temporaires à certains nœuds du réseau.